LA CAILLE, Nicolas Louis de

CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SUECICÆ, ET BORUSSICÆ, NEC NON INSTITUTI BONONIENSIS MEMBRI, AC PROFESSORIS MATHESEOS IN COLLEGIO MAZARINIANO PARISIIS

LECTIONES ELEMENTARES OPTICÆ

EX EDITIONE PARISINA ANNI MDCCLVI IN LATINUM TRADUCTÆ

A

C. S. E S. J.

QUIBUS AUCTARII LOCO ACCESSIT

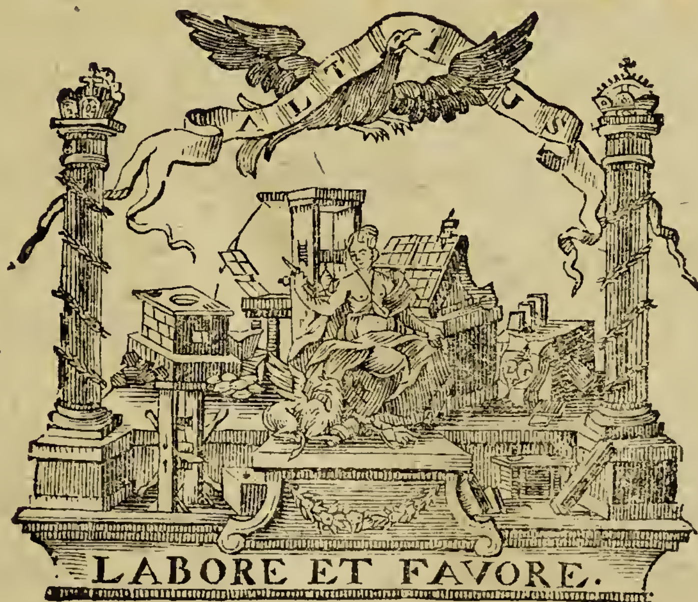
BREVIS THEORIA MICROMETRI OBJECTIVI

A

R. P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH, E S. J.
IN COLLEGIO ROMANO MATHESEOS PROFESSORE

CONCINNATA

M. DCC. LVII.



VIENNÆ AUSTRIÆ
TYPIS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.


WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

LECTORI BENEVOLO.



ectionibus Astronomiae Clarissimi Authoris, quas nuper Gallici sermonis ignari tironis commodo Latinas effeceram, has quoque, Opticam universam pulcherrimo compendio complexas, jungere visum est. Neque enim satis aequum existimabam, ut, quas privatis meis exercitationibus percommodas experirer, eas aliorum utilitati non perinde aptas redderem, apud quos id genus institutiones, ut latina lingua fiant, usus poscit. Ceterum ita habe, Lector Benevole, amplissimam esse Authoris laudem, quam tametsi praefixam libro non legas, tu tamen, ubi evolveris, ni prorsus iniquus sis, pronunciabis.

Illud autem tibi non injucundum fore existimavi, si perbrevem Micrometri Objectivi *descriptionem, atque ex Opticis rationibus concinnatam theoriam, auctarii loco adjicerem, quam R. P. Rogerius Josephus Boscovich, cum his diebus apud nos degeret, petente R. P. Carolo Benvenuto, conscripserat, mihique pro sua humanitate communicaverat. Utriusque nomen apud litteratos notius est, quam ut a me ad eorum laudem quidpiam adjici possit. Committendum scilicet non putavi, ut isthic, suoque adeo loco, praestantissimum, atque recens inventum taceatur, quod cum commoda non exigua in Astronomicis spondeat, in usu tamen suas sibi deposcit cautelas. Vale.*

EXTRAIT

Addidi etiam in hac editione tractatum de Perſpectiva, quod quamvis plures longe apud nos libri extent in hanc Optices partem conſcripti, quam in alias; nullus tamen, quod ſciam, ſit omnium, qui methodo ſatis generali principia illius tradat. In plurimis non niſi regulæ quædam in praxi ſervandæ ſparſim occurrunt, eæque verbis obſcurioribus propoſitæ, & ordine, & demonſtratione deſtitutæ. Uſus autem ſum in principiorum, quæ adfero, ac methodorum, quæ in eorum applicatione ſunt tenendæ, expoſitione, ſtylo paullo fuſiore, quam ceterum adhibeam, quod ſcilicet non agamus hic de Theoria quapiam, quæ vel *Prælectionibus* evolvi primum debeat, vel ſtudio & meditatione Lectori familiaris poſſit reddi; ſed de Arte, quæ diuturnam potius normæ ac circini tractationem deſiderat, duce methodo, quæ nuſpiam ad intricatiorem aliquem caſum adhærere ſequacem patiatur.



INDEX

INDEX
CAPITUM ET ARTICULORUM.

PARS PRIMA.
OPTICA PROPRIE DICTA.

Pag.

ARTICULUS I. De principiis, quibus demonſtrationes Opticæ innituntur - 2
ARTICULUS II. De proprietatibus generalibus luminis - - - - - 3
ARTICULUS III. De proprietatibus Umbrarum - - - - - - 8
ARTICULUS IV. De proprietatibus luminis, viſionis & colorum cauſa ſpectatis 11
ARTICULUS V. De ideis, quæ ex viſu in anima noſtra conſequuntur - - 17
ARTICULUS VI. Varia phænomena objectorum procul viſorum - - 20

PARS SECUNDA
COMPLECTENS CATOPTRICAM ET DIOPTRICAM.

CAPUT I. Notiones Generales Catoptricæ & Dioptricæ.
ARTICULUS I. De imaginibus & focis - - - - - - - - 28
ARTICULUS II. Leges & principia ab experientia deducta, quæ demonſtrationibus in Dioptrica, & Catoptrica fundamentum præbent - - 29
CAPUT II. De Catoptrica.
ARTICULUS I. De imaginibus, aut focis per reflexionem - - - - 31
ARTICULUS II. De loco, ſitu, & motu imaginum per reflexionem ortarum - 33
ARTICULUS III. Applicatio Theoriæ ſuperioris ad ſpecula plana - - - 37
ARTICULUS IV. De ſpeculis cylindricis, conicis &c - - - - - - 41
CAPUT III. Dioptrica.
ARTICULUS I. De imaginibus ſive focis ex ſimplici refractione - - - 43
ARTICULUS II. De motu imaginum reſpondente motui objectorum, quando lux ex aere in vitrum tranſit & viciſſim - - - - - - 44
ARTICULUS III. De imaginibus, quæ per duplicem refractionem efformantur - 46
ARTICULUS IV. De motu & ſitu imaginum, quæ e duplici refractione oriuntur - - - - - - - - - - - - - - 50
CAPUT IV. De viſione.
ARTICULUS I. Deſcriptio Oculi, & imaginum, quæ in eo depinguntur - - 53
ARTICULUS II. De viſione diſtincta. De diverſis vitiis viſus, & remediis, quæ Dioptrica ſuppeditat - - - - - - - - - - 55
ARTICULUS III. De viſione, quæ fit ope vitrorum, vel ſpeculorum - - 58
CAPUT V. De Teleſcopiis, & Microſcopiis.
ARTICULUS I. Notiones præviæ - - - - - - - - - 60
ARTICULUS II. De Teleſcopiis Dioptricis, ſive refringentibus - - - 62

ARTI-



Articulus III. De Telescopiis Catadioptricis - - - - - - - 65
Articulus IV. De Microscopiis - - - - - - - - - 67
Articulus V. Animadversiones Generales in Telescopia, & Microscopia - 70

CAPUT VI. De Obstaculis, quæ in constructione Telescopiorum & Microscopiorum se produnt, & eorum perfectionem necessario minuunt. - 74
Articulus I. De obstaculis a figura sphærica superficierum pendentibus, & ratione iis occurrendi - - - - - - - - - 74
Articulus II. De Obstaculis, quæ resolutio lucis in diversæ naturæ radios opponit - - - - - - - - - - - - - 75
Articulus III. Quæ de proprietatibus lucis dicta sunt, universim ad Telescopia, & Microscopia applicantur - - - - - - - - 78
Articulus IV. Applicantur eadem ad Telescopia, & Microscopia dioptrica - 78
Articulus V. Applicatio dictorum de proprietatibus lucis ad Telescopia & Microscopia Catadioptrica - - - - - - - - - 83

CAPUT VII. Diversæ quæstiones Opticæ - - - - - - - - 85

PARS TERTIA.

PERSPECTIVA.

CAPUT I. Notiones, & principia Generalia, quibus universa Perspectivæ Theoris superstruitur - - - - - - - - - - 92

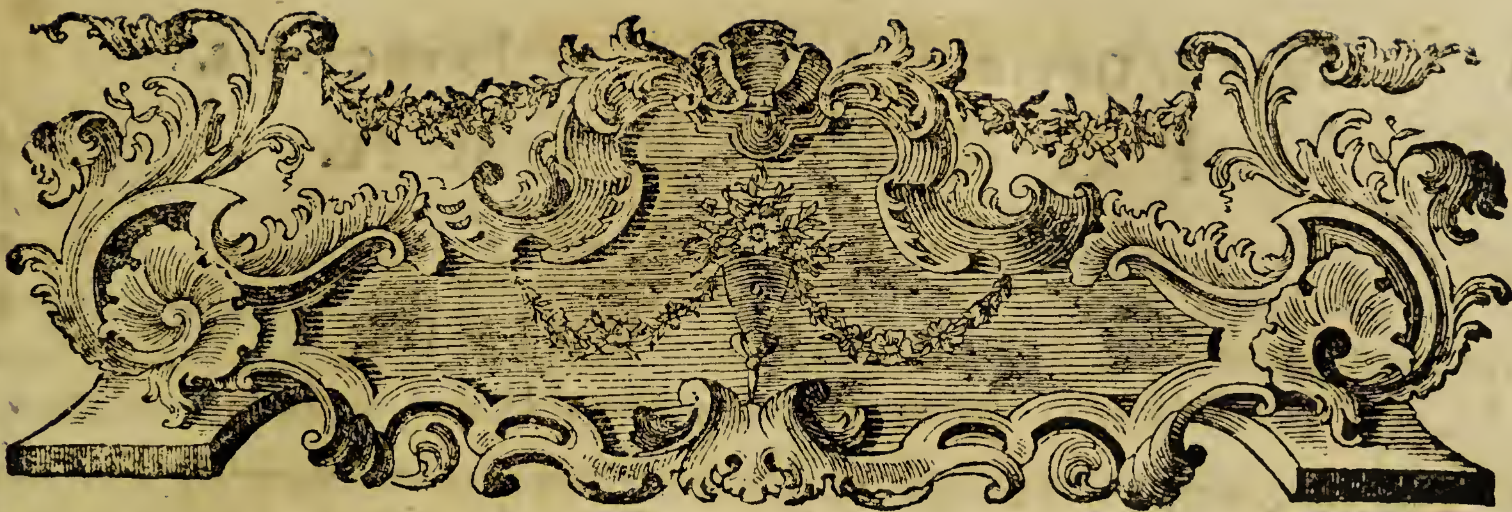
CAPUT II. Describuntur præcipuæ Methodi Perspectivæ Practicæ - - 99
I Methodus per craticulam Perspectivam - - - - - - - 99
II Methodus sine craticula Perspectiva - - - - - - - - 102
III Methodus per margines scalares - - - - - - - - 103
Problemata ope marginum scalarium solvenda - - - - - - 108

CAPUT III. Exemplum, & Observationes Generales pro delineationibus perspectivis omnis generis - - - - - - - - - - 119

CAPUT IV. Apparatus necessarius, quando magnus objectorum situ, & magnitudine datorum numerus est delineandus - - - - - - 125

CAPUT V. De perspectiva Umbrarum - - - - - - - - 129
Articulus I. De proprietatibus Umbrarum, quarum ratio in Perspectiva habetur - - - - - - - - - - - - - - 130
Articulus II. De umbris corporum, quando sol vel luna est in eodem plano cum tabula - - - - - - - - - - - - - 132
Articulus III. De umbris corporum, quando sol vel luna est post planum tabulæ 133
Articulus IV. De umbris, quando sol est a tergo spectatoris - - - 134
Articulus V. De umbris corporum, quando lucidum vicinum est, uti candela ardens - - - - - - - - - - - - - 135
Articulus VI. Varia Problemata de Umbris - - - - - - 139
Auctarium Theoria Micrometri objectivi - - - - - - 148

LECTIO-



LECTIONES ELEMENTARES OPTICAE.



1.

ptica eſt ſcientia Phyſico-Mathematica, de lumine, & viſione agens.

2. Lumen tripliciter ad oculum ab objecto venire poteſt, *primo* directe, & ſine flexu. *Secundo* ſi prius frangatur, vel refringatur. *Tertio* per reflexionem. *Optica proprie dicta* eſt ea pars, quæ tractat de viſione, luce directe ad oculum veniente. *Dioptrica* dicitur pars altera, explicans viſionem, dum lux frangitur, vel refringitur. Et *Catoptrica* denique exponit viſionem, quæ fit lumine reflexo.

3. *Perſpectiva* itidem ad ſcientiam Opticam pertinet; eſtque ars exhibendi in ſuperficie data objecta, qualia apparerent, ſi e puncto dato conſpicerentur.

4. *Medium* dicitur ſpatium, quod lumen permeare debet. Hoc ſpatium vel eſt ſimpliciter vacuum, aut ejusmodi repletum materia, quæ nullum prorſus obſtaculum motui lucis objiciat, tumque *medium liberum* appellatur; vel vero continet talem materiam, per quam lumen majore, vel minore cum facilitate tranſit, vocaturque *medium diaphanum*. Si materia per totum, quod occupat, ſpatium, ſit ejusdem prorſus conſtitutionis, ſibique ſimilis; erit *medium homogeneum*; at ſi conſtet partibus diverſæ indolis, efficiet *medium heterogeneum*.

PARS PRIMA.

Optica proprie dicta.

ARTICULUS PRIMUS.

De Principiis, quibus Demonstrationes Opticæ innituntur.

5. Principia, quibus tanquam fundamentis Optica superstructa est, non aliunde quam ex experientia deducuntur. Sunt autem observata quædam in ipsa rerum natura, de quibus inter omnes Physicos convenit. Omnia hæc erui possunt e sequente experimento, si ejus conditiones rite expendantur. Obstruatur omnis omnino lumini in cubiculum aditus, exiguo tantum relicto foramine. Tum tempestate serena in pariete (qui nitidus sit & albus) omnium objectorum extra foramen positorum imagines suis distinctæ coloribus, quamvis languentibus, & obscurioribus, videbuntur. Rerum immotarum figuræ, ut arborum, ædificiorum, & ipsæ immotæ erunt; quæ vero moventur, harum quoque imagines moveri cernentur, uti hominum, equorum &c. Equidem situs horum omnium inversus exhibebitur, quod inde accidit, quod radii per foramen decussatim transeant, quemadmodum uberius in Dioptrica & Catoptrica exponetur. Si lumen solare in foramen incidat, radius lucidus videbitur linea recta a foramine usque ad oppositum parietem, aut tabulatum protensus. Si oculus in hoc radio constituatur, oculus, foramen, & sol in eadem recta apparebunt. Idem censendum de objectis aliis, quæ in pariete depinguntur. Porro imagines in eodem plano efformatæ tanto sunt minores, quanto longius objecta a foramine sunt remota. Cetera, quæ in hoc experimento occurrunt (quod exprimit, quæ in oculo nostro contingunt, dum objecta nos ambientia videmus), alias examini subjiciemus; nunc si debita adhibeatur attentio, sequentia deduci possunt.

6. I. *Lumen semper linea recta de se propagatur.*

7. II. *Punctum quodvis objecti luminosi e loco quovis videri potest, ad quem ex eo recta, nullo interjecto obstaculo, duci potest.* Tamdiu enim rei motæ imago in camera obscura depingitur, quamdiu manet foramini opposita.

8. III. *Punctum quodvis luminosum in omnem partem radiat. Est velut centrum sphæræ lucis indefinite quaquaversum extensæ.* Et si cogitetur, quod interposito plano aliquo radii non nulli intercipiantur, erit punctum lucidum apex pyramidis luminosæ, quam radii illi constituunt; & cujus basis est planum eos excipiens.

9. IV. Imago quoque in camera obscura objecti alicujus superficiem exhibens, est basis pyramidis luminosæ, apicem in foramine habentis; & radii, qui hanc efformant, cum in foramine se inter-

terſecent, aliam huic ſimilem & oppoſitam efficiunt, cujus vertex eſt in eodem foramine, & baſis in ſuperficie objecti.

10. *Particulæ luminis ſunt ſubtiliſſimæ* : utpote cum radii e quovis puncto objectorum foramini oppoſitorum venientes, per aperturam quam minimam, quin ſeſe invicem impediant, vel confundantur, quantum quidem percipi poteſt, tranſeant.

Articulus II.

De proprietatibus generalibus Luminis.

11. Propositio I. *In medio libero vis & intenſitas luminis per radios parallelos propagati ſemper manent eædem.* In medio enim libero nihil eſt, quod motui lucis obſtet; nihil, quod impediat, quo minus eodem ſemper modo agat; nihil, quod ejus celeritatem, aut directionem mutet.

12. Propositio II. *In medio libero vis & intenſitas luminis, quod propagatur radiis vel ex eodem aliquo puncto digredientibus, vel ad idem punctum concurrentibus, ſunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab illo puncto.*

Nam intervalla inter duos radios ab eodem puncto venientes ſunt ſemper in ratione diſtantiarum ab eo puncto (ſunt enim hæc intervalla baſes parallelæ triangulorum iſoſcelium, quorum crura radii conſtituunt). Supponamus itaque, per interpoſitum planum in diſtantia quapiam a puncto concurſus certum radiorum numerum intercipi; removeatur dein hoc planum ad diſtantiam duplam; tum ad triplam, quadruplam &c; erunt intervalla radiorum binorum quorumvis inter ſe ut 1, 2, 3, 4 &c. (quæ eadem eſt ratio diſtantiarum a puncto concurſus); & quælibet dimenſio baſium pyramidum hac ratione factarum, erit in eadem ratione. Ergo ſuperficies (Element. 608) earundem baſium erunt ut 1, 4, 9, 16 &c; ita ut idem radiorum numerus ſucceſſive diſtribuatur per ſuperficies, quæ ſunt in ratione duplicata diſtantiarum a puncto concurſus, adeoque ut vis luminis eas ſuperficies occupantis in eadem ratione decreſcat. Etenim ſi in baſi ſecundæ, tertiæ, quartæ &c. pyramidis accipiatur ſpatium æquale baſi pyramidis primæ, manifeſtum eſt, quod in eo ſpatio accepto in baſi pyramidis ſecundæ non ſit niſi pars quarta luminis totius baſis; in ſpatio accepto in baſi pyramidis tertiæ, non niſi pars nona; in ſpatio ſumto in baſi quartæ non niſi decima ſexta &c.

13. Hinc ergo conſtat, quod luminis a puncto, unde emittitur, digredientis vis ſequatur hanc ſeriem 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ &c.

14. Observa. Quamvis luminis vis adeo velociter decreſcat, quando ab origine ſua recedit, interim tamen *ſplendor corporis lucidi*

ad quodcunque intervallum in medio perfecte libero, & eadem apertura oculi visi manet constans.

Hic enim splendor dependet a densitate radiorum, qui imaginem in oculo depingunt, uti Articulo IV exponetur. Quod si jam oculus ad certam distantiam constitutus dein recedat ad distantiam duplam, in hac dupla distantia imaginis depictae diameter tantum est dimidia diametri imaginis, quae in ejus fundo ad distantiam simplam depingebatur, adeoque spatium imaginis secundae est subquadruplum spatii imaginis primae: atqui etiam radiorum tantum quarta pars in dupla distantia recipitur eorum, qui incidebant in distantia simpla; ergo in imagine secunda eadem est radiorum densitas, ac in prima, consequenter idem splendor.

15. Equidem si experientiam consulamus, semper objecta eadem tanto apparent obscuriora quanto longius distant, donec tandem prorsus non amplius videantur; verum haec obscuritas inde oritur, quod non nisi trans aerem ea videre possimus, qui est medium satis densum, praecipue prope telluris superficiem, & incredibilem radiorum copiam per intervallum inter objectum & oculum dissipat. Quippe secundum calculum a D. Bouguer initum in spatio horizontali 189 hexapedarum, sive $\frac{1}{12}$ leucae communis, pars centesima lucis perditur; & intervallo 7469 hexapedarum, seu fere $3\frac{1}{4}$ leucarum, pars tertia perit. (Essai d'Opt. p. 76 & 80). Disparent tandem obiecta, quod eorum imaginum decrescente semper magnitudine, minor quoque fibrarum nervearum oculi numerus moveatur, donec tam fiant exiguae, ut sensibilem impressionem facere non possint.

16. Propositio III. *Lumen per medium diaphanum ejusdem ubique densitatis quomodocunque propagatum, decrescit in progressione geometrica.*

Demonstratio. Supponamus densitatem uniformem medii, v. g. frusti vitri, esse ejus naturae, ut partes illius solidae radios lucis intercipientes efficiant partem $\frac{1}{n}$ totius voluminis vitri. Supponamus etiam, vitrum in lamellas aequales & parallelas sectum, quarum crassities aequet diametrum particulae unius solidae (quas omnes inter se aequales assumo): patet primo in cujusvis lamellae spatio, per quod lux transit, esse particulas radios intercipientes $\frac{1}{n}$ totius illius spatii. 2do si fascis luminis, qui primam lamellam ingreditur, sit $= 1$, in prima lamella intercipi $\frac{1}{n}$, adeoque lumen in egressu tantum fore $= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Pariter ex lumine in

secun-

ſecundam lamellam veniente $= \frac{n-1}{n}$ intercipietur pars $\frac{1}{n}$, quæ eſt $\frac{n-1}{nn}$; hinc in exitu tantum manebit $\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{nn} = \frac{n^2-2n+1}{n^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$. Ex hac quantitate in tertia lamella rurſus ſubtrahetur $\frac{1}{n}$ ſeu $\frac{n^2-2n+1}{n^3}$, ut emergens tantum ſit $\frac{n^2-2n+1}{n^2} - \frac{n^2+2n-1}{n^3} = \frac{n^3-3n^2+3n-1}{n^3} = \frac{(n-1)^3}{n^3}$; & ſic deinceps, id, quod evidenter progreſſionem Geometricam conſtituit.

17. PROPOSITIO IV. *In medio diaphano æquabilis denſitatis intenſitas luminis a puncto lucido intra hoc medium poſito divergentis decreſcit in hac ſerie* $\frac{n-1}{n}$, $\frac{(n-1)^2}{4n^2}$, $\frac{(n-1)^3}{9n^3}$, $\frac{(n-1)^4}{15n^4}$, $\frac{(n-1)^5}{25n^5}$ &c, in qua n exprimit quantitatem radiorum ad ſingula intervalla æqualia a puncto lucido per denſitatem medii interceptorum.

Cum enim lumen divergat, poſt ſingula intervalla intenſitas lucis decreſcit in ſerie 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ &c (13). Et quia etiam medium denſum eſt, decreſcit quoque in hac ſerie $\frac{n-1}{n}$, $\frac{(n-1)^2}{n^2}$, $\frac{(n-1)^3}{n^3}$, $\frac{(n-1)^4}{n^4}$, $\frac{(n-1)^5}{n^5}$ &c.

18. Exempli cauſa, quia lux ad diſtantiam 189 hexapedarum perdit partem $\frac{1}{100}$ ſuorum radiorum propter denſitatem aeris, ſequitur, eſſe intenſitatem luminis, qua objectum videtur ad diſtantiam $\frac{1}{12}$ leucæ, ad intenſitatem, qua idem videtur ad diſtantiam $\frac{1}{3}$ leucæ, ſive 756 hexapedarum, in ratione reciproca $\frac{96059601}{1600000000}$ ad $\frac{99}{100}$, ſive ut 33 ad 2 fere.

19. OBSERVA I. Cum lumen ab aſtris ad nos non niſi per atmoſphæram, quæ tellurem undique ambit, pervenire poſſit, eo plus radiorum perit, quo tractu longiore per eam transmittitur; eſt vero hic eo longior, quo radii magis oblique ad nos pertingunt: ſit enim A B C (Fig. 1) arcus peripheriæ telluris, *abc* arcus concentricus, atmoſphæram terminans, quæ non niſi ad aliquot leucarum altitudinem aſſurgit. Sit D B radius e zenith obſervatoris in B conſtituti perpendiculariter ad horizontem incidens; E B ſit alter radius oblique; & F B tertius horizontaliter veniens. Manifeſtum eſt, quod radius perpendicularis ſolam altitudinem atmoſphæræ *b* B permeare debeat; obliquo E B jam longior via,

quam *b* B, ſcilicet G B, conficienda ſit; horizontali F B denique maximum ſpatium tranſeundum ſit, ut H B. E quo ſequitur, lucem aſtrorum eſſe maxime debilem, cum in horizonte verſantur; ſed ſemper augeri, dum magis ſupra horizontem elevantur; eſſe denique vivaciſſimam, dum per zenith tranſeunt.

20. D. Bouguer calculo propriis nixo experimentis reperit, quod e 10000 radiis, qui ſi atmoſphæra non eſſet, ab aliquo ſydere ad nos pervenirent, tot ſolummodo, quot ſequens Tabella exhibet, ad noſtros uſque oculos propagentur.

Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum.	Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum.	Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum
0	5	8	2423	30	6613
1	47	9	2797	35	6963
2	192	10	3149	40	7237
3	454	11	3472	50	7624
4	802	12	3773	60	7866
5	1201	15	4551	70	8016
6	1616	20	5474	80	8098
7	2031	25	6136	90	8123

21. OBSERVA II. Idem etiam experimentis oſtendit, Primo *lumen ſolare eſſe circiter* 300000es *fortius luce lunæ plenæ, cum hæc mediam inter maximam & minimam diſtantiam a tellure habet.* Secundo *lumen ſolis non eſſe amplius perceptibile, quando* 1000000000000 *vicibus imminutum eſt*, ita ut corpus ſit vere opacum, quod partem tantum 1000000000000am lucis ſolaris transmittit.

22. Alia lucis affectio, quæ per obſervationes Aſtronomicas conſtitit, eſt, quod *maxima cum velocitate propagetur, ita ut tempore fere 8 minutorum ad nos usque a ſole perveniat*, hoc eſt, 2750000 Leucas percurrat. Hinc fit, ut nihil fere videamus in cœlo in loco ſuo vero, aſtris interea in ſuis orbitis progredientibus, cum lux ſpatium inter oculum noſtrum, & aſtra interjectum conficit. Et quia præterea ipſe oculus revolutione telluris circa ſolem abripitur, phænomena ita inter ſe complicantur, ut aſtra alio, quam ubi reipſa verſantur, referamus. Effectuum horum particularis expoſitio non exiguam Aſtronomiæ modernæ partem conſtituit, quam *Theoriam aberrationis luminis* appellant.

23. PROPOSITIO V. *Si radii luminis ab eodem puncto dimanentes, & per foramen in cameram obſcuram admiſſi, excipiantur plano ad foramen parallelo, efformabunt in plano figuram ſimilem figuræ foraminis, eoque majorem, quo major fuerit plani a foramine diſtantia.*

Nam

Nam in hoc casu punctum luminosum est apex pyramidis, cujus basis est planum foraminis, & latera constituuntur per radios, qui latera foraminis radunt; hi porro in cameram obscuram producti semper magis divergunt: unde per planum iis objectum pyramis continuata intra cameram secatur ad basin parallele, adeoque sectio est figura luminosa foramini similis, & tanto major, quanto remotior a foramine.

24. Ex natura pyramidis constat, quod si planum non parallele ad foramen, sed oblique opponatur, figura luminosa tot quidem habitura sit latera, quot foramen, verum oblonga magis sit futura.

25. Illud etiam facile apparet, hanc figuram lucidam nil aliud esse, quam collectionem tot imaginum puncti radios emittentis, quot puncta sunt in foraminis plano.

26. Propos. VI. *Si lumen solis, vel lunæ plenæ per exiguum foramen cuiuslibet figuræ admissum excipiatur plano ad foramen parallelo in exigua a foramine distantia, figura spatii luminosi in plano similis erit foramini; at in majore distantia erit ad sensum circularis.*

Planum enim foraminis velut infinitis punctis constat, quæ sunt totidem foramina contigua, per quæ singula radii e singulis disci solaris punctis emissi transmittuntur. Quodlibet igitur punctum superficiei foraminis est apex coni luminosi, cujus basis est discus solis, & axis radius e centro veniens; angulus vero ad apicem a radiis ab extimi limbi diametraliter oppositis punctis emanantibus comprehensus 32 minutorum. Hinc radii iidem ultra foramen producti, alium efficiunt conum, cujus idem apex, idem axis, idem ad apicem angulus, & qui in partem soli oppositam indefinite prolongari possit. Quia autem amplitudo foraminis respectu distantiæ solis infinite parva, axes omnium horum conorum sunt inter se paralleli; & ob anguli a lateribus ad verticem comprehensi exilitatem, eadem latera cum axibus suis coincidunt fere in exiguo a foramine intervallo. Hinc si planum opponatur prope foramen, lux non aliter in eo excipitur, ac si soli axes conorum radiosorum inciderent; qui cum inter se sint paralleli, eundem ordinem & situm habent, quem puncta, quibus superficies foraminis constat, ideoque spatium illuminatum plani figuram foraminis habere debet. At vero si planum longius removeatur, latera conorum luminosorum sensibiliter a suis axibus discedunt, efformantque conos semper latiores, ita ut figura spatii illuminati in plano intervallo majore a foramine constet meris basibus circularibus conorum. Equidem centra horum circulorum, productis axibus determinata, eundem inter se situm habent in plano, ean-

dem-

demque diſtantiam ab invicem, quem puncta ſuperficiem foraminis conſtituentia; attamen peripheriæ eorum inter ſe confunduntur, & figuram proxime circularem efformant, uti videre eſt figura 2, e ſeptem circulis, centris A, B, C, D, E, F, G deſcriptis compoſita, & heptagonum irregulare exhibente.

27. OBSERVA I. Figura ſpatii illuminati erit ſemper ad ſenſum circularis, ſi latera foraminis non multum inter ſe diſcrepant. At ſi foramen ſit oblongum, uti parallelogrammum, etiam figura ſpatii luminoſi oblonga evadet, terminis oppoſitis in ſemicirculos rotundatis. Univerſim, figuræ luminoſæ a ſole vel luna factæ in aliqua diſtantia ſemper angulis in rotundum verſis apparent.

28. II. Si planum lumen excipiens non ſit parallelum plano foraminis, figura erit ovalis, baſibus conorum luminoſorum in ellipſes abeuntibus.

29. III. Si parte foramini obſtructa ejus figura mutatur, figura imaginis lucidæ non mutabitur, ſed ſolum dilutior, ac debilior videbitur, & minor.

30. IV. Hinc eſt, quod in ambulacris altioribus arboribus conſitis, quæ denſis frondibus radios ſolares arcent, uti ſunt caſtaneæ majores, quandoque in terra circuli lucidi videantur, interſtitiis frondium, per quæ lumen ſolare penetrare potuit, reſpondentes.

31. COROLL. *Si ſint plura foramina vicina*, v. g. tria, *per quæ ſolaris lux in cameram obſcuram admittitur, in minore diſtantia tres circuli luminoſi depingentur; ubi vero tabula, qua radii excipiuntur, magis, magisque removetur, hi circuli ampliores fient, quin tamen eorum centra diſtantiam inter ſe mutent; tum ſeſe invicem contingent; tandem in unum abibunt, qui creſcente intervallo a foraminibus & ipſe ſemper creſcet, & ad accuratiorem rotunditatem accedet.*

ARTICULUS III.

De proprietatibus Umbrarum.

32. PROPOSITIO I. *Corpus opacum ex una parte illuminatum projicit umbram lineis rectis terminatam, & lumini directe oppoſitam.*

Lumen quippe (6) ſemper linea recta propagatur, eiusque radii extremam corporis ſuperficiem radentes, umbram ex parte averſa terminant.

33. PROPOSITIO II. *Umbra corporis opaci eo ſenſibilior & nigrior eſt, quo corpus ex altera parte intenſiore luce colluſtratur.*

Tunc

Tunc enim oppositio inter umbram & spatium vicinum illuminatum est sensibilior.

34. OBSERVA. Si corpus illuminetur a diversis lucidis ad eandem fere partem constitutis, totidem diversas umbras in plagas lucidis oppositas projicit, quæ proinde prope corpus opacum partim inter se coincidunt; & ex propositione hac patet, cur umbræ eo sint obscuriores, quo plurium confusione oriuntur.

35. PROPOSITIO III. *Si umbra corporis in plano excipiatur, spatiis reliquis medii illuminatis, ea semper cingitur penumbra tanto latiore, quanto lucidum majus est, & corpus longius a plano abest, vel umbra magis oblique in planum incidit; estque hæc penumbra eo dilutior, quo remotior ab umbra vera.*

Sit AB (fig. 3.) sol; ED corpus opacum super solo DI. Ducantur radii BF, CG, AH. Manifestum est, quod si spectator ab I usque ad H accedat, semper videat integrum solis discum. At ubi ex H progreditur, inferior solis limbus A illi obtegetur primum, tum major semper pars, donec in G superiorem solum partem mediam conspiciat. Denique in F ad umbram veram DF pertinget, totusque discus solis ejus oculis eripietur. Ex quo patet, *Primo* spectatorem eo semper minus clare videre posse, quo umbræ veræ sit proprior, ut adeo spatium HF tegatur penumbra semper densiore, quo umbræ veræ est vicinior, cujus limes est in F. *Secundo* in triangulo FEH latus FH, quod est mensura penumbræ, eo esse majus, quo angulus FEH, qui diametrum apparentem lucidi AB metitur, major est, quo item distantia ED extremi E corporis opaci a plano DI umbram excipiente major; & quo denique rectæ EH, EF magis oblique incidunt in hoc planum.

36. OBSERVA. Hæc causa est, cur limites umbræ corporum a sole illuminatorum semper sint incerti & confusi, maxime quando umbra longius projicitur. Et quia diameter solis sub angulo 32 minutorum videtur; est (Elem. 746) *magnitudo penumbræ* FH *a corpore opaco projectæ ad distantiam limitis umbræ veræ* F *ab extremo corporis* E, *sive ad* FE, *ut sinus anguli 32 minutorum ad sinum anguli* EHD, *quo limbus inferior* A *solis supra planum* DI, *in quod umbra cadit, elevatus est.* Ceterum, quæ hic de sole dicuntur, etiam de luna intelligenda sunt, & universim de omnibus corporibus illuminantibus, quorum diameter, quæ causa est penumbræ, sensibilis est. Ut enim penumbra nulla esset, luminosum deberet esse unicum punctum.

37. PROPOSITIO IV. *Longitudines umbrarum verarum corporum a sole vel luna illuminatorum sunt reciproce ut tangentes altitudinum apparentium horum syderum supra planum, in quod umbræ cadunt.*

Nam in triangulo rectangulo EDF, altitudine corporis opaci ED sumpta pro radio, est (Elem. 748) longitudo umbræ DF tangens anguli DEF, complementi alterius DFE qui est altitudo limbi superioris solis supra planum DI. Itaque umbræ veræ sunt ut cotangentes harum altitudinum, sive (Elem. 737) reciproce ut tangentes altitudinis superioris limbi syderis corpus opacum illuminantis.

38. COROLL. *Datis duobus e sequentibus tribus: angulo altitudinis limbi superioris syderis; altitudine perpendiculari corporis opaci supra planum, ad quod altitudo syderis refertur; & longitudine umbræ veræ ab opaco projectæ computata a puncto, in quod cadit perpendiculum a supremo corporis puncto in planum demissum; tertium semper reperitur*, solutione trianguli rectilinei ut EDF.

39. PROPOSITIO V. *Si sphæra lucida radiet in opacam, sitque hæc illa major; pars illuminans sphæræ lucidæ tanto major, & pars illuminata opacæ tanto minor erit reliqua in utraque sphæræ superficie, quanto magis opaca excedit lucidam. Contrarium fiet, si lucida superet opacam. Et si sphæræ sint æquales, superficies dimidia lucidæ illuminabit superficiem dimidiam opacæ.*

Sit B (fig. 4) sphæra minor lucida, & C opaca major. Evidens est, partem sphæræ C, quæ illuminari potest, determinari per extimos radios, qui eam attingere possunt, sive, per radios tangentes. Similiter ultimi radii, qui a sphæra B ad opacam venire possunt, sunt eiusdem tangentes. Itaque tangentes LP, KO determinant & ultima puncta illuminantia L, K, & ultima puncta illuminata P, O. Si porro ad rectam BC ducantur diametri HI, MN perpendiculariter, peripherias globorum B & C bifariam divident (Elem. 402); & si e centris B & C demittantur ad tangentes perpendicula BL, BK, & CP, CO, hæc in puncta contactus incident. Ergo arcus LRK (major 180 gradibus) exhibet partem illuminantem; & arcus PSO (180 gradibus minor) partem illuminatam. Quod si globus C esset lucidus, globus B opacus; arcus PSO foret pars illuminans, & LRK illuminata. Denique si globi essent æquales, tangentes forent inter se parallelæ, & per extrema diametrorum HI, MN transirent, ideoque tam arcus illuminans, quam illuminatus contineret 180 gradus.

40. COROLL. I. Ex similitudine triangulorum rectangulorum LBH, PCM; KBI; OCN, arcus LH, PM, KI, ON esse ejusdem numeri graduum, facile apparet. Hinc *arcus globi metiens amplitudinem partis illuminantis est complementum ad 360 gradus arcus metientis amplitudinem partis illuminatæ in altero globo.*

41. COROLL. II. Ex eadem ratione *arcus obscurus globi illuminati est tot graduum, quot arcus illuminans globi lucidi. Et arcus non illuminans globi lucidi habet tot gradus, quot arcus illuminatus globi opaci.*

42. Co.

42. COROLL. III. Et quia similia sunt triangula rectangula ABL, LBH, est angulus BAL = LBH. E quo sequitur, excessum arcus illuminantis supra arcum non illuminantem; sive differentiam inter partem illuminantem & illuminatam, mensurari per angulum LAK, quem radii tangentes efficiunt.

43. COROLL. IV. *Sphæra lucida opacæ æqualis, semper hujus dimidium illuminat, quocunque intervallo distent; verum si lucida major sit, quam opaca, tanto major hujus pars illuminatur, quanto minor est sphærarum distantia, & vicissim.* Quo enim sphæra altera alteri propior est, eo angulus a tangentibus comprehensus PAO fit major, & pars illuminata obscuram magis excedit.

44. Hinc globi medietas, cujus diameter excedit diametrum pupillæ, uno oculo simul videri nequit. Et sol plus quam hemisphærium cujusvis planetæ illuminat; luna plena minus, quam dimidium telluris &c.

45. COROLL. V. *Umbra globi illuminati a globo æquali cylindrica est, & infinita.* Terminatur enim radiis inter se parallelis circumferentiam circuli ambientibus. *Umbra globi illuminati a globo majore est conica & finita,* ut KAL. Et *umbra* QPOV *globi* C *illuminati a globo minore* B *in infinitum extenditur forma coni truncati.*

46. COROLL. VI. Datis semidiametris BK, CO, & distantia centrorum BC duorum globorum, facile determinatur axis BA coni umbrosi a globo minore projecti. Ducta enim KD ad BC parallela, cum etiam BK, CO sint parallelæ, est BK = CD, & BC = KD, & triangula KDO, ACO similia. Hinc DO : OC = DK : CA; sive CO — BK : CO = CB : CA : subtracta igitur CB ex CA, remanet BA, axis quæsitus. Exhibeat B terram, C solem; sit BK = 1, CO = 80, 5, & BC = 17189; reperietur BA = 216, quæ circiter efficiunt 324000 leucas, si scilicet semidiametro telluris BK tribuantur 1500 leucæ.

47. OBSERVA. Manifestum est, quod pars illuminata, de qua in hac propositione sermo est, etiam complectatur penumbram, & terminetur per umbram veram.

ARTICULUS IV.

De natura & proprietatibus luminis, visionis & colorum causa spectatis.

48. Oculus, si quædam dempseris, idem nobis præstat, quod camera obscura. Pupilla foramen est, quod radios lucis se in ea intersecantes admittit, ut in tunica fundum oculi vestiente rerum omnium, ad quas visus noster se extendit, imagines in-

versas depingant, quarum diametri fere sunt ut anguli a radiis ab extremis objectorum punctis venientibus ipso in ingressu in pupillam comprehensi, dum scilicet hi anguli exigui sunt; sive quod idem est, imaginum ejusdem objecti diametri eo sunt majores, quo objectum minorem habet distantiam ab oculo. Quamvis autem situm inversum rerum imagines in nostro oculo acquirant; nihilominus tamen omnia situ erecto videmus. Cum enim radii decussatim ingrediantur oculum, ii, qui ab objecti parte superiore veniunt, inferiorem imaginis partem efformant, & ex opposito. Et quoniam nos non aliunde de situ objecti judicium ferre possumus, quam ex impressione in organum visus per radios facta, necesse est, ut objectum secundum eam directionem collocatum censeamus, qua impressio fit: atqui si radius a superiore objecti parte incidens feriat partem oculi inferiorem, reactio hujus exhibet objectum radios emittens in recta a parte inferiore sursum reducta; igitur, ut reipsa est, superior objecti pars, etiam superius videtur.

49. Licet ratio, & modus, quo per lumen in oculo objectorum imagines depinguntur, sine legum Dioptricae notitia accurate explicari nequeant; omittere tamen hic non possumus, quae nos experientia tum de modo, quo lumen visum afficit, tum de consequentibus inde in nobis ideis docet.

50. Lumen est collectio particularum innumerarum materiae, sive corpusculorum propemodum infinite parvorum, ac inter se distinctorum, summe elasticorum, & maxima cum velocitate motorum, ut cum ad organum visus perveniunt, illud vi suae densitati, massae, ac celeritati proportionali feriant, ad motum quemdam tremulum concitent, diversasque impressiones efficiant, quas ex lege unionis animae cum corpore in mente nostra variae consequuntur ideae de praesentia objectorum, e quibus ejusmodi corpuscula, sive atomi luminosae veniunt.

51. Atomi lucis diversae sunt indolis, aut saltem proprietates peculiares quibuslibet sunt inditae, nulli obnoxiae mutationi, nec a varia modificatione luminis pendentes, quae dum propagatur, ei accidere potest.

52. *Radium luminis* cum dicemus, intelligemus viam atomi, vel puncti lucentis; sive potius seriem subtilissimi fili speciem exhibentem atomorum luminosarum, contiguarum inter se, & ejusdem naturae. Unde tot erunt radiorum diversae species, quot atomorum, quibus singuli constant. Illae autem atomi diversae speciei censendae sunt, quae in organo visus diversas sensationes excitant. Denique sensationum discrimen in eo consistere est putandum, quod *colores* appellamus.

53. Quam-

53. Quamvis autem fieri non possit, ut radii lucis in omnes omnino species, quae re ipsa sunt, distribuantur exacte; solent tamen septem praecipuae numerari, *colorum primigeniorum* nomine, quorum ordo idem est, ac eorum, qui in iride observantur, scilicet *ruber*, *aurantius*, *flavus*, *viridis*, *caeruleus*, *indicus*, *violaceus*. Hinc cum imposterum sermo de coloribus erit, *radios rubros*, *radios caeruleos* &c. vocabimus eas lucis atomos, quae in oculo nostro talem excitant sensationem, ut objectum, quod videmus, rubrum, aut caeruleum judicemus.

54. Objectum visibile redditur, vel quia ipsum directe potest particulas lucis in nostros oculos emittere, diciturque tum *objectum luminosum*, uti sunt sol, fax ardens &c, & lumen illius *lumen directum*; vel quia radiis objecti luminosi expositum eosdem potest in nostros oculos remittere, atque ut diximus, hoc modo occasionem praebere ideae de sua praesentia: vocatur vero tunc *objectum illuminatum*, & lumen inter hoc & nostros oculos interceptum, *lumen reflexum*.

Quoniam sol respectu nostri est objectum maxime luminosum, quod ad nos radios emittat, illud jam exponemus, qua ratione cetera objecta nobis faciat conspicua. Idem enim de aliis lucidis, velut de flamma candelae, sentiendum est.

55. Sol versus omnem partem ad immensam usque distantiam, incredibilem copiam radiorum omnis generis in se commistorum emittit *, ita quidem, ut neque ulla horum certa species praedominetur ad sensum, neque in toto universo, qua quidem nobis patet, ullum sit punctum sensibile, quod radios non recipiat, saltem nisi vel a corpore solido occupetur, vel intra umbram veram corporum luci imperviorum sit positum.

56. Radii, quos oculus noster ex omnibus punctis superficiei solis visui objectae directe recipit, conum constituunt, cujus basis est superficies solis, & apex in apertura, seu pupilla oculi. Iidem radii ultra pupillam producti (si inflexionem quandam, de qua in sequentibus dicemus, hic non attendamus) alium conum intra oculum efficiunt, atque in ejus fundo terminatum, qui propterea in spatio circulari hujus fundi impressionem facit, ad quam idea de praesente objecto lucido, & rotundo, quod solem dicimus, consequitur.

57. *Imagines objectorum in oculo* dicemus in sequentibus illa spatia

* Non isthic illud agimus, ut litem inter Philosophos componamus, an lux consistat in vero, & continuo effluvio particularum a corpore luminoso avulsarum; an vero efficiatur motu undulatorio aut oscillatorio materiae elasticae per hoc universum diffusae, quem ei sol, aliaque corpora lucida per se imprimant, aut in eadem conservent. Quam quisque partem hac in quaestione tueri velit, Physicis liberum esto decernere. *Nota Authoris.*

in fundo hujus organi, in quæ radii lucis recipiuntur, & ubi consequenter impreſſio ſentitur. Vocabuli ratio eſt, quod reipſa, ſi reciſis ex parte poſtica oculi exterioribus tunicis, ante eum objectum lucidum, vel ſaltem fortiter illuminatum conſtituatur, objecti imago ſuis coloribus picta in fundo oculi videatur.

Dum radii ſolis tantum ex reflexione ad nos perveniunt, ſive magis generaliter, dum prius in aliud corpus incidunt, quadruplex caſus eſſe poteſt.

58. CASUS I. Si particulæ hujus corporis (quod luci impenetrabile ſuppono) ita ſint coordinatæ, ut qua parte radii in illud incidunt, ex integro reflectantur eo ſitu & ordine, quo advenerunt, * manifeſtum eſt, oculum in quem ita reflexi radii incurrunt, eodem prorſus modo debere affici, ac ſi directe e ſole venirent. Itaque in oculo ſolis tantum perceptio orietur, cujus imago quoque in eodem depingitur, & corpus reflectens verum eſt ſpeculum, oculo non viſibile. Sed quoniam radii primam ſuam directionem amiſerunt, ſol non apparet in eodem loco, in quo videretur radiis directe ad oculum emiſſis, quippe cum exiſtimemus objecta ſita eſſe in ea linea recta, quæ eſt radiorum directio ipſo momento, quo ad viſus organum pertingunt; quemadmodum ſi forte ictum lapidis recipiamus, quin eum, cum projicitur, videamus, putamus eum linea recta, atque ea ex parte, qua impreſſio fit, adveniſſe, quamvis ſubſultim, aut linea aliqua curva ad nos delatus ſit, cujus tangens in puncto, ubi nos ferit, eſt recta illa, quam veram lapidis viam arbitramur.

59. Porro experientia didicimus, corpus opacum, & ſoli expoſitum eo accuratioris ſpeculi vices gerere, quo ejus ſuperficies magis eſt polita, hoc eſt, eo minus a nobis cerni hanc ſuperficiem, ſed tanto vivaciorem ſolis imaginem ab ea ad nos reflecti. Quoniam itaque corpora nobis nota nequaquam tam exacte ſunt lævia, ſed particulis extimis nulla certa lege diſpoſitis, atque inæqualiter inclinatis, aliis altius & ſupra alias aſſurgentibus, figura diverſa &c; ſupponemus in hoc Articulo, corporum noſtratium ſuperficies exacte ſpeculares eſſe non poſſe.

60. CA-

* Altera hæc eſt lis inter Philoſophos, utrum ſcilicet reflexio lucis aliorum elaſticorum corporum more fiat ſola motus reſolutione ad impactum in partes ſolidas obſtaculi, an, quod potius videtur, lux reflectatur ex incurſu in materiam elaſticam per ſuperficiem corporum diffuſam: an denique reflexio hæc fiat repulſione, quæ ſit vis quædam activa in lucem appellentem ad corpora exercita. Quin quidquam hac de re ſtatutum velimus, ita loquemur de reflexione, velut ſi fieret in ipſis particulis ſolidis corporum. *Nota Authoris.*

60. CASUS II. Si is sit particularum in superficie corporis, in quam lux incidit, situs & ordo, ut sive omnes, sive plurimi radii reflectantur, saltem ut non plures ad sensum ex una, quam ex altera quavis eorum specie absorpti extinguantur, sintque radii inter se confusi & permisti, quaquaversum scilicet pro varia particularum reflectentium inclinatione directi; oculus in directione luminis ita confusi positus radios ex omni parte superficiei reflectentis recipiet, qui formam quandam pyramidis habebunt, cujus basis est superficies reflectens, apex oculi pupilla; producti dein intra oculum secundam efficient pyramidem ad fundum usque pertingentem, cujus basis fere similis basi exterioris. Jam vero quævis particula solida superficiei reflectentis est speculum quoddam minimum, quod exiguam tantum imaginis solis portionem repræsentare potest; situ autem irregulari fit, ut in corpore totidem specilla minima diversimode inclinata considerare debeamus, quot sunt particulæ solidæ reflectentes: ideoque etiam totidem diversi situs apparentes erunt cujusvis portionis imaginis solis. Unde necesse est, ut ad impressionem totalem, quæ per totam basin pyramidis luminosæ in oculo efformatæ fit, consequatur idea collectionis cujusdam particularum lucentium, figura huic basi simili circumscriptarum.

61. Quæ jam diximus, exemplo sequente clariora fient. Notum est, diametrum solis apparentem subtendere in superficie sphæræ cælestis angulum circiter 32 minutorum. Si itaque speculo plano soli obverso ejus imago versus oculum reflectatur, ea videbitur spatium satis magnum in speculo occupare. Supponamus dein hoc ipsum spatium speculi fere totum obtegi, exigua tantum portione relicta, in quam radii cadere possint. Evidens est *primo*, partem solummodo parvam imaginis solis, quæ prius tota videbatur, tum exhiberi posse. *Secundo* hanc ipsam portionem imaginis eadem apparituram figura, ac est spatium speculi non tectum. Idem prorsus contingeret, si loco speculi majoris usque ad exile spatiolum obtecti adhiberetur specillum exiguum, æquale ac simile parti apertæ majoris. Hoc posito, cogitemus, plura ejusmodi exigua specilla, quorum nullum integram solis imaginem exhibere possit, disponi ita, ut figuram quamlibet regularem, vel irregularem, hexagonam verbi gratia, referant, possintque singula partem imaginis solaris, quam repræsentant, versus oculum eundem reflectere (in sequentibus dicetur, debere ea in diversis planis collocari, ut id præstare possint); liquet, tot in hoc casu ab oculo videri partes imaginis solis, quot sunt specula, quæ omnes simul figuram lucidam efficient, dispositioni speculorum similem, uti hexagonam; & siquidem

vel

vel novum adjungeretur prioribus specillum, vel unum ex iis subtraheretur, etiam nova imaginis solaris portio adderetur, aut dispareret figura illa lucida eundem in modum mutata, quo figura speculorum.

62. Hinc etiam quisque facile videt, *Primo* specilla dicta ita disponi inter se posse, ut nullum inter portiones imaginis solaris sensibile intervallum advertatur, ac figura lucida, quam efformant, continua appareat, & nusquam interrupta. *Secundo* ut quodvis specillum nitidius, aut obscurius, ut politurae magis, minusve exactae fuerit, ita partem figurae, quam efformat, magis minusve fore fulgidam. *Tertio* Figuram hanc luminosam eandem debere in oculo facere impressionem, ac si radii directe e sole advenirent, ideoque ejusdem debere apparere coloris cum sole, hoc est, albi.

63. Quod si igitur superficies corporis, quae magnam radiorum solarium copiam, atque omnis generis, reflectit, quin plures ad sensum unius, quam alterius speciei absorbeat, consideretur, tanquam quae constet particulis solidis, totidem polyedra inter se separata referentibus, quorum plana sint specilla exigua, irregulariter collocata, atque diversimode inclinata; extra dubium est, quin tale corpus album debeat apparere, ac figurae consimilis imagini in oculo efformatae. Ut autem textura ejusmodi polyedrorum arctior, laxiorve fuerit, pluribus, paucioribusve inter ea relictis interstitiis obscuris; & plana magis minusve laevia, ut eorum situs tum respectu oculi, tum etiam solis opportunior; ita etiam albedo superficiei corporis magis, minusve nitida videbitur.

64. Ex allatis jam sequitur, in praesente hypothesi *illa corpora esse alba, quae radios omnis speciei inter se permistos ad nostros oculos reflectunt.*

65. Casus III. Si particulae solidae corporis talem situm respectu solis & oculi habeant, aut ejusmodi sint naturae, ut non nisi paucos radios versus oculum remittant, reliquis omnibus intra poros, vel interstitia sua absorptis, ibidemque per varia obstacula interceptis, ne ad oculum pertingere possint, nisi exiguo numero; oculus tam paucas portiones imaginis solis recipiet, ut vix perceptibilem impressionem faciant, aut saltem ut non faciant aliam, quam quae requiritur, ut advertatur, oculo objici quasdam particulas exiguum lumen reflectentes. Atque hinc ejusmodi corpus vel prorsus, vel prope est nobis inconspicuum, neque de ejus praesentia & figura idea haberetur, nisi objecta vicina tanto essent lucidiora, ut discrimen fieret manifestius. Id genus corpora nigra dicimus.

66. Ex dictis porro colligitur, in hac hypothesi *corpora illa esse nigra, quae aut nullos, aut paucos radios lucis reflectunt.*

67. Ca-

67. CASUS IV. Quando particulæ solidæ superficiem corporis constituentes ejusmodi sunt, ut omnes fere radios absorbeant, præterquam unius certæ speciei, quos propemodum omnes reflectunt, oculus, in quem incurrunt radii reflexi, recipiet tot portiones exiguas imaginis solis, quot sunt particulæ reflectentes, eruntque omnes ejusdem coloris, ut simul collectæ excitent ideam corporis præsentis certo colore præditi, quem natura radiorum determinat, atque ejus figuræ, quam situs harum exilium imaginum poscit.

68. Hinc autem apparet I, *corpora certo colore prædita esse illa, quæ fere omnes radios aliarum specierum absorbent, ac unius tantum reflectunt.*

69. II. *Colorum alterius alterum temperantium variationem dependere a radiorum diversæ speciei, qui reflectuntur, combinatione.*

70. III. *Corpus certo colore imbuere nihil aliud esse, quam vel ejus particulis, seu interioribus, seu tantum superficiem constituentibus alium situm, ac ordinem tribuere; vel in poros ejus materiam quandam extraneam inducere; vel ejus superficiem vernice oblinere; aut quavis simili ratione efficere, ut radii ab hoc corpore non nisi unius speciei reflectantur, aut certe ut una radiorum reflexorum species prædominetur.*

71. Si ad allatam hactenus visionis & colorum explicationem advertamus, illud etiam inferemus, quod *quævis lucis atomus secum ferat imaginem puncti illius luminosi, e quo emissa est.* Si radius flavus e sole veniens incidat in corpus rubrum, seu ita tinctum, ut rubrum appareat, non reflectetur, sed intra poros penetrabit, ac intercipietur, aut saltem non nisi ita detortus, & post varios flexus iterum emerget, ut ad oculum pertingere nequeat. At si idem radius in corpus flavum incurrat, inde reflectetur, quin in ejus interstitia penetret. Interim tamen hæc non tanto cum rigore accipi volumus, ut putetur nullus omnino radius flavus absorberi posse a corpore flavo, aut a rubro reflecti; verum id solum intelligimus, quod si fascis luminis ingenti numero radiorum, v. g. flavorum, constans incidat in corpus rubrum, valde pauci inde reflectendi sint, si conferantur cum reliquis, qui penetrant, vel absorpti exstinguuntur.

ARTICULUS V.

De ideis, quæ ex visu in anima nostra consequuntur.

72. Diximus, figuram, & præsentiam objectorum a nobis non aliter percipi, quam per impressionem, quam eorum imagines, cum in fundo oculi depinguntur, faciunt; quin nec eo-

rum magnitudinem, ſitum, motum, & diſtantiam aliunde advertimus, quam ex impreſſionum ejusmodi diverſa indole, aut e judiciis quibusdam, quibus aſſuevimus, etſi perſæpe falſis, & per rectum ratiocinium corrigendis.

73. Eſt quædam viſus noſtri habitudo & facilitas ad certum intervallum ſeſe extendens, ad quod ſcilicet res externas tum quando verſamur cum aliis, tum in reliquis noſtris negotiis conſpicere ſolemus. Hunc diſtantiæ modum cum objecta habent, quamvis eorum imaginum dimenſiones in noſtris oculis admodum mutentur, iis paullo propius admotis, vel recedentibus; nos tamen haud advertimus ullam magnitudinis variationem. At vero quando objecta ultra eum terminum ſunt poſita, ea tanto minora nobis apparent, quanto ab iisdem longius abſumus, & ex oppoſito. In exemplo: ſi ſucceſſive ab eodem homine ad intervallum 2, 4, & 6 pedum recedam, extra dubium eſt (Elem. 415), dimenſiones ejus imaginis fore proxime inter ſe ut 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, conſequenter ejus magnitudo eadem ratione decreſcere deberet, de qua ſcilicet judicium ferendum non eſt, niſi dependenter ab imagine in oculo expreſſa. Interim tamen ejusmodi diminutionem haud advertere ſolemus. Atque ut pateat, id non aliunde, quam a dicta jam habitudine provenire, ſatis erit, ſi conſideremus, magnitudinem hominis ad 120 pedes in eadem, in qua nos ſumus, planitie diſtantis nobis haud videri ad tantam reduci exilitatem, cujus tamen eadem appareret, ſi ad pedem turris centum viginti pedes altæ conſtituti eundem hominem in turris vertice videremus. Id, quod non alia ex cauſa accidit, quam quod præter uſum ſit, oculos ad tantam altitudinem fere ad perpendiculum attollere, quando alias cum hominibus verſamur, neque id genus diſtantias experientia crebriore cognitas habeamus: ideoque haud amplius e familiari nobis videndi ratione judicare poſſumus, ſed magnitudinem objectorum apparentem præcipue ex imaginibus efformatis in oculo metimur.

74. Quando itaque objectum ad eam diſtantiam conſiſtit, cui oculus jam aſſuevit, videtur, quod de ejus magnitudine & intervallo interjecto non aliunde judicemus, quam e notitia uſu longo hauſta dimenſionum rerum ceterarum inter oculum & objectum poſitarum, neque tum imaginum in oculo efformatarum diverſas extenſiones attendamus, ſeu quod idem eſt, nullam habeamus rationem angulorum, ſub quibus objectum apparet. Sed extra hanc diſtantiam, aut ſi interpoſitum obſtaculum rerum interjacentium conſpectum nobis eripiat, uti ſi objectum per teleſcopium videatur, vel microſcopium, aut ſaltem per exiguum foramellum

in

in plano opaco factum; magnitudo & distantia objecti apparens videtur dependere a dimensionibus ejus imaginis in nostro oculo, ita ut si hæc augeatur minuaturve artificio quovis optico, ipsum objectum, licet immotum, appareat magnitudine & distantia mutata; auctum vel imminutum; accedere, vel recedere, quemadmodum in sequente articulo exponetur.

75. Quod ex D. Chesselden, celebri Anatomico Anglo, narrat Smithius, dictis lucem affundet. Ostendit Chesselden, ab iis, quorum oculi vera cataracta laborant, nihilominus discerni posse inter noctem & diem, inter corpora nigra, alba, & intense rubra, cum sufficienter illuminantur, quin tamen figuram eorum dignoscant; tum narrat, se puero tredecim annos nato simili cataracta laboranti oculos consanasse; sed hunc oculorum usum adeptum haud potuisse amplius colorata illa corpora noscere, cum proponerentur, erroneis ideis, quas prius sibi efformarat, ad id non sufficientibus. Ea, quæ antea etiam de nomine norat, cum videret, revera esse eadem, vix credebat. Cum distincte cernere cœpisset, adeo non poterat de objectorum distantia judicium ferre, ut omnia oculis contigua putaret: inter se, & cubiculi parietes intervallum aliquod interesse, res ei erat conceptu difficillima. Omnia apparebant ei sub initium ultra modum grandia: capere non potuit, qua ratione tota domus esset suo cubiculo major, licet perbene intelligeret, hoc illius partem esse. De corporum figura, & mole prorsus diversorum discrimine, nihil certi poterat statuere; neque sciebat, quid esset, quo in rerum aspectu se tantopere affici advertebat. Cum imagines coloribus expressæ exhiberentur, tum vero perplexa videbantur omnia: duorum mensium spatio opus erat, donec comprehenderet, non nisi repræsentationem corporum solidorum per eas haberi. Oculos sub initium versus objecta non dirigebat; imo ut hoc faceret, paullatim & longiore tempore assuescere debuit.

Atque hæc facile cuivis persuadebunt, nequivisse puerum de distantia, & figura corporum judicium ferre, nisi postquam sæpius advertit, imo postquam habitudinem id advertendi contraxit, quod non solum diversitas quædam esset in impressionibus ex mutata figura & situ imaginum in oculis depictarum, sed etiam certa quædam relatio cum ideis ad motus organi tactus excitatis. Oculos versus objecta dirigere haud antea didicit, quam experiretur, hanc ipsam idearum congruentiam esse tum maxime luculentam, cum oculus certum situm respectu objectorum haberet. Denique quisque videt, eum non ante videndi usum ceteris communem obtinuisse, nisi assuetudine contracta dijudicandi quam promptissime, qua ratione id, quod oculum afficeret, in reliquos sensus esset acturum.

ARTICULUS VI.

Varia phænomena objectorum procul visorum.

76. *Angulus opticus* est, quem in pupilla efficiunt radii ab extimis dimensionis objecti punctis venientes.

77. PROPOSITIO I. *Objecta sive æqualia, sive inæqualia, sub eodem angulo visa apparent æqualia*, nisi scilicet aliud adsit, quod in casu peculiari phænomenon mutet.

Etenim ceteris omnibus paribus de æqualitate vel inæqualitate objectorum non aliunde judicare possumus, quam ex imaginibus in oculo formatis: jam vero si duorum objectorum quorumvis dimensiones ad pupillam eundem subtendunt angulum, imagines in oculo æquales efformari debent; videbuntur igitur æqualia.

78. PROPOSITIO II. *Objecta similiter oculo obversa ea ratione videntur minui, qua ab oculo recedunt.*

Nam dimensio quævis objecti est basis constans trianguli, cujus latera sunt distantiæ utriusque extremi ab oculo; quod si jam hæc latera augeantur, anguli quoque iis oppositi crescunt, ideoque (Elem. 495) angulus ad oculum, lateri constanti oppositus, decrescit, minoresque semper imagines in oculo formantur.

79. COROLL. I. *Magnitudines apparentes, sive anguli optici objectorum, sunt in ratione reciproca distantiarum ab oculo, quando hi anguli sunt exigui.*

80. COROLL. II. *Partes æquales objecti valde magni, & extra distantiam, ad quam res alias spectare solemus, apparent inæquales.* Partes enim remotiores ab oculo, minorem debent angulum opticum subtendere; & ex opposito.

81. COROLL. III. *Fieri potest, ut pars objecti minor, major appareat, quam altera, quæ in se major est.* Nempe si ita objiciatur oculo, ut angulum opticum majorem subtendat.

82. PROPOS. III. *Lineæ parallelæ ad magnam distantiam productæ, videntur concurrere, & extremis suis angulum efficere.*

Nam lineæ intervallum parallelarum metientes, quod semper idem est, angulos opticos semper minores subtendunt, & tandem insensibiles, cum ad distantiam quodammodo infinitam perventum est: igitur versus extrema intervallum inter parallelas nullum apparet, & parallelæ videntur concurrere.

83. OBSERVA. Hinc manifestum fit, *primo*, *cur turris admodum alta videatur versus illum propendere, qui ejus verticem ex pede spectat.* Si enim turris est ad perpendiculum erecta, spectator eam refert ad perpendiculum, quod per ejus oculum transit. Hæc duo perpendicula inter se parallela videntur convergere: igitur murus perpendicularis turris in majore altitudine ad perpendiculum per ocu-

lum ductum accedit, ideoque inclinari versus spectatorem videtur velut in eum ruiturus. *Secundo, cur maris superficies eo altius attolli videatur, quo longius a littore distat, & quo magis editus est locus, e quo spectatur.* Eadem hujus est ratio. Nam maris superficies ad libellam composita, refertur ad lineam libellæ, sive horizontalem, per oculum transeuntem; ambæ, cum sint parallelæ, videntur eo magis convergere, quo ab oculo fiunt remotiores: crescit autem hæc distantia, quo longius maris aspectus patet; hicque patet eo longius, quo in altiore loco spectator consistit. *Tertio, cur in longioribus porticibus & ambulacris lacunar videatur deprimi, & pavimentum attolli.* Rursus enim lineas libellæ tam lacunaris, quam pavimenti cum horizontali per oculum ducta comparamus, quæ illa inferior, hac superior est. *Quarto, cur quando prope murum longiorem, vel seriem continuam arborum viam facimus, ea, quæ ad dextram sita apparent, videantur versus sinistram accedere: aut si utrinque sit murus, vel arborum series, cur semper longius a se se videantur recedere, quo propius accedimus? &c.*

84. Coroll. Linea libellæ per oculum transiens, v. g. coronæ murorum, semper talis apparet, utcunque objiciatur oculo; aliæ vero omnes, seu supra hanc, seu infra eam ductæ, ad horizontem inclinatæ videntur.

85. Propos. IV. *Figura objecti apparens dependet a situ punctorum, quæ ad oculum radios emittere possunt.* Patet per se.

86. Coroll. I. *Linea recta ita posita, ut producta per centrum pupillæ ad oculi superficiem esset perpendicularis, instar puncti apparet.* A nullo enim ejus puncto, nisi extremo, radius ad oculum venire potest.

87. Coroll. II. *Planum ita situm, ut axis oculi productus in eodem perpetuo maneret, debet tanquam linea videri.*

Sola enim perimetri pars oculo obversa in eundem radios emittere potest.

88. Coroll. III. *Solidum, cujus unicum tantum planum oculo objicitur, non aliter ac mera superficies apparet.*

89. Propositio V. *Si oculus sit in eodem plano cum linea admodum longa, & ad magnam distantiam descripta; ea, sive regularis sit, sive irregularis, apparet ut arcus circuli, cujus centrum oculus occupat.*

Quoniam puncta G, F, A, B, C, D, E, (fig. 5) curvæ irregularis sunt in plano per oculum transeunte, & extra distantiam, ad quam objecta considerare assuevit, discernere nequit, quænam eorum sint aliis viciniora. Pariter differentiam rectarum OP, & OD haud distinguit, utpote quæ exigua est, si cum alterutra harum linearum conferatur. Itaque cum nullum ei suppetat medium de inæqualitate horum radiorum judicandi, eo connaturaliter propendet, ut eos æquales credat. Idem est de reliquis. Quare se in

centro circuli exiſtimabit, in cujus circumferentia omnia illa puncta ſint poſita.

90. OBSERVA. Si differentiæ radiorum eſſent admodum magnæ, partes viciniores ſive ex vivacitate luminis, ſive ex magnitudine apparente dignoſci poſſent. Et ſi oculus haberet magnam diſtantiam a plano curvæ, itidem ejus inæqualitates diſcerneret; nam cum lineæ D P, B L, F I non ſint infinite parvæ relate ad O D, O B, O F, & ipſo ſitu directius viſui exponerentur, ſenſibiles evaderent.

91. *Linea irregularis parva procul viſa, ut* A B C D E, *inſtar rectæ apparere debet.* Quoniam ſcilicet videtur tanquam arcus circuli paucorum graduum.

92. Hinc eſt *primo*, quod quis in magna planitie variis anfractibus terminata conſtitutus ſe putet eſſe in centro circuli. *Secundo* quod talis, etſi ſemper progrediatur, nullum ſpatium ſe confeciſſe arbitretur; quod nempe ſe adhuc in centro conſtitutum videat. *Tertio* quod cælum inſtar ſphæræ cavæ appareat, in cujus axe ſit oculus poſitus, & aſtra ejus ſuperficiei inhæreant. *Quarto* quod urbes majores, ſylvæ latæ in formam amphitheatri flexæ videantur, quando procul conſpiciuntur. *Quinto* quod ſphæræ admodum diſſitæ, ut ſol, luna, tanquam mera ſuperficies circularis plana appareant. *Sexto* quod polyedrum variis areolis planis terminatum ad diſtantiam mediocrem inſtar globi, ad magnam autem diſtantiam ut circulus videatur. *Septimo* quod turris quadrangularis, vel polygona rotundæ, aut etiam planæ ſpeciem e majore intervallo exhibeat. *Octavo* quod non advertatur motus in globo circa axem æquabiliter rotato etiam in diſtantia parva, niſi quibusdam maculis ſit notatus, & motus lentior.

93. PROPOSITIO VI. *Si oculus conſtituatur in axe polygoni regularis perpendiculariter per ejus centrum tranſeunte, polygonum advertit eſſe regulare; ſed ſi ponatur extra hunc axem, polygonum videbitur illi irregulare.*

Oculo in axe conſtituto, radii ex ſingulis polygoni angulis ad eum ducti efficiunt pyramidem baſis regularis, cujus conſequenter omnes anguli plani angulum ſolidum ad verticem conſtituentes inter ſe æquantur, uti etiam omnia plana pyramidem efformantia. Itaque latera polygoni ab oculo ſub æqualibus angulis, & ſimiliter poſita videntur. At ſi oculus ſit extra axem, latera æqualia polygoni inæqualiter ab oculo diſtant, ideoque apparent inæqualia, nec eodem modo collocata.

94. COROLL. *Polygonum regulare oblique viſum apparet oblongum; & circulus inſtar figuræ ovalis.* Partes enim remotiores videntur minores, magisque contractæ; viciniores autem majores, & latiores; igitur diagonales aliæ apparent majores, aliæ minores.

95. Observa. Perſpectivæ eſt, phænomena ſuperioribus propoſitionibus expoſita Geometrice determinare.

96. Propositio VII. *Objecta in regione circumſita aſpectui noſtro expoſita videntur eo obſcuriora, magisque confuſa, quo remotiora ſunt. Quo autem nobis propiora ſunt, eo vivacioribus coloribus, magisque diſtincta apparent.*

Præcipua hujus phænomeni ratio eſt, quod viſio diſtincta, & colorum vivacitas dependeat ab intenſitate luminis, quæ, quo objectum remotius eſt, eo magis minuitur ex interjecto aere craſſiore inter objectum & oculum.

97. Inde fit *primo*, ut objecta magis in edito collocata, ut quæ in vertice altiorum montium ſunt, longe diſtinctius videantur, quam quæ ad eorum radicem ſunt poſita, quod aer ſubtilior, & a vaporibus purior ſit in ejusmodi altitudine, quam in locis humilioribus. *Secundo*, ut pictores colores clariores, & illuſtriores obſcurioribus, & languidioribus rite temperando efficere poſſint, ut corpora depicta extra tabulam emineant, & ſolidi ſpeciem referant.

98. Propositio VIII. *Objecta obſcura & confuſa, ſimul etiam ceteris remotiora apparent.*

Ratio eſt, quod cum remota non niſi obſcura & confuſa videre ſoleamus, etiam illa judicemus remota, quæ horum more apparent.

99. Observa. Si quavis ratione contingat, ut objectum extra limites collocatum, intra quos de corporum magnitudine ex uſu judicare poſſumus, attamen ejus molis, cui videndæ alias aſſuevimus, reddatur ſolummodo obſcurius, & magis confuſum; illico etiam remotius, quam ſit, putabimus. Et quia manſit in eadem diſtantia, adeoque in oculo noſtro imago imminuta non eſt, exiſtimamus objectum fuiſſe majus factum.

100. Ex his pronum erit rationem reddere, *primo* cur noctu ignis lucidior appareat propior, ac vere ſit. *Secundo*, cur phantaſmata, quæ per tenebras ſibi quidam effingunt, & ipſa vera objecta, noctu iter facientibus prope occurrentia, uti vicinæ arbores, domus &c, videantur remotiora, quam ſint. *Tertio*, cur cælum inſtar fornicis aliquantum depreſſi ſuperne ſubſidere intuentibus putetur. Nempe luce ſtellarum horizonti viciniorum decreſcente (20), eas magis diſtare exiſtimamus, quæ ad horizontem propiores ſunt. Hinc experimur, diſtantiam apparentem oculi ab horizonte, eſſe fere triplam diſtantiæ ejusdem a zenith. Colligimus hanc cæli depreſſionem ex eo, quod dum oculi judicio punctum cæli inter zenith & horizontem medium deſignare volumus, illud ad 23 vel 24 gradum altitudinis referamus, cum tamen, ſi cælum hemiſphærii formam referret, ad 45 gradum ſupra horizontem

idem

idem punctum designandum foret. *Quarto* cur sol & luna, cum nudo oculo in ortu suo spectantur, longe majores appareant, eaque ratione decrescant, qua altius supra horizontem ascendunt; licet si eorum diametri instrumentis Astronomicis explorentur, contrarium detegatur. Sit enim AE (Fig. 6) horizon, O locus observatoris; sol in diversa altitudine designetur per BC, DH, FG; superficies apparens cæli sit AMRE. Evidens est, solem in quocunque loco circuli AHGE constitutum, exhibere diametrum sub angulis ad centrum O æqualibus BOC, DOH, FOG: at quia figura cæli depressior apparet, sol cum est in BC, videtur in KI; cum hæret in DH, vel FG, putatur esse in PN vel TS: hinc licet sub iisdem videatur angulis, IOK, PON, TOS; minor tamen creditur, utpote vicinior oculo.

101. PROPOSITIO IX. *Objecta eo remotiora, & majora apparent, quo major aliorum numerus, ampliusque in plano spatium inter ea & oculum interjacet; & ex opposito tanto videntur propiora & minora, quanto pauciora alia corpora, & angustius loci spatium inter oculum & objecta intercedit.*

Amplitudo enim spatii intercedentis, ac objectorum aliorum numerus speciem magnæ distantiæ exhibent, ideoque fallitur oculus, ut corporibus justo majorem molem tribuat; & ex opposito.

102. Hæc causa est *primo*, cur horizon usque ad cæli superficiem procurrere videatur, utpote cum nullum intermedium corpus appareat. *Secundo*, Cur si quis in planitie constitutus inter oculum & objecta alia interjectam vallem cernere nequeat, ea sibi longe viciniora arbitretur; & distantiam non advertat, nisi jam prope vallem conspicuam positus. *Tertio*, Cur vesperi objecta paullo in edito collocata, & visui recte exposita, admodum dissita, & magna existimentur. Cum enim per tenebras non liceat ex interjecto spatio de distantia eorum judicium ferre, ad extremum horizontem ea referimus, ideoque etiam valde magna putamus.

103. PROPOSITIO X. *Si duo objecta inæqualiter ab oculo remota, percurrant spatia temporibus æqualibus æqualia, & parallela, id, quod remotius est, videbitur tardius moveri altero.*

Patet; nam spatium descriptum a remotiore minorem angulum ad oculum subtendit.

104. OBSERVA. Si directiones mobilium non sint parallelæ, fieri potest, ut vicinius appareat tardius moveri remotiore, etsi plus reipsa spatii eodem tempore percurrat, quam alterum. Nempe possunt hæc spatia ita obliqua esse posita respectu oculi, ut minorem angulum radii ab eorum extremis ducti efficiant, quam sit angulus subtensus a spatiis minoribus remotioris mobilis, sed magis directe oculo objectis.

105. PRO-

105. Propositio. XI. *Objectum quavis celeritate motum, ſi deſcribat ſingulis ſecundis ſpatium, quod in oculo angulum non majorem 15 vel 20 ſecundis ſubtendit, immotum videtur.*

Conſtat experientia, cum aſtra nudo oculo nullum motum ſenſibilem habere videantur, licet plura eorum tempore minuti ſecundi deſcribant ſpatium angulum 15 ſecundorum ſubtendens.

Hinc eſt, quod in horologiis portatilibus motus indicis per circulum horarium, imo etiam alterius circulum minutorum percurrentis, ſit inſenſibilis.

106. Observa. Ratio ſpatii percurſi a mobili ad diſtantiam ejusdem ab oculo, quando motus eſt inſenſibilis, cenſeri poteſt 1 ad 1200; hoc eſt, ſi corpus tempore unius ſecundi non deſcribat plus, quam $\frac{1}{1200}$ ſuæ diſtantiæ ab oculo, immotum apparet, quia tum illud ſpatium non ſubtendit angulum majorem, quam 17 ſecundorum & 12 tertiorum.

107. Ex oppoſito, *ſi objectum moveatur celeritate ſumma, uti glans plumbea e catapulta ferrea vi pulveris nitrati ejecta, videri nequit.* Nullibi enim tamdiu moratur, ut viſus illic figi poſſet, & objectum percipere.

108. Propositio. XII. *Duo aut plura objecta eadem velocitate apparente & directione mota, ſi referantur ad aliud immotum, quieſcere videntur; objectum vero quieſcens directione oppoſita, & celeritate eadem moveri apparet, qua reipſa alia moventur.*

Nam Duo aut plura objecta eadem directione, & velocitate apparente lata inter ſe ſitum non mutant; ſed quia motu ſuo vero alium ſemper ſitum reſpectu objecti immoti acquirunt, & ad alias ſucceſſive, aliasque hujus partes referuntur, videtur iſtud moveri in partem oppoſitam, & celeritate eadem.

109. Hinc pendet *Primo*, quod curru vel navi vectus ſe credat ſemper in eodem loco manere, & objecta vicina in partem oppoſitam moveri. Hæc oculorum fallacia eo eſt efficacior, quo navis major eſt: tunc enim navis partes, magno numero, & variis diſtantiis ſpectatorem ambientes, cujus reſpectu eundem ſemper ſitum retinent, haud poſſunt videri locum mutare, vel moveri. Et certe ſi ſpectator immoto perſtet capite, imagines partium navis in ejus oculo locum non mutant, ſed in eisdem ſemper ſpatiis depinguntur, ideoque non ſolum partes navis immotæ apparere debent, ſed etiam aptiſſimæ, ad quas alia objecta referantur, ut, an moveantur, an quieſcant, exploretur. Jam vero ob motum verum navis fieri debet, ut objecta extra navem immota omni momento ſitum & diſtantiam ab oculo ſpectatoris mutent: igi-

tur eorum imagines diverſa ſpatia in oculo ſucceſſive percurrunt, ut adeo totus motus navis illis videatur tribuendus.

110. Simili illuſione fit, quod nobis perſuadeamus, ſolem & omnia ſydera intra 24 horas circa tellurem moveri, & quod revolutio annua ſolis reipſa circa terram fiat.

111. *Secundo*, quod cum nubes magna celeritate feruntur, luna velociſſime videatur in partem oppoſitam moveri, & nubes absque motu hærere in eodem loco. Hæ quippe ſimul eadem directione, & celeritate progrediuntur.

112. PROBLEMA. *Datis poſitione loco ſpectatoris* S (figur. 7), *in quo ſe putat quieſcere; quotcunque punctis* A, B, C *ſpatii veri mobilis in plano quovis progredientis; & totidem punctis* a, b, c, *ad quæ ſpectator iisdem momentis pervenit, determinare viam apparentem mobilis.*

Ductis rectis A*a*, B*b*, C*c*, fiant his parallelæ & æquales Sα, Sβ, Sγ omnes per punctum S transeuntes; erunt α, β, γ, puncta, per quæ ſemita apparens mobilis ducenda eſt. Nam cum v. g. recta Sα ſit æqualis & parallela rectæ A*a*, punctum α reſpectu S eundem ſitum habet, ac punctum A reſpectu *a*. Igitur ſpectator, ſe in S poſitum credens, exiſtimare debet, mobile eſſe in α. Idem eſt de reliquis punctis β, γ &c.

113. COROLL. I. *Locus verus, & locus putatitius oculi; locus verus & locus apparens objecti ſemper ſunt in angulis parallelogrammi.* Locus verus objecti, & locus putatitius oculi, ſemper ſunt in angulis oppoſitis; locus apparens objecti, & locus verus oculi ſunt in reliquis duobus angulis oppoſitis. Hinc *objectum ſemper apparet oppoſitum loco vero oculi ſpectatoris.*

114. COROLL. II. *Si objectum ſit immobile in* A, *ejus ſemita apparens* $\alpha\beta\gamma$ (fig. 8) *eſt æqualis ſemitæ veræ oculi, & in plano parallelo.*

Quoniam αa, βb, γc ſunt parallelogramma, quorum S A eſt diagonalis communis, ſimulque interſectio communis planorum eorum, baſibus S*a*, S*b*, S*c*, in eodem plano exiſtentibus, in quo ſcilicet eſt ſemita vera oculi; etiam his parallelæ & æquales Aα, Aβ, Aγ debent in eodem plano ad planum ſemitæ oculi parallelo exiſtere, angulosque αAβ, βAγ, æquales angulis *a*S*b*, *b*S*c* efficere. Ergo puncta α, β, γ ſunt in linea æquali lineæ *a b c*, & in plano parallelo, ſed ſitu inverſo. Si vero objectum ſit in eodem plano cum ſemita oculi, etiam ejus ſemita apparens in eodem erit.

115. COROLL. III. *Si objectum quieſcat in loco putatitio oculi ſpectatoris, ab eo refertur ad extremum radii æqualis & in directum jacentis radio ex vero loco oculi ad ejus locum putatitium ducto.*

Itaque ſi ſpectator moveatur in circulo, cujus centrum ab objecto occupatur, eſtque ſpectatoris locus putatitius; videtur ob-

jectum

jectum eundem circulum deſcribere, ſed ſemper in punctis peripheriæ illis diametraliter oppoſitis verſari, in quibus eſt ſpectator, ideoque eadem moveri velocitate, ac reipſa oculus ſpectatoris movetur.

116. Observa. Corpora terreſtria nos undique ambientia, ac noſtri reſpectu quieſcentia, quamvis reipſa una nobiſcum circa ſolem volvantur, ita hac ſpecie nobis illudunt, ut nos credamus in centro univerſi immobiles, ſolemque circa nos agi, licet is in ſe quieſcat; Planetas item circa ſolem latos percurrere curvas mire flexas, ut jam in ortum, jam in occaſum progrediantur, etſi de ſe non niſi ab occaſu in ortum moveantur. Ope Problematis præcedentis omnes hi motus apparentes in plano deſcripti exhiberi poſſunt. Si enim fiant duo circuli concentrici, quorum alter exhibeat orbitam Telluris, alter orbitam alterius planetæ, exempli causa, Jovis; ſintque radii horum circulorum proportionales diſtantiis ſolis a terra, & Jove, hoc eſt circiter ut 1 & 5; & denique peripheriæ circulorum dividantur, in ratione celeritatum terræ & planetæ, in caſu noſtro ſcilicet 12 ad 1, ita ut v. g. circulus orbitæ terræ reſpondens dividatur in gradus duodenos; alter, qui orbitam Jovis exprimit, in ſingulos; ſi, inquam, his ita conſtructis, notentur in circulo telluris diviſionum puncta ſucceſſiva *a*, *b*, *c*, &c, hiſque totidem correſpondentia in circulo Jovis A, B, C, &c (initio, a quo libuerit, ſumpto), centro eorum communi S; facile erit omnia puncta curvæ apparentis a Jove deſcribendæ determinare, atque ex iis omnium mirarum illarum variationum rationem reddere.

117. Propositio. XIII. *Imagines ejusdem objecti, ſi in fundo utriusque oculi non depingantur ad partes homologas, exhibent objectum duplicatum.*

Quod objectum, etſi duobus oculis ſpectatum, ſimplex appareat, non aliunde pendet, niſi quod utraque impreſſio in fibras homologas, & æqualiter tenſas utriusque oculi ad ſenſum eadem ſit; ſive, quod plurimis experimentis congruit, quod anima non niſi ad unam e duabus æqualibus & ſimultaneis impreſſionibus advertat. Quod ſi igitur impreſſiones per imagines in partibus diverſis oculorum depictas fiant in fibras inæquales, & non homologas, ipſæ impreſſiones jam diverſæ ſunt, ideoque tales, ut duplicis objecti idea conſequatur.

118. Observa. Imago in utroque oculo depingitur in fibris homologis, quando objectum videtur per radios ad ſenſum parallelos, ſive quando uterque oculus eodem modo verſus objectum dirigitur. Hinc accidit, ut objectum nimis admotum oculis appareat duplicatum, quod nempe axes optici nimium inclinari debeant,

 beant,

beant, ut objectum utroque oculo videri possit; & sinistro quidem apparebit ad partem dextram, dextro ad sinistram, quia hæc est eorum axium inclinatio. Idem fit, si alia quavis ratione oculi distorqueantur. Ebrii sæpe objecta duplicata vident, fibris & musculis omnibus ita laxatis, ut motus æquales non recipiant; hinc oculos nequeunt eodem modo versus objecta dirigere. Patebit hoc manifeste, si eorum oculi attentius considerentur.

119. In vehementioribus commotionibus, dum quis affectuum impetu, v. g. ira abripitur; item hominibus furiosis, quandoque objecta duplicata apparent, cum tunc liberum non sit, oculos, ut convenit, in ea dirigere.

PARS SECUNDA

Complectens Catoptricam, & Dioptricam.

Caput I.

Notiones Generales Catoptricæ, & Dioptricæ.

Articulus Primus.

De imaginibus & focis.

120. Quoniam summa est atomorum lucis exilitas, fieri sane nequit, ut unius, paucorumve radiorum impressionem in organum visus, cujus fibræ cum lucis radiis comparatæ rudes admodum sunt, & crassæ, percipiamus. Majore itaque radiorum numero ex eadem superficiei corporis parte digredientium opus est, ut ea nobis visibilis reddatur. Verum quia radii ex eodem puncto dimanantes continuo a sese invicem divergunt (8), excogitanda fuerunt media, quibus secum iterum conjungi, in puncto quovis dato uniri, quin etiam, ut libuerit, dispergi possent. Atque de hisce adminiculis Dioptrica, Catoptricaque agit; de vitris, inquam, & speculis, quæ eum in finem adhibet.

121. Ope itaque vitrorum, speculorumque ingens radiorum numerus ab objecti parte quavis egressorum, in eodem iterum ad sensum puncto uniri possunt: & cum quisque radius imaginem puncti illius, e quo emanat, secum deferat (71); omnes ad idem collecti spatium imaginem partis objecti, unde emissi sunt, efforment, necesse est, eo quidem vivaciorem, quo major radiorum copia coacta fuerit; eo accuratiorem, magisque distinctam, quo ordo idem, dum colliguntur, servatus fuerit exactius, quem in

digres-

digressu ab objecto tenuerunt. Est hæc imago adeo luculenta, ut si planum quodpiam læve & candidum eo in loco, in quo radiorum unio fit, constituatur, suis accurate distincta coloribus appareat, maxime, si dum experimentum capitur, luci cuivis alteri aditus negetur.

122. Punctum illud, in quod ope vitri, speculive luminis radii coguntur, *focus* vitri, aut speculi vocatur; & siquidem vera fiat radiorum collectio, *focus realis*, aut citra additum, *focus* nuncupatur, estque locus, in quo imago objecti lucem emittentis effingitur, ipsumque apparet objectum esse, si plures radii, postquam per focum decussatim transierunt, in oculum incidant. At vero si punctum illud tale modo sit, ad quod, dispersis per vitrum aut speculum radiis, nova eorum directio tendat, *focus imaginarius* appellatur, illicque etiam tunc objectum consistere videtur, si major radiorum dispersorum vis oculum subeat, quæ objecti imaginem satis sensibilem efformet: quippe illic universim objectum existere putatur, unde ejus radii ad nostrum oculum venire videntur (58, & 48).

123. Quod si vero quivis radius imaginem objecti, e quo emanat, secum deferat, sequitur, quod *si radii, postquam semel collecti sese secuerunt, ac in concursu suo imaginem depinxerunt, postea seu refractione, seu reflexione quapiam uniti rursus fuerint, denuo imaginem efforment, ac sic deinceps, quamdiu eorum inter sese ordo non fuerit perturbatus.* Igitur tot ejusdem objecti imagines fieri possunt, quoties radii ab eo emissi citra confusionem iterum possunt colligi.

124. Illud etiam deducitur, quod *quando solum de via radiorum luminosorum agitur, imago vicem objecti subire possit, & objectum vicem imaginis; quin etiam secundæ imaginis respectu prima tanquam ejus causa productrix haberi possit, ac sic de reliquis.*

125. Si radii in fasce luminoso ad sese invicem inclinentur, *convergentes* aut *divergentes* dicuntur, prout scilicet sive discessus eorum a puncto quopiam unionis, sive congressus consideratur. E quo liquet, focum esse in ipso transitu a convergentia ad divergentiam, & vicissim.

ARTICULUS II.

Leges & principia ab experientia deducta, quæ demonstrationibus in Dioptrica & Catoptrica fundamentum præbent.

126. Lex I. *Quivis lucis radius per medium quodpiam propagatus, dum in aliud diversæ densitatis aut naturæ incurrit, directionem mutat: Si*

novum illud medium penetrare nequeat, in superficie reflectitur; si penetrat, in ingressu frangitur, sive refringitur.

Sit A C (fig. 9) radius, ex aere in superficiem P Q crystalli, aut vitri solidi P S incidens. E puncto C, in quo radius A C in novum hoc medium incurrit, & quod propterea *punctum incidentiæ* dicitur, erigatur perpendicularis M D ad vitri superficiem (vocatur ea nonnunquam cathetus incidentiæ; angulus vero A C M, sive æqualis D C B est angulus incidentiæ). Quod si *radius incidens* A C offendat in aliquod obstaculum aditum in vitrum prohibens, mutata directione reflectitur, viamque C I tenet; tumque angulus M C I vocatur *angulus reflexionis*: verum si radius incidens A C vitrum penetrarit, deserta priore directione C B deviat, & novam C T sequitur. Atque in hoc casu angulus D C T dicitur *angulus refractus*; C T *radius fractus*, vel *refractus*; B E *sinus anguli incidentiæ*; & T H *sinus anguli refracti*.

127. Lex II. *Si punctum lucidum, postquam in occursu diversorum mediorum & superficierum diversimode reflexum, refractum, aut inflexum est (uti scilicet mediorum & superficierum occurrentium natura & positio exigit), tandem in obstaculum offendat, quod ei directionem præcise oppositam impertit, eadem accurate via, & celeritate, qua advenerat, regreditur.*

Sic radius T C per vitrum P S propagatus, dum in ejus superficiem P Q incurrit, via C A egreditur; sive, quod eodem recidit, si radius A C, refractus sit in C T, & ex T directione T C repellatur, e vitro directione C A exit.

128. Lex III. *Angulus reflexionis aut refractionis est in eodem plano cum angulo incidentiæ, estque hoc planum ad superficiem medii perpendiculare.* Etenim ejus positio per Cathetum incidentiæ, quæ ad superficiem medii perpendicularis est, determinatur.

129. Lex IV. *Sinus anguli reflexionis aut refractionis alicujus radii est in ratione constante cum sinu sui anguli incidentiæ.*

In reflexione ea ratio est æqualitatis: & consentientibus omnibus experimentis, differentia nulla est, quæ percipi posset.

130. Quando lux ex aere in aquam pluviam transit, ratio sinus anguli refracti ad sinum anguli incidentiæ proxime est, ut 3 ad 4, aut accuratius, ut 3 ad 4,0076; dum ex aere in vitrum incidit, ut 2 ad 3, vel accuratius ut 20 ad 31; dum e vitro in aquam propagatur, ut 9 ad 8 * &c, & viciffim ratio sinus anguli refracti ad sinum anguli incidentiæ est in transitu ex aqua in aerem, ut 4 ad 3; e vitro in aerem, ut 3 ad 2 &c.

131 Co-

* Newton. Opt. L. I. part. II. Prop. III. Exper. VIII. rationem anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis suæ ponit ut 80 ad 93; hinc typothetis numerorum 8 & 9 transpositio in exemplari Gallico adscribenda.

131. COROLL. I. *Si radius incidens sit perpendicularis ad superficiem medii, in quod incurrit; vel in se ipsum reflectitur, vel medium sine refractione transit.* Cum enim tunc sinus anguli incidentiæ sit = o, sinus anguli reflexionis, aut refractionis pariter est =o; aut, quod idem est, radius tum cum catheto incidentiæ congruit.

132. COROLLARIUM II. *Sub quocunque angulo incidentiæ radius occurrat alicui medio luci alias pervio, semper sub eodem reflecti potest, siquidem in casu particulari illud penetrare nequeat; verum quando juxta naturam medii sinus anguli incidentiæ debet minor esse sinu anguli refracti, radius non semper potest medium, facta refractione, penetrare;* aut, quod idem est, *in angulis incidentiæ certi dantur limites, ultra quos radius refringi nequit, consequenter nec exire e medio, in quo propagatur, ut in alterum, cui occurrit, transeat.*

Etenim si lux ex aere in superficiem aquæ incidat sub angulo fere 90°, angulus refractionis erit proxime 48° $\frac{1}{2}$, sinu toto, aut incidentiæ, ad sinum anguli refracti existente tunc ut 4 ad 3, quæ ratio angulum refractum præbet 48° $\frac{1}{2}$ circiter: itaque si ex opposito radius ex aqua in aerem transire debeat sub angulo incidentiæ 48° $\frac{1}{2}$, is ex aqua egressus debebit ejusdem superficiem radere, angulo refracto 90° existente; quod si igitur radius sub majore angulo incidentiæ, quam 48°$\frac{1}{2}$, ex aqua egredi deberet, sinus anguli refracti ipso sinu toto major fieret, quod impossibile est: unde neque fieri potest, ut talis radius ex aqua emergat, docetque nos experientia, eum in communi aquæ & aeris superficie reflexum intra aquam manere. Simili ratiocinio in aliis mediis limites refractionis inveniri possunt, data ratione sinuum anguli incidentiæ & refractionis. Deinceps de planis solummodo, & sphæricis superficiebus agemus, quarum scilicet solarum in reliquis artibus usus est.

CAPUT II.
De Catoptrica.

ARTICULUS I.
De imaginibus, aut focis per reflexionem.

133. PROBLEMA. *Datis puncto, aut objecto quovis* O *in axe* A O *speculi cujuscunque sphærici concavi* M A B (fig. 10. & 11) *aut convexi* (fig. 12), *& radio incidente* O M, *axi* A O *infinite propinquo, invenire punctum axis* F, *per quod radius in* M *reflexus transit.*

RESOLUTIO. Ducatur ad centrum C e superficie sphærica recta M C, quæ cum (Elem. 459) ad superficiem speculi in puncto

ćto incidentiæ M normalis ſit, erit cathetus incidentiæ : hinc angulus O M G, vel C M E eſt angulus incidentiæ; & ſi fiat C M F = O M G, erit radius reflexus M D, axi O A in F occurrens.

Ut jam valor de A F, ſeu M F (ponuntur enim O M & O A infinite propinquæ) analytice exprimatur, ſit O A, ſive M O, diſtantia objećti a ſpeculo, $= \pm d$ ($+ d$, ſi ſpeculum ſit concavum; & $- d$, ſi ſit convexum : quippe cum hæc ſignorum determinatio a ſitu radii incidentis O M reſpećtu ſemidiametri ſpeculi A C pendeat); ſit $A C = r$, & F A, vel $F M = f$. Hinc erit $F C = r - f$ (fig. 10. & 12), aut $= f - r$ (fig. 11); & $C O = - r + d$ (fig. 10), vel $= r - d$ (fig. 11), vel $= r + d$ (fig. 12). Eſt autem (Elem. 560) C O : C F = M O : M F, ſive (fig. 10 & 11) $\mp r \pm d : \pm r \mp f = d : f$; unde formula generalis pro ſpeculis concavis eruitur $f = \frac{dr}{2d - r}$.

Porro in triangulo C M O fig. 12, habetur (Elem. 746) C O : M O = *ſin* C M O (vel F M C) : *ſin* M C O (ſive M C F) : item in triangulo F M C eſt *ſin* F M C : *ſin* M C F = C F : F M; igitur etiam C O : C F = M O : M F, ſive $r + d : r - f = d : f$. Ex quo deducitur formula pro ſpeculis convexis $f = \frac{dr}{2d + r}$. Ut adeo formula utrique ſpeculorum ſphæricorum generi communis ſit $f = \frac{dr}{2d \mp r}$.

134. OBSERVA I. Hæc formula eo accuratius exhibet valorem de A F, quo radius incidens O M axi O A fuerit propior, ſive quo A M, inter radium incidentem, & axem A O per objećtum O dućtum, intercepta, minor portio ſuperficiei totius ſphæræ fuerit. Sic cum M F (fig. 10 & 12.) ſemper ſit major, quam A F, quo radius incidens a punćto A longius diſcedit, eo propius ad idem A radius reflexus M F cum axe A F concurrit.

135. OBSERVA II. Si ſciatur arcus A M, per Trigonometriam planam valor de A F calculo rigido erui poteſt. Nam in triangulo O C M, datis O C, C M, & angulo M C O, cujus menſura eſt A M, anguli C O M, & C M O cum latere M O reperiri poſſunt. (Elem. 760). Dein in triangulo F M O habetur M O, angulus F O M, & F M O, duplus (aut dupli complementum (fig. 12)) anguli C M E; quare per calculum obtinetur latus O F, & inde A F.

Si radius incidens O M fiat parallelus axi O A, hoc eſt, ſi diſtantia objećti fiat infinita, angulus E M C erit æqualis angulo F C M, & triangulum C M F iſoſceles, utrumvis ejus angulum metiente

tiente arcu A M. Sit exempli cauſa C M = 6 ped. arcus A M = 1°; reperietur A F = 2,99964 pedum. Si A M ponatur = 10°, habebitur A F = 2,95372 ped. Si A M ſit = 30°, fiet A F = 2,53589 pedum.

136. COROLL. I. Quoniam tota lux ab objecto O in ſpeculum in exigua a puncto A diſtantia incidens, per punctum axis F aut ſaltem admodum prope, tranſit in ſpeculis concavis; ſequitur ad idem punctum F debere imaginem objecti O ſenſibilem efformari. In ſpeculis vero convexis radii e puncto O venientes reflexione ita diſperguntur, ut producti ad F concurrant, & ſi quidem lux eum in modum reflexa oculum ſubeat, objectum verſus F exhibeat.

137. COROLL. II. Cum imago objecti O ſita ſit in axe ſphæræ per punctum O producto, ſi quando occurrat obſtaculum, quo minus ab objecto ad centrum ſphæræ recta duci poſſit, imago objecti formari nequit. Simili ratione, quocunque ſitu oculus collocetur, ut imaginem ſuam in ſpeculo videat, eam ſemper in recta per centrum ſpeculi tranſeunte videt.

138. OBSERVA III. Si objectum O tantam vim lucis emittat, ut radii etiam nondum collecti ſenſum caloris excitent, uti id præſtant radii ſolares, facis, carbonis accenſi &c, manifeſtum eſt, quod ſi ope ſpeculi concavi colligantur, calorem tum eorum denſitati, tum illi, quem per ſeſe habent ſinguli incidentes, proportionalem excitaturi ſint. Atque hinc nomen *foci* puncto illi, in quod coguntur, impoſitum eſt.

ARTICULUS II.

De loco, ſitu, & motu imaginum per reflexionem ortarum.

139. Si diverſæ aſſumantur diſtantiæ, e quibus objectum in ſuperficiem ſpeculi ſphærici reflectentem radiare poteſt, haud difficile erit, ex formula generali, ſuperiore Articulo tradita, locum ejus imaginis reperire.

Itaque ſupponamus objectum quodpiam, primo in ipſa ſpeculi ſuperficie poſitum, dein ſucceſſive in infinitum ab eodem removeri...

140. I. *Si diſtantia a ſpeculo ſit infinite parva, imago objecti eſt infinite propinqua poſt ſpeculum.* Quippe cum ſit $\pm d = \frac{1}{\infty}$, formula $f = \frac{dr}{2d \pm r}$ in hanc abit $f = \frac{1}{\mp \infty}$. Denotat autem ſignum —, in ſpeculo concavo imaginem eſſe ex parte oppoſita illi, in qua aſſumebatur ſe-

midiameter cavitatis $= + r$, adeoque post speculum: signum vero $+$ ostendit, in speculo convexo imaginem esse ex parte centri convexitatis, cujus semidiameter ponebatur $= + r$; manifestum autem est, in formula $f = \frac{dr}{2d + r}$ semper fore f positivum, quicunque valor de d assumatur: unde sequitur, *in speculo convexo imaginem necessario esse ex parte centri convexitatis, in quacunque distantia objectum fuerit;* id, quod in sequentibus toto hoc Articulo probe notandum.

141. II. *Distantia objecti a speculo a o usque ad quartam axis sphæræ, vel dimidiam semidiametri partem crescente, imago quoque post speculum semper recedit; & quidem in concavo a o usque ad ∞; in convexo vero a o usque ad $\frac{1}{8}$ axis.* Nam *Primo* si ponatur $d < \frac{1}{2} r$, seu $2d < r$, patet, esse $2d - r$ quantitatem negativam; ergo in speculo concavo f quoque erit negativa, & locus imaginis post speculum. *Secundo.* At vero si fiat $d = \frac{1}{2} r$, erit formula pro speculo concavo $f = \frac{\frac{1}{2} rr}{0} = \infty$. E quo liquet, *imaginem ad distantiam infinitam recedere, si obiectum ad quartam axis partem collocetur;* sive, quod idem est, *radios ab objecto venientes reflecti inter se parallelos a speculo, adeoque* non nisi ad distantiam infinitam a speculo concurrere. Verum quia nulla est ratio, ob quam lineæ parallelæ in infinitum utrinque productæ ex una potius, quam altera parte concursuræ concipiantur, ideoque eodem jure concursus utrinque fieri supponitur; in casu, in quo versamur, dum scilicet objectum $\frac{1}{4}$ axis parte a speculo concavo distat, ejus imago a speculo tam antrorsum, quam retrorsum in infinitum discedit.

142. Quod ad speculum convexum, patet, posito $-d = \frac{1}{2} r$, fore $f = \frac{1}{4} r$.

143. III. *Distantia objecti a speculo ab $\frac{1}{4}$ axis usque ad $\frac{1}{2}$ ejusdem (hoc est usque ad semidiametrum sphæræ) crescente, imago in speculo concavo est cis speculum, atque e distantia infinita usque ad centrum speculi accedit; at in speculo convexo imago post speculum ab $\frac{1}{8}$ axis usque ad $\frac{1}{6}$ ejusdem recedit.*

Manifestum enim est, quamdiu $d > \frac{1}{2} r$, sive $2d > r$, formulam pro speculo concavo non posse fieri negativam, atque adeo imaginem semper fore ex parte concavitatis. Quod si formula solvatur in analogiam $d : 2d - r = f : r$, quia $d > \frac{1}{2} r$, & $d < r$, erit antecedens d majus consequente $2d - r$, atque propterea $f > r$ (Elem. 306): hinc imago est ultra centrum speculi respectu objecti. Si fiat $d = r$, erit $2d - r = d$, & $f = r$. Igitur *in speculo concavo si objectum in centro speculi collocetur, imago ibidem erit;* at si in speculo convexo fiat $-d = r$, habebitur $f = \frac{1}{3} r$.

144. Ex his petenda est ratio, cur oculus ante speculum intra

tra $\frac{1}{4}$ partem axis & centrum collocatus ſuam imaginem nulla ratione videre poſſit, quippe quæ tum poſt oculum efformatur, atque in infinitum recedit, quando is ad $\frac{1}{4}$ axis conſtituitur; ex diſtantia autem infinita usque ad centrum redit, ibique cum oculo confunditur, hoc ab $\frac{1}{4}$ axis ad centrum usque a ſpeculo recedente. Dum autem oculus ejusque imago in locum eundem conveniunt, omnia confuſa apparent, oculo ſe ipſum in quovis puncto vidente.

145. IV. *Diſtantia objecti a ſpeculo a ſemidiametro ſphæræ usque in infinitum creſcente, imago a centro usque ad $\frac{1}{4}$ partem axis verſus ſpeculum accedit, ſi ſpeculum ſit concavum; at ſi convexum ſit, ea poſt ſpeculum ab $\frac{1}{6}$ axis usque ad $\frac{1}{4}$ ejusdem recedit.*

Nempe in analogia $d : 2d - r = f : r$, poſito $r < d$, antecedens d minus eſt ſuo conſequente $2d - r$; ideoque etiam $f < r$. Quod ſi ponatur $d = \infty$, formula in hanc mutatur $f = \frac{1}{2} r$.

146. THEOREMA. *Si objectum ſit arcus circuli* O P Q (fig. 13 & 14) *ſpeculo ſphærico* B A D *concentrici, erit* PRIMO *etiam imago arcus circuli concentrici,* SECUNDO *radius hujus imaginis circularis, adeoque ipſa imago quoque, major, minorve erit, prout ea a centro ſpeculi* C *longius, propiusve abfuerit;* TERTIO *hæc imago erit ſitu erecto, hoc eſt, eodem ac objectum, quamdiu ex eadem cum objecto parte fuerit reſpectu centri ſpeculi; at vero ejus ſitus erit inverſus, ſive contrarius ſitui objecti, ubi inter eam & objectum centrum ſpeculi extiterit.*

Cum enim O P Q ſit arcus cum B A D concentricus, rectæ OB, PA, QD, per centrum C tranſeuntes, in quibus exiſtunt imagines o, p, q, punctorum O, P, Q, æquales ſunt inter ſe: itaqua d (quod earum valorem in formula generali exprimit) erit quantitas conſtans, æque, ac r; & hinc etiam f conſtans eſt; hoc eſt, rectæ oB, pA, qD ſunt æquales: ergo opq, OPQ, BAD ſunt arcus concentrici.

147. Ex his evidens eſt *Primo*, quod dum imago & objectum ſunt ex eadem parte reſpectu centri, uti figur. 14, ſitus imaginis ſit idem cum ſitu objecti, ſingulis ſcilicet punctis imaginis exiſtentibus in iisdem ſemidiametris, quæ per ſingula puncta correſpondentia objecti ducuntur. Verum ſi imago reſpectu objecti ſit ultra centrum (fig. 13), cum rectæ, in quibus exiſtunt imagines ſingularum partium objecti neceſſario per centrum ſpeculi tranſeant, eæ, quæ a puncto objecti ſito ſupra axem (qui per medium objectum ducitur) veniunt, poſtquam per centrum tranſierunt, deorſum vergunt, & ex oppoſito. Igitur in omnibus rectis venientibus e parte ſuperiore objecti (quæ hoc ipſo ſupra axem ſita eſſe debet) imago exiſtit inferius, quippe quæ in il-

 lis

lis non nisi postquam per centrum transierint, efformatur: est ergo situs imaginis inversus respectu objecti sui.

148. *Secundo* manifestum est, imaginem integram objecti, quæ tota lineis in centro concurrentibus comprehenditur, eo esse debere minorem, quo centro speculi fuerit vicinior, & ex opposito.

149. COROLL. I. *Si objectum sit arcus concentricus speculo convexo, imago illius semper apparet situ erecto*, quia scilicet ex eadem parte centri speculi efformatur, in qua objectum est; *decrescit vero ea ratione, qua objectum recedit*, cum magis semper, magisque tum ad centrum accedat. *In speculo concavo imago est erecta, & objecto a superficie speculi usque ad $\frac{1}{4}$ axis recedente, crescit. Hinc vero usque ad centrum promoto objecto, imago decrescit, situmque inversum acquirit: Tandem a centro in infinitum abeunte objecto, situm quidem inversum retinet, sed denuo crescit.* Verum quod ad ultimum præcipue casum pertinet, observandum est, quod si objectum non simul augeatur pro ratione majoris semper distantiæ, sed solummodo figuram speculo concentricam, quam radius distantiæ exigit, acquirat, ejus imago crescente intervallo minuatur.

150. COROLL. II. *Si cetera omnia paria sint, quo minor est radius sphæræ speculi, eo minor etiam est imago objecti.*

151. OBSERVA. Præsens theorema ad objecta alterius cujusvis figuræ in specula sphærica radiantia cum rigore applicari nequit. Quod si tamen adeo supponantur exigua, ut eorum latitudo pro arcu speculo concentrico haberi possit, ex iis, quæ præsente Articulo exposita sunt, intelligi poterit *primo*, cur imagines in speculis sphæricis jam minores, jam majores suis objectis depingantur; *Secundo*, cur earum situs nunc erectus, sit nunc inversus; *Tertio*, cur videantur versus sua objecta accedere, objectis ipsis a speculo cavo recedentibus &c.

152. Similiter intelligitur ex dictis, figuram objectorum, quorum superficies speculo non est concentrica, eo magis deformem reddi debere, id est, imagines eo magis fore dissimiles suis objectis, quo superficies objectorum major, & radius speculi minor fuerit. Etenim si v. g. linea recta opponatur speculo sphærico, ejus imago curva apparebit, quoniam punctis ejus rectæ inæqualiter a speculo distantibus, etiam eorum punctorum imagines inæquales acquirunt distantias, quarum tamen non eadem est ratio. Ejusmodi imagines eo etiam magis a figura objecti diffident, quo id intra speculum concavum & centrum uni quartæ axis parti propius fuerit, cum tunc imagines admodum magnæ efformentur, & exigua diversarum objecti partium differentia in distantia a speculo, ingens discrimen distantiarum & magnitudinum in imaginibus earum partium efficiat.

Articulus III.

Applicatio Theoriæ superioris ad specula plana.

153. E formula generali proprietates speculorum planorum sponte veluti fluunt, si id genus specula tanquam sphærica considerentur, in quibus diameter dimidia sphæræ sit infinita, sive si ponatur $r = \infty$; nam tum formula $f = \frac{dr}{2d - r}$ in hanc abit $f = - d$, quæ ostendit, *imagines in speculis planis visas apparere tanto intervallo trans specula, quanto cis eadem existunt objecta, easque semper esse erectas.* Et quoniam in speculis sphæricis imago cujusvis puncti objecti depingitur in recta per punctum illud, & centrum transeunte, adeoque ad speculorum superficiem perpendiculari; *imago cujusvis puncti objecti ante speculum planum collocati est in perpendiculari ex eo puncto ad superficiem speculi ducta.* Denique, cum perpendiculares ab extremis objecti punctis ad speculum ductæ sint inter se parallelæ, & hinc non nisi in distantia infinita (ad quam centrum ejusmodi speculi remotum est) concurrere possint, *imagines inter has comprehensæ quoad singulas dimensiones objectis suis æquantur.*

154. Simili argumento ceteræ quoque speculorum planorum proprietates deduci possent; verum quia usus horum speculorum frequentior est, quam aliorum, non nullas isthic in particulari indagare juvat.

155. Theorema I. *In speculo plano horizontaliter collocato, objecta, quorum situs erectus est, apparent inversa, & vicissim. Si speculum sit inclinatum, omnia objecta in contrarium inclinata videntur. Si angulus inclinationis speculi sit 45°, objecta verticalia fiunt horizontalia; & horizontalia acquirunt situm verticalem &c.*

Omnia hæc ex eo consequuntur, quod partium objecti speculo viciniorum imagines post speculum viciniores quoque sint; & remotiorum imagines longius quoque post speculum distent. Quod si pro singulis casibus theorematis schemata construantur, facile ex iis demonstratio elicietur.

156. Theorema II. *Pars dextra objecti in imagine in speculo plano depicta apparet ad sinistram, & sinistra ad dextram.*

Pendet id ex eo, quod imagines situm objectorum suorum retineant, partesque dextræ ad dextram depingantur &c. Jam vero dum vultum alterius conspicimus, illius dextra sinistræ nostræ opponitur, & vicissim. Cum itaque hunc in modum alios sine speculo considerare assueverimus, quando nos ipsos in speculo consideramus, dum manum versus dextram movere volumus, eam re-

reipſa verſus ſiniſtram movemus; dum eam antrorſum tendere volumus, retrahimus, ita, ut peculiari habitudine opus ſit, ut quis ſpeculo recte utatur.

157. THEOREMA III. *Imago objecti ad ſuperficiem ſpeculi plani paralleli videtur in ſpeculo tantum dimidium ſpatii illius occupare, quod objectum occupat.*

DEMONSTRATIO. Sit AB (fig. 15) dimenſio quævis alicujus objecti ad ſpeculum IG paralleli; ſit *ab* imago de AB. E puncto quolibet P in AB accepto ducantur P*a*, P*b*, manifeſtum eſt, eſſe IE partem ſpeculi ab imagine *a b* occupatam: & quoniam IG ab AB, & *ab* æqualiter diſtat, pars IE debet eſſe dimidium de *ab*, vel AB.

158. SCHOLIUM. Ut itaque ſe quis integrum in ſpeculo verticaliter poſito videre poſſit, neceſſe eſt, ut ſpeculi altitudo & latitudo ſaltem ſit dimidia altitudinis & latitudinis ſpectatoris ſitu erecto conſiſtentis. Unde ſi quis in ſitu erecto non niſi partem ſui conſpicere poſſit, reliqua imagine ſub margine ſpeculi verticalis occultata, non plus videre unquam poterit, ſeu accedat, ſeu recedat a ſpeculo.

159. THEOREMA. IV. *Si ſpeculum circa axem ſuum moveatur, motus angularis imaginis eſt duplus motus angularis ſpeculi.*

DEMONSTRATIO. Sit primo AB (fig. 17) ſitus ſpeculi, OE radius incidens, EF radius reflexus: acquirat dein ſpeculum circa axem, per E tranſeuntem, motum novum ſitum CD; erit EG radius reflexus reſpectu incidentis OE. Oſtendendum eſt, angulum FEG, quo motus angularis, ſeu quantitas, qua radius reflexus EG a priore ſitu ſuo EF diſceſſit, exprimitur, eſſe duplum anguli AEC, ſive motus angularis ſpeculi. Nam cathetus incidentiæ ſemper eſt in medio inter radium incidentem, & reflexum; & quia ad ſpeculum eſt normalis, eundem habet motum angularem cum ſpeculo. Quod ſi itaque ſpeculum motu angulari accedat verſus radium incidentem, cathetus incidentiæ ab hoc radio tantundem removetur; & ſimul eadem quantitate radius reflexus a catheto recedere debet, ut inter radium incidentem & reflexum media maneat. Quare peracto hoc motu radius incidens a reflexo dupla quantitate motus angularis ſpeculi receſſit.

160. SCHOLIUM. Dum ſpeculum arcum quadrantis deſcribit, radius reflexus integrum ſemicirculum percurrit. Atque ob hanc cauſam imago reflexa ſolis in ſpeculis tanta celeritate moveri poteſt. Similiter imago ſolis e ſuperficie aquæ fere ſtagnantis reflexa videtur admodum agitata, præcipue ſi in majore a puncto incidentiæ diſtantia excepta fuerit &c.

161. THEO-

161. THEOREMA V. *Si speculi vitrei superficies postica stanno sit obducta, duplicem ejusdem objecti imaginem speculum exhibet: alteram viciniorem & debilem; remotiorem alteram & vivaciorem: distantia autem utriusque imaginis æquatur duplæ vitri crassitiei.*

Phænomeni causa ea est, quod ipsa anterior speculi superficies polita & solida speculi vicem agat, omnes eos radios, qui vitrum non penetrant, reflectens, sicque debilem quamdam objecti imaginem formans, quæ eo videtur clarius, quo magis oblique aspicitur: si quis enim perpendiculariter eam intueatur, alteri vivaciori a postica speculi superficie, quæ stanno obducta est, efformatæ directe incumbit, atque cum ea confunditur. Quod si distantia objecti a superficie anteriore speculi sit $= d$, crassities vitri $= e$; erit distantia objecti ab imagine vivaciore (153.) $= 2d + 2e$; at distantia ejusdem ab imagine debiliore solummodo $= 2d$.

162. THEOREMA VI. *Quiscunque sit speculorum planorum in eodem plano collocatorum numerus, unica tantum ejusdem objecti imago efformari potest.*

Nempe omnia tunc specula unius vicem agunt; & quoniam imago semper apparet in catheto incidentiæ ab objecto demissa, ac nonnisi unica perpendicularis ex eodem puncto ad idem planum duci potest (Elem. 634), una etiam tantum imago efformabitur.

163. THEOREMA VII. *Si oculus* I (fig. 16) *constituatur intra angulum quemvis* ABC, *a duobus speculis planis* AB, BC *comprehensum; tot videbit imagines objecti* O *intra eundem angulum positi, quot perpendicula ab eodem objecto, & singulis ejus imaginibus in quodvis speculum intra angulum* B *duci possunt.*

DEMONSTRATIO. *Primo.* Demissa ab objecto O in speculum BC catheto OD, factaque ND = NO, erit punctum D locus unius imaginis. Nam ducta ex oculo I recta ID, & per g (ubi ea occurrit speculo) altera gO, erit gO radius incidens, ejusque reflexus Ig, per quem oculus imaginem in D videt, ob triangula DgN, OgN æqualia, adeoque OgN = DgN = BgI.

Secundo. Si e puncto D demittatur in speculum AB perpendicularis DE, fiatque kE = kD, erit punctum E locus alterius imaginis, respectu cujus imago in D vicem objecti subit. Etenim quia ON = ND, & triangulia ONf, DNf itidem æqualia, radius incidens Of reflectitur in fi; & ob triangula rectangula Dki, Eki pariter æqualia, radius fi in iI reflectitur, adeoque ad oculum in I pervenit.

Tertio. E puncto E in speculum BC demissa catheto EQ, sumptaque QF = EQ, obtinetur locus F tertiæ imaginis, cujus objectum est imago altera in E. Nam ob æqualitatem triangulorum rectangu-

ctangulorum OdN, NDd; Drk, rkE; FQb, bQE, manifestum est, radium incidentem Od reflecti in dr, tum in rb, denique in bI, ubi ad oculum pertingit.

Quarto. Si a puncto F ducatur perpendicularis ad speculum AB, reperietur, quod jam extra speculum in FG cadat, atque adeo non possit amplius esse cathetus incidentiae, nec imago.

164. Simili ratione ostendetur, esse in H imaginem objecti O, quae per radium Ih, ex incidente Oh reflexum, videatur; esse imaginem alteram in K, quae cernatur radio cI, reflexo ex ct, respectu cujus incidens est Ot; esse tertiam in L, visam per radium incidentem Ol, & primo in la postea in ak, denique in kI reflexum. Tandem non posse esse plures imagines, perpendiculo LM a postrema imagine demisso jam extra speculum cadente.

165. COROLL. I. Ex ipsa constructione facile apparet, *imaginem primam videri per radium semel reflexum, secundam per bis, tertiam per ter reflexum* &c.

166. COROLL. II. *Distantia imaginis cujusvis ab oculo aequatur summae ex radio incidente, & reflexis, per quos videtur.* In exemplo $IF = Od + dr + rb + bI$. Nam $IF = Ib + bF$; & $bF = bE = br + rE$; item $rE = rD = rd + dD$; denique $dD = dO$: ergo $IF = Ib + br + rd + dO$. Atque hinc quo magis multiplicatur imago, eo longius distat.

167. COROLL. III. *Prima imago vivacior est quam secunda; haec, quam tertia, & sic deinceps;* tum quod intensitas luminis semper decrescat tota ea via, quam radii incidentes & reflexi conficiunt, cum etiam quod ingens radiorum numerus in singulis reflexionicus pereat.

168. COROLL. IV. *Quo major est angulus a speculis comprehensus, eo minor est numerus imaginum, quae efformari possunt.* Cum enim catheti incidentiae eodem motu angulari a sese invicem recedant, quo ipsa specula, semper eae vertici anguli a speculis intercepti fiunt propiores tandemque extrorsum cadunt, ubi non amplius est locus imagini. Atque hinc *quo angulus duorum speculorum magis augetur, eo imagines ad verticem illius propius accedunt, ibique confunduntur inter se, ac tandem sub illo sese occulentes disparent;* ita ut quando angulus is fit rectus, nequeant esse plures, quam duae imagines; dum vero fit infinite obtusus, unica exhiberi possit, quoniam numerus imaginum dependet semper (162) a numero perpendiculorum, quae tum ab objecto, tum ab ejus imaginibus in utrumvis speculum cadere possunt.

169. COROLL. V. *Si duo specula sint inter se parallela, atque oculus cum objecto in eadem ad speculorum planum perpendiculari constituatur, infinitae fiunt objecti imagines,* quae tamen semper remotiores apparent, itaque fiunt debiles, ut paullo post haud amplius percipi possint.

AR-

ARTICULUS IV.

De ſpeculis Cylindricis, Conicis &c.

170. Specula cylindrica, conica, prismatica, & pyramidalia vix alium uſum habent, quam ut ſpectatorem oblectent, dum vel objectorum figuram deformem exhibent, vel imagines, quæ ex induſtria deformatæ ſunt, ſuis objectis conſimiles repræſentant.

171. Quoniam ſpecula prismatica, & pyramidalia nil aliud ſunt, quam plana verticalia vel inclinata, opus non eſt, ut de iis in particulari agamus. At cylindrica conſideranda ſunt tanquam collectio ſpeculorum, quæ tam e planis verticalibus, quam e ſphæricis participant; & conica, velut quæ partim plana inclinata, partim ſphærica ſint; ita, ut compoſitis inter ſe affectionibus ſpeculorum planorum, & ſphæricorum, facile ſit rationes invenire, cur id genus ſpecula imagines objectorum regulares deformes reddant, & viciſſim.

172. In exemplo, ſi objectum figura debita præditum ſitu verticali collocetur ante ſpeculum cylindricum, itidem verticaliter erectum, manifeſtum eſt, dimenſiones verticales objecti haud poſſe deformari, quæcunque ſit ejus a ſpeculo diſtantia, quippe cum eæ objiciantur ſpeculis planis & verticalibus; at vero dimenſiones horizontales debere figuram ſuam amittere, prout ea plus minusve a concentrica cum ſpeculo abeſt, atque diſtantiarum majus eſt diſcrimen (152.); etenim dimenſiones iſtæ velut in totidem ſpecula ſphærica radiant. Cum itaque ejusdem objecti partium aliarum imagines in ſpeculo cylindrico recte exhibeantur, aliarum autem figuræ deformentur, omnium collectio imaginem admodum diſtortam, in qua objectum vix dignoſcas, repræſentat.

173. En autem methodum in plano delineandi imaginem deformatam, ut in ſpeculo cylindrico (cujus radius datur) in ejusdem plani loco certo verticaliter poſito, e certa oculi diſtantia viſa, recta, & objecto ſuo conformis, appareat.

Pingatur in plano ſeparato objectum in ſpeculo exhibendum vera dimenſionum omnium ſervata proportione, attamen ne maxima ejus latitudo major ſit chorda arcus 130, vel 140 graduum ſpeculi cylindrici. Hæc imago parallelogrammo rectangulo (fig. 18) includitur, quod *craticulam prototypi* dicere licet. Hoc parallelogrammum in plura minora quadrata aut rectangula parallelogramma dividitur, ut imago hac ratione in plures partes diſpeſcatur. Dein in plano dato deſignetur locus, in quo collocanda eſt ſpeculi cylindri-

lindrici basis, portio nempe circuli F′TK′ (fig. 19.) cujus radius æqualis radio basis cylindri; applicetur huic chorda F′K′, æqualis lateri FK craticulæ prototypi, pedi imaginis respondenti, atque in totidem partes dividatur, ac ipsum latus FK. Erigatur in puncto bisectionis chordæ H perpendicularis HO, usque ad punctum O producenda, supra quod oculus constituendus est. Agantur ex O per puncta divisionum chordæ rectæ indefinitæ OA′, Og', Oh', Oi', Ok', atque super una ex istis, v. g. OA′ erigatur perpendicularis OV æqualis altitudini oculi supra planum. In eadem recta OA′ ex puncto F′, ubi occurrit chordæ K′F′, erigatur altera perpendicularis F′A, æqualis lateri alteri FA craticulæ prototypi, & in totidem partes secetur. Ex puncto V ducantur per puncta divisionum rectæ F′A lineæ VF′, VE′, VD′, VC′, VB′, VA′, & ubi eæ rectæ OA′ occurrunt in E′, D′, C′, B′, A′, fiant parallelæ ad K′F′, nempe E′e', D′d', C′c', B′b', A′k'; habebitur ex legibus Perspectivæ trapezium K′F′A′k' perspectivum craticulæ prototypi AK, visum ex eo puncto, in quo collocandus est oculus, ut objectum in cylindro cernat, hoc est, in altitudine OV supra punctum O.

Ex centro Q arcus F′TK′, super quo pes cylindri collocandus est, per puncta incidentiæ F′, S, T, K′, in quibus rectæ (sive radii) OF′, OG, OI, OK′ dicto arcui occurrunt, ducantur catheti incidentiæ QL′, QP, QR, QX, atque indefinitæ F′a, Sg, Ti, K′k, quæ faciant angulos aF′L = OF′L, gSP = OSP, iTR = OTR, & kK′X = OK′X, adeoque radii reflexi erunt (133). In has lineas, sive radios reflexos, transferantur divisiones rectarum correspondentium trapezii perspectivi, nempe rectarum F′A′, Sg', Mh', Ti', K′k', & per singula puncta hac ratione reperta ducantur curvæ, quæ parum aberunt ab arcubus circulorum concentricorum, communis centri H, ipsasque rectas Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, FK craticulæ prototypi repræsentant, quemadmodum ab F′a, G′g, H′h, I′i, K′k, rectæ FA, Gg, Hh, Ii, Ka ejusdem craticulæ exhibentur, ac denique a trapeziis mixtilineis parva quadrata vel rectangula craticulæ. Quod si itaque cylinder super arcu F′TK′, & oculus in puncto jam determinato collocetur, in cylindro imago craticulæ prototypi recte exhibebitur. Unde si in trapezia mixtilinea partes in singulis correspondentibus areolis craticulæ prototypi delineatæ transferantur, habebitur imago deformata, uti desiderabatur.

CAPUT III.

Dioptrica.

ARTICULUS PRIMUS.

De Imaginibus, sive focis ex simplici refractione.

174. PROBLEMA. *Datis objecto* O (fig. 20 & 21) *positione respectu superficiei sphæricæ refringentis* BAI *dati radii* AK, *&* *ratione sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti, invenire locum imaginis* P, *quæ per refractionem efformatur.*

Sit ratio data p ad q. Per objectum O & centrum K ducatur indefinita AO, quæ repræsentet axem sphæræ per objectum O transeuntem: incidat radius OI infinite propinque ad axem OA: ducatur e centro K ad punctum incidentiæ I semidiameter, quæ erit cathetus incidentiæ. Ex eodem centro demittatur in radium incidentem, productum, si opus sit, perpendicularis KG, quæ erit sinus anguli incidentiæ OIN, sive KIG: fiat ut p ad q, ita KG ad terminum quartum, quo tanquam radio centro K describatur arcus, ad quem e puncto I ducta tangens, si producatur, secabit axem AO in puncto quæsito P. Si enim ad punctum contactus ducatur recta KH, patet, eam esse sinum anguli KIP, qui consequenter est angulus refractus ex radio incidente OI. Et quoniam manet eadem constructio pro omnibus radiis e puncto O infinite propinque ad A in superficiem refringentem incidentibus, sequitur, eos ita refringi, ut omnium directio sit versus P, in quo adeo focus est seu imago objecti.

175. Ut autem valor de AP analytice exprimatur, sit AO, sive OI $= d$, radius sphæræ KI vel KA $= \mp r$ (adhibito $+ r$, quando objectum est ex parte convexitatis (fig. 20); & $- r$, quando objectum est ex parte cavitatis (fig. 21)). Sit AP, sive IP $= f$. Ex constructione præcedente est $p : q =$ KG : KH; adeoque KG $= \frac{p \times KH}{q}$. Quia vero OI supponitur infinite propinqua ad OA, arcus AI pro recta ad axem OA perpendiculari haberi potest, ac propterea similia sunt triangula rectangula AOI, & OKG; item PAI & PKH. Et hinc OK : OI $=$ KG : AI $= \frac{OI \times KG}{OK}$; item KH : AI (sive $\frac{OI \times KG}{OK}$) $=$ PK : PI (vel PA). Quare PA $= \frac{OI \times KG \times PK}{OK \times KH}$.

Et ſi ſubſtituantur valores literales, ut eruatur f, invenietur $f = \frac{dpr}{dp - q(d + r)} = \frac{dpr}{d(p - q) - rq}$, pro ſuperficiebus convexis; item $f = \frac{dpr}{d(q - p) - rq} = \frac{dpr}{q(d - r) - dp}$, pro ſuperficiebus concavis, quia in his r habet ſitum oppoſitum.

176. Quod ad accurationem harum formularum, & imagines, quæ per eas determinantur, attinet, eadem ſunt attendenda, quæ ſuperius (135) annotavimus. Quin theorema Num. 146. cum ſuis Corollariis huc etiam transferri debet; quod factum eſſe, impoſterum ſupponemus.

Articulus II.

De motu imaginum reſpondente motui objectorum, quando lux ex aere in vitrum tranſit, & viciſſim.

Quoniam maxima utilitas, quam a Dioptrica expectare licet, eſt accurata cognitio legum, quas lumen obſervat, dum ex aere in vitrum, vel viciſſim, tranſit, ut conſpicillorum, teleſcopiorum, & microſcopiorum effectus rite percipiantur; exemplum hujus rei in applicatione duarum præcedentium formularum dabimus.

177. Quando radius ex aere tranſit in vitrum, eſt $p = 31$, & $q = 20$. Unde formulæ duæ præcedentis articuli ad has reducuntur, $f = \frac{31\, dr}{11\, d - 20\, r}$ pro ſuperficiebus convexis; & $f = \frac{31\, dr}{-11\, d - 20\, r}$ pro ſuperficiebus concavis.

178. Sint duo media indefinite extenſa, aer, & vitrum, utrumque in ſe homogeneum, & communi ſuperficie ſphærica alterum ab altero ſeparatum. Supponamus primo convexitatem obverti aeri, in quo collocatum objectum lucidum, exiguæ extenſionis, concipiatur in infinitum recedere, directione ad dictam ſuperficiem perpendiculari. Ope formulæ $f = \frac{31\, dr}{11\, d - 20\, r}$, determinabuntur omnes motus imaginis hujus objecti, quemadmodum ſupra (Num. 140 & ſequentibus) de ſpeculis ſphæricis factum eſt, prout alii ſemper fuerint valores diſtantiæ d, quam exprimemus in partibus, quarum unitas ſit r.

I.a-

Itaque quamdiu d fuerit intra $d = \frac{1}{\infty} r$, & $d = \frac{20}{11} r$, erit f ſemper quantitas negativa, creſcente ejus valore in infinitum, & imago extra vitrum ſive ad eandem cum objecto partem apparebit, quia ſcilicet in formulæ calculo ponebatur f poſitiva, qua deſignabatur diſtantia ſuperficiei refringentis ab imagine ultra eam ſuperficiem reſpectu objecti exiſtente: præterea imago ſemper erit erecta (149), & a ſuperficie refringente in infinitum recedet, ejus locum determinante concurſu directionis radiorum, quam in ingreſſu in vitrum acquiſiverunt, minus ſemper divergentium, donec paralleli evadant exiſtente $d = \frac{20}{11} r$. Ab hoc valore $d = \frac{20}{11} r$ uſque $d = \infty\, r$, f ſit poſitiva, imago exiſtit intra vitrum ſitu inverſo, & ex diſtantia infinita verſus ſuperficiem refringentem accedit uſque ad $\frac{31}{11} r$, radiis, qui vitrum transmittunt, a paralleliſmo magis ſemper convergentibus.

179. At vero ſi ſuperficiei communis, media diſterminantis, cavitas ſit obverſa aeri, formula $f = \frac{31\, dr}{-11\, d - 20\, r}$ oſtendit, quod quæcunque fuerit objecti ab ea ſuperficie diſtantia, ſive valor de d, f ſit ſemper negativa; atque hinc imago ſemper eſt extra vitrum, & erecta. Dum autem d ab $\frac{1}{\infty} r$ usque ad $\infty\, r$ creſcit, f etiam ab infinite parva usque ad $\frac{31}{11} r$ augetur, & imago a ſuperficie refringente usque ad diſtantiam $\frac{31}{11} r$ recedit, radiis, qui vitrum ſubeunt, perpetuo quidem divergentibus, attamen ſemper minus.

180. Quod ſi objectum intra vitrum exiſtere, illicque moveri ſupponeretur a ſuperficie media ſeparante in infinitum, tum vero ſumendum foret $p = 20$, & $q = 31$, atque formula pro ſuperficie convexa in hanc abiret $f = \frac{20\, d\, r}{-11\, d - 31\, r}$; pro concava autem $f = \frac{20\, d\, r}{11\, d - 31\, r}$.

Unde ſi objectum ponatur primo in ſuperficie convexa, calculo & ratiocinio priori ſimili clarum fiet, quod objecto in infinitum recedente imago erecta intra vitrum maneat, a ſuperficie communi ad diſtantiam $\frac{20}{11} r$ removenda, radiis, qui e vitro in aerem exeunt, ſemper minus divergentibus.

181. Si denique objectum in superficie concava collocetur, e formula $f = \frac{20dr}{11d - 31r}$ deducetur, f semper fore negativam, quiscunque sit valor de d, incipiendo a $d = \frac{1}{\infty} r$ usque ad $d = \frac{31}{11} r$: atque hinc imago habebit situm erectum intra vitrum, & a superficie in infinitum recedet, radiis qui in aerem emergunt, semper minus divergentibus, donec paralleli fiant. Verum a $d = \frac{31}{11} r$ usque ad $d = \infty r$, fiet f positiva, imago invertetur, & in aere versus superficiem refringentem ad distantiam $\frac{20}{11} r$ accedet, radiique in aere semper magis convergent.

Eodem prorsus modo, ut ex hoc exemplo liquet, investigari poterit via imaginis alicujus objecti in aliis mediis refringentibus, uti in aere & aqua, vel vitro & aqua.

ARTICULUS III.

De imaginibus, quæ per duplicem refractionem efformantur.

In vitris, quorum usus est, plerumque duplex consideranda est refractio, altera in ingressu radii in vitrum; in egressu altera.

182. PROBLEMA I. *Datis dimensionibus lentis vitreæ cujuscunque* AB (fig. 22), *positione objecti* O *in communi axe utriusque superficiei sphæricæ lentis, quarum centra sunt in* C & K, *invenire punctum axis* F, *in quo radius* OI *axi* AO *infinite propinque incidens, post duplicem refractionem, alteram in* I, *alteram in* T, *eundem secat.*

RESOLUTIO. Sit $OA = d$, $CB = R$, $KA = r$, $FB = x$, $PB = z$; ex inspectione schematis patet, esse P punctum axis, quo dirigitur radius incidens OI post primam refractionem in I; sit AB, quæ vitri crassitiem exhibet, $= e$; & ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in ingressu radii in lentem, ut p ad q; in egressu ut q ad p. Sit denique $CD = m$, $KG = n$. Liquet porro ex ipsa figura, esse $p : q = KG$ (sive n) : $KH = \frac{nq}{p}$; & $q : p = CD$ (seu m) : $CE = \frac{mp}{q}$.

His positis, ob triangula rectangula OAI, OKG similia, est $OK : OA = GK : AI$, sive $d + r : d = n : AI = \frac{dn}{d+r}$; &

quia

quia triangula PAI, PKH ſimilia quoque ſunt, habetur PA $(z+e)$: PH$(z+e-r)$ = AI $\left(\frac{dn}{d+r}\right)$: KH $\left(\frac{nq}{p}\right)$; unde oritur æquatio $\frac{dnz+den-dnr}{d+r}=\frac{nqz+enq}{p}$, e qua invenietur valor $z=\frac{deq+eqr+dpr-dep}{dp-dq-qr}$. Dein e triangulorum PCD, PBT ſimilitudine eſt PD (ſeu $z+R$): PB (ſive z) = CD (vel m): BT $=\frac{mz}{z+R}$. Denique triangula FCE, FBT itidem ſimilia ſuppeditant hanc analogiam FC (id eſt $x+R$) : FB (ſeu x) = CE $\left(\text{ſive } \frac{pm}{q}\right)$: BT $\left(\text{vel } \frac{mz}{z+R}\right)$, e qua facta æquatione, obtinetur alter valor de $z=\frac{pRx}{qx+qR-px}$; hi duo valores, ut reperiatur x, inter ſe comparentur, & factis reductionibus neceſſariis tandem obtinebitur

$$x=\frac{dpqRr+deqqR-depqR+eqqRr}{dppR-dpqR-pqrR-deqq-dpqr+2depq-depp+dppr-eqqr+epqr}.$$

183. Hæc æquatio generalis ad multo ſimpliciorem expreſſionem in caſibus particularibus reducitur. Etenim ſi lens ſupponatur vitrea, eſt $p=31$, $q=20$, & formula prior in hanc mutatur $x=\frac{620drR-220deR+400erR}{341dR+341dr-620rR-121de+220er}$. Et ſi ponatur $e=0$, ſive vitri craſſities negligatur, habetur $x=\frac{620drR}{341dR+341dr-620rR}=\frac{20drR}{11dR+11dr-20rR}$. Denique ſi aſſumatur $r=R$, ſive ſi utraque ſuperficies ſphærica ſupponatur ejusdem radii, fiet $x=\frac{10dr}{11d-10r}$.

184. OBSERVA. I. Dato arcu AI, inter punctum axis utrique ſuperficiei ſphæricæ communis A, & punctum I (in quod oblique incidit radius OI, e puncto O ejusdem axis emiſſus) intercepto, ope trigonometriæ planæ inveniri poteſt verum punctum F, in quo radius OI poſt duplicem refractionem axi occurrit. Nam in triangulo OKI nota ſunt OK, KI, & angulus AKI, unde reperitur IO, & angulus KIO cujus complementum eſt KIG Porro in triangulo rectangulo IKG habetur IK cum angulo KIG, & hinc obtinebitur KG. Fiat tum $p:q$ = KG: KH, & in triangulo rectangulo KIH invenietur angulus KIH, habitis nempe KI & KH. In triangulo KIP datur jam IK & anguli IKP, KIP; quare dabitur etiam latus KP cum angulo KPI. In triangulo

PCD,

PCD, rectangulo ad D, habetur $PC = PK + KA + CB - AB$, & angulus CPD, e quibus reperietur PCD, & CD. Fiat $q : p = CD : CE$. Tum in triangulo rectangulo CTD cognita erunt CT, & CD, e quibus reperietur angulus TCD. In triangulo CTE habitis CT & CE, angulus ETC invenitur, cujus complementum est CTF. Unde tandem in triangulo CTF, notis latere CT, & angulis CTF, $FCT = PCD - TCD$, reperitur CF, consequenter $BF = CF - CB$.

Si objectum habeat distantiam infinitam, calculus paullo contractior erit: etenim cum in eo casu fiat radius OI axi parallelus, anguli $KIG = AKI$, mensura est arcus datus AI.

185. OBSERVA. II. E calculo praecedente, imo ex ipsa constructione Geometrica, facile apparet, quod *dum radius OI ad aliquam distantiam a puncto A axis utrique superficiei sphaericae communis incidit, curvitas arcus AI eum citius versus axem inclinet.* E quo fit, ut punctum F, in quo axis a radio refracto secatur, eo propius sit ad B, quo plures gradus arcus AI continet.

186. PROBLEMA II. *Datis dimensionibus lentis cujusvis* AD (fig. 25) *cujus superficies habent centra in* C & K, *positione objecti* O *extra axem* BK *sed in eadem cum puncto axis* B *a lente distantia; invenire punctum* F, *in quo radii ab* O *emanantes post transitum per lentem concurrunt.*

RESOLUTIO Ducatur per O & centrum K recta OK, quae erit axis superficiei primae sphaericae ALD; & omnes radii (174) ex O in hanc superficiem (quae per hypothesin paucorum graduum est) incidentes concurrent in aliquo puncto P ejusdem axis, quod per formulam Num. 175 determinatur; quemadmodum etiam omnes radii e puncto B emissi uniuntur in p. Jam vero considerari potest punctum P tanquam objectum aliquod intra massam vitream positum, quod radios in superficiem ATD emittat: itaque ducta recta PC per centrum C & punctum P, quae erit axis hujus superficiei, radii ex P incidentes ita refringi debent in hac superficie, ut eorum directio tendat ad idem punctum F cis T situm (174), quod per formulam Num. 175 invenitur; quemadmodum punctum p, cum sit prima imago objecti B per refractionem in superficie ALD efformata, objecti vicem agit respectu superficiei ATD, quae secunda refractione efficit imaginem ipsius p in f, sive imaginem secundam objecti B.

187. COROLL. I. Quod si crassities vitri negligatur, & supponantur B & O aequaliter distare a lente, manifestum est, etiam puncta p & P habitura aequalem distantiam, utpote quae reperiuntur ex eadem formula, & iisdem datis. Ob eandem rationem F quoque & f eodem spatio sunt a vitro remota.

188. Co-

188. Coroll. II. Quoniam quæ de puncto O diximus, omnibus punctis ſuperficiei objecti applicari poſſunt, liquet, quomodo imago integra alicujus objecti efformetur, cujus figura proxime ſimilis eſt ſuperficiei objecti, quæ in vitrum radiat.

189. Coroll. III. Si partes objecti magnam habeant extenſionem, vel ſi plura objecta ſint in eadem a vitro diſtantia, eorum imagines in magna portione ſphæræ, cujus centrum occupat vitrum, diſtincte depingi debent.

190. Coroll. IV. *Itaque ſufficit, ope formularum præcedentium quærere locum imaginis illius puncti, quod in axe vitri exiſtit, ut habeatur locus imaginis totius objecti.*

191. Coroll. V. Ex ipſa conſtructione quoque præcedente apparet, quod ſi tanta ſit diſtantia objecti O B, ut imago depingatur ultra ſemidiametrum ſuperficiei ſecundæ refringentis hæc imago habeat ſitum inverſum, hoc eſt ejus partes contrario ſitu appareant, quam habeant partes correſpondentes objecti.

192. Experientia docemur, campum, in quo imagines objectorum in lentes radiantium diſtincte depinguntur, eſſe ſatis amplum. Etenim ſi in camera obſcura (qualem N. 5. deſcripſimus) fiat appertura 2 vel 3 digitorum in diametro, atque in eam vitrum convexum inſeratur, in charta alba ad diſtantiam tum ſemidiametris convexitatis, cum etiam diſtantiæ objectorum proportionatam collocata videbuntur imagines inverſæ objectorum per foramen radiantium, quarum colores eo vivaciores apparebunt, quo objecta magis fuerint illuminata: eruntque hæ imagines admodum diſtinctæ, quamvis illæ præ ceteris, quarum objecta propius ad axem lentis ſunt poſita.

193. Theorema. *Si in vitro utrinque convexo, vel utrinque concavo, radii convexitatis vel concavitatis fuerint æquales; e radiis lucis a puncto O extra axem poſito* (fig. 23 & 24) *in vitrum incidentibus ille, qui per punctum* I, *medium craſſitiei vitri, tranſit, in egreſſu e vitro poſt duplicem refractionem acquirit directionem* T F *parallelam directioni* O L, *quam habuit ante ingreſſum.* Atque hic radius deinceps dicetur *radius principalis.*

Demonstratio. Ob arcus A L D, A T D eodem radio deſcriptos æquales, figura vitri conſiderari poteſt tanquam polygonum infinitorum laterum ſymmetrum, cujus partes in ſingulis diagonalibus oppoſitæ æquales ſunt, centro in I exiſtente. Unde radius lucis T L per I tranſiens utrinque in latera parallela & æqualia (quorum ſitus per tangentes G L, H T determinatur) incurrit; & propterea utrobique æqualem patietur refractionem, hoc eſt, angulus refractionis I L O debebit æqualis eſſe angulo refractionis I T F, atque adeo (Elem. 434) directiones M C, T F erunt parallelæ.

194. COROLL. I. *Si ponatur vitrum ex una parte planum, ex altera convexum vel concavum, radius principalis erit is, qui per supremum convexitatis vel cavitatis punctum vel vitrum ingreditur, quando convexitas aut concavitas obvertitur objecto; vel egreditur, dum planities objectum respicit.* Nam supremum superficiei sphæricæ punctum haberi potest pro plano infinite parvo, atque superficiei planæ vitri parallelo.

195. COROLL. II. *Neglecta vitri crassitie, radius principalis in eadem recta exit, qua ingreditur;* seu quod idem est, *radius oblique incidens, qui ad illud axis punctum dirigitur*, quod est medium crassitiei vitri, in eadem recta transit per vitrum, quin patiatur refractionem.

ARTICULUS IV.

De motu & situ imaginum, quæ e duplici refractione oriuntur.

196. I. Si supponatur objectum exiguæ extensionis in ipsa superficie vitri utrinque æqualiter convexi, ubi communis utriusque superficiei axis transit, collocari, dein ab eo in eodem axe producto in infinitum recedere; e formula $x = \frac{10\,dr}{11\,d - 10\,r}$ (183) liquet, imaginem hujus objecti semper fore in eodem axe: & quia in formula quantitas x est negativa, & valoribus omnibus de d, a $d = \frac{1}{\infty}r$ usque ad $d = \frac{10}{11}r$, substitutis, crescit; erit imago erecta, & ab initio in eodem loco cum objecto, postea versus eandem partem a vitro (in quam objectum movetur) in infinitum recedet, radiis, qui e vitro exeunt, semper minus divergentibus, donec paralleli evadant. In omnibus aliis valoribus de d, incipiendo a $d = \frac{10}{11}r$ usque ad $d = \infty\, r$, quantitas x fit positiva, & decrescit, imago habet situm inversum ex parte altera objecti, & e distantia infinita redit versus vitrum usque ad $\frac{10}{11}r$, radiis eam formantibus, dum e vitro egrediuntur, ab initio parallelis, tum semper magis convergentibus.

197. II. Si vitrum sit plano-convexum, unus e radiis sit infinitus; sit itaque $R = \infty$; formula $x = \frac{20\,drR}{11\,dR + 11\,dr - 20\,rR}$, mutatur in hanc $x = \frac{20\,dr}{11\,d - 20\,r}$. Quod si jam eædem fiant suppositiones, quæ Num. præcedente, diversarum distantiarum objecti ab hoc vitro, reperietur motus imaginis fieri eadem ratione, nisi

quod

quod positis æqualibus valoribus de d, quantitas x semper sit major, & imago non acquirat distantiam infinitam, nisi dum d sumitur $= \frac{20}{11} r$.

198. Observa. Dum vitrum est plano-convexum, quæri potest, an perinde sit, sive objecto superficies plana obvertatur, sive convexa? Ad quod respondendum, perinde id esse, si vitri crassities insuper habeatur. At si ad eam attenditur, imago magis distat a superficie convexa, dum objecto superficies plana obvertitur, quam distet a superficie plana, dum convexa objectum respicit. Et siquidem objectum magnam habeat a vitro distantiam, hæc differentia est circiter $\frac{2}{3}$ crassitiei vitri. Etenim si in formula $x = \frac{620 drR - 220 deR + 400 erR}{341 dR + 341 dr - 620 rR - 121 de + 220 er}$ (183) fiat $d = \infty$, & $r = \infty$, ut exprimatur superficies plana AI (fig. 22) objecto obversa, hæc formula reducitur ad hanc $x = \frac{620}{341} R$; at si ponatur $R = \infty$, ut denotetur, quod superficies plana BT sit ab objecto aversa; prior formula mutatur in hanc $x = \frac{620}{341} r - \frac{220}{341} e$. Usus hujus observationis est in Telescopiis dioptricis, in quibus reticula, sive micrometra applicantur, uti in sequentibus videbimus. Ejusmodi telescopiorum vitra objectiva sæpe sunt plano-convexa; unde dum e tubis eximuntur, ut v. g. maculæ iis adhærentes detergantur, cura adhiberi debet, ut dum reponuntur, superficies utravis parti, cui prius, obvertatur: hoc si negligeretur, fieri posset, ut si vitri crassities $1\frac{1}{2}$ lineam excederet, fila reticuli seu micrometri, plus integra linea extra locum debitum constituerentur.

199. III. Si vitrum est ex utraque parte æqualiter concavum, radius superficiei objecto obversæ KA (fig. 22) cadit ad partem objecti O, ideoque ponendum $= -r$; & radius CB, qui prius ex parte objecti erat, venit ad partem oppositam, adeoque erit $= -R$. Hac ratione formula pro vitris utrinque æqualiter convexis etiam applicari poterit utrinque æqualiter concavis, fietque $x = -\frac{10 dr}{11 d + 10 r}$; e qua simul apparet, quod si objectum primo collocetur in alterutra talis vitri superficie in puncto, per quod communis axis transit, postea ab ea in infinitum recedat, ejus imago moveatur versus eandem partem usque ad distantiam $\frac{10}{11} r$ a superficie in hoc axe sumtam; quod semper sit erecta; quod radii, a quibus depingitur, e vitro exeant semper minus divergentes. Nam va-

 lor

lor de x in hac formula eſt ſemper negativus, quæcunque quantitas pro d aſſumatur.

200. IV. Si vitrum ſit plano-concavum, formula erit $x = -\frac{20dr}{11d+20r}$; moto objecto erit ſimilis motus imaginis, ut in vitro utrinque concavo, niſi quod valor de x ſemper ſit major, & diſtantia maxima imaginis a vitro $= \frac{20}{11} r$.

201. Denique ſi vitrum ſit *Meniſcus*, hoc eſt, ex altera parte convexum, ex altera concavum, ut obtineatur formula ei competens, ſignum alterutrius radii mutandum eſt, exempli cauſa ponendum $-$ R, loco $+$ R in formulis Num. 183; & neglecta vitri craſſitie obtinebitur $x = \frac{20drR}{11dR - 11dr - 20rR}$; quod ſi dein diverſi valores de d aſſumantur, invenietur motus imaginis. Verum hæc ſingillatim diſcutere ſuperſedemus, tum quod rarior ſit uſus ejusmodi vitrorum, tum quod plures occurrant caſus, quam nobis præfixa brevitas ferat. Ex eadem cauſa nihil adferimus de vitris concavis vel convexis utrinque, quorum concavitates vel convexitates diverſos habent radios.

202. OBSERVA. *In praxi ſupponi poteſt, objecti diſtantiam eſſe infinitam a vitro, quando radium ſphæræ millies vel decies millies excedit.* Sic ſi in formula $x = \frac{10dr}{11d - 20r}$ ponatur $r = 10$ digit. & $d = 10000$, hoc eſt, d millies majus, quam r, reperietur $x = 9, 102$ digit. Et ſi ponatur $d = \infty$, prodit $x = 9, 091$ digit. Ex quo patet, differentiam diſtantiæ imaginis eſſe circiter $\frac{1}{100}$ dig. quando diſtantia objecti radium ſphæræ excedit millies, a diſtantia ejusdem, dum objectum infinite diſtat. *

CAPUT

* Si $d = 10000.$, $r = 10$; fit $x = 9, 107 +$; & ſi $d = \infty$, eſt $x = 9, 091 -$, unde differentia eſt $\frac{16}{1000} +$. Apparet tamen, quod nondum æquet $\frac{2}{100}$.

CAPUT IV.

De Visione.

ARTICULUS I.

Descriptio oculi, & imaginum, quæ in eo depinguntur.

203. Oculus tribus tunicis vestitur: prima & extima EDNNDE (fig. 26.) *cornea* dicitur, estque figuræ sphæricæ, parte DED minoris sphæræ segmento existente, quam altera, atque laminæ tenuis corneæ instar pellucida. Altera PIIP *sclerotica* appellatur, apertura ad PP prædita, quam pupillam nominant, quamque annulus niger, griseus, vel cærulescens (iridem appellant) ambit: hic semper figuram circularem pupillæ conservat, seu ea dilatetur, dum oculus ad locum obscurum venit, seu contrahatur in majore luce. Neuter motus nobis non est voluntarius. Tertia *choroides* dicitur, estque textum villosum, nigerrimo colore tinctum, nempe CB s BC, quæ adeo oculo speciem cameræ obscuræ conciliat, atque radios, quorum refractio inordinate fit, absorbet. Choroidi infra pupillam lens quædam, seu *humor Crystallinus* connexus est CC. Ejus convexitas anterior minoris est radii, quam posterior. Retinetur autem duobus musculis BC, BC (sive *ligamentis ciliaribus*), a quibus, dum poscente casu versus B a C trahitur, minus convexus redditur. Fors etiam illud præstant hi musculi, ut eam antrorsum, retrorsumve moveant.

Fundo circa HH reticulum album & subtilissimum, quod *retinam* dicunt, inhæret, ac super choroide sese explicat. hæc retina nil aliud est, quam expensio nervi optici, impressiones usque ad sedem animæ transmittentis. * Spatio intra corneam & humorem crystallinum continetur liquor admodum limpidus, & clarus, cui iris innatat, ac *humor aqueus* vocatur; Intra humorem crystallinum vero & fundum oculi est alter, admodum quidem pellucidus, consistentiæ tamen majoris, quam aqueus & mucilaginosæ: dicitur *humor vitreus*.

204. Radii lucis oculum subeuntes ita in humore aqueo refringuntur, ut sinus anguli incidentiæ sit ad sinum anguli refracti ut 4 ad 3: patiuntur quoque aliquam refractionem in ingressu &

 egressu

* Physici non nulli choroidem tanquam immediatum visus organum habent, quod experimentis constet, objecta cessare videri, oculo ita collocato, ut eorum imagines incidant in centrum fascis NN e tenuissimis filamentis compositi, e quo retina incipit se supra choroidem expandere. *Nota Authoris.*

egressu ex humore crystallino, ratione dictorum sinuum existente in ingressu ex humore aqueo in crystallinum ut 13 ad 12; in egressu ex humore crystallino in vitreum ut 12 ad 13. His autem refractionibus efficitur, ut radii ex eodem objecti puncto emissi rursus uniantur, & consequenter ejus imaginem depingant, quae objectum distincte exhibet, quando in ipsa retina efformatur, confuse autem, si radii citius concurrant, quam attingant retinam, vel etiam quando punctum concursus ultra retinam existit.

205. Verum ut hæc non nihil clarius intelligantur, quodlibet superficiei corporis punctum in omnem partem radios emittens, respectu pupillæ oculi considerari debet tanquam apex coni, cujus basis est ipsa pupilla: per refractionem vero in oculo fit alter conus priori oppositus, cujus basis est eadem pupilla, vertex autem in fundo oculi, ubi radiorum concursu imago puncti illius, e quo dimanarunt, perceptibilis efformatur. Utrique huic cono axis est communis, qui ad sensum est linea recta (nam refractio, quæ in ingressu & egressu ex humore crystallino fit, hic considerari vix meretur): unde supponi potest, omnes radios, utrumqne conum constituentes, cum axe communi congruere & hac ratione quodvis objecti punctum distincte depingi, quia ejus imago per radium, centrum pupillæ transeuntem, in fundo oculi formatur.

Hoc posito, *Primo* si punctum visibile sit circa centrum superficiei objecti, velut in R (fig. 26), alterum quodpiam Q ad partem dextram prioris, istud suam imaginem radio Q q in oculum transmittet, qui radium R r, prioris imaginem deferentem, in centro pupillæ intersecat: unde imago q depingetur in fundo oculi e parte sinistra imaginis r, quæ punctum R repræsentat, atque ideo situs imaginum q & r contrarius est situi punctorum R & Q in superficie objecti.

Secundo. Quoniam quivis fascis vel conus luminosus e quovis superficiei puncto egressus reduci potest ad unicum radium, qui axem constituit; superficies objecti fit respectu oculi basis pyramidis, cujus vertex est in centro pupillæ: & radii hanc pyramidem formantes e centro pupillæ in oculum producti alteram efficiunt in fundo oculi terminatam, cujus consequenter basis est imago tota objecti, quæ suis depicta coloribus ideam præsentis objecti, ejusque figuræ excitat, ut in prioribus jam diximus.

ARTI-

ARTICULUS II.

De Visione Distincta.

De diversis vitiis visus, & remediis, quæ Dioptrica suppeditat.

206. Quoniam radii luminis ab aliquo puncto A emissi secum deferunt imaginem illius (71), atque post transitum per vitrum convexum in foco iterum uniuntur, manifestum est, quod sive cis, sive trans focum in tabula quapiam plana excipiantur, puncti quidem illius A imaginem exhibeant, verum tanto majorem, minusque vivacem, quo major a foco fuerit tabulæ distantia. Ob eandem extensionem imaginis puncti alterius B, priori A vicini, necessario fiet, ut imagines utriusque partem aliquam commisceantur: & siquidem diversi sint coloris, imago e binis composita trium colorum apparere debebit, quia pars utrique imagini communis referet colorem e mistione duorum ortum. E quo liquet, imagiginem ita commistam suo objecto nec dimensione, nec figura, nec colore, nec nitore fore similem, sed justo majorem, atque confusam. At si radii in ipso foco excepti fuissent, utriusque puncti imago separatim fuisset suo colore depicta. Atque hunc in modum visio distincta, vel confusa concipienda est. Visio objecti tunc est distincta, quando lumen in ipso concursu radiorum retinam contingit, sive quando apices conorum luminosorum, qui e singulis objecti punctis egrediuntur (supponimus enim objectum esse sufficienter illuminatum), in ipsa retina efformantur. At visio confusa est, dum lux ad retinam pervenit vel ante, vel post punctum concursus.

207. Illud quoque jam diximus (174); imaginem vivacem & distinctam objecti, refractione radiorum in superficie convexa productam, esse in axe per centrum superficiei sphæricæ & objectum transeunte; unde apparet, objecta distincte videri haud posse, nisi oculo versus illa obverso, hoc est, nisi recta per centrum oculi & pupillæ transiens versus objecta dirigatur; quin non aliud punctum, si cum rigore loqui velimus, vere distincte cernitur præter illud, in quo ea recta terminatur.

208. Si objectum a superficie sphærica refringente convexa, cujus radius sit constans, certo intervallo remotum sit, dein ad eam immotam accedat, ejus imago a superficie refringente recedit (179): unde ut imago in eodem loco perstaret etiam admoto propius objecto, necesse foret, ut vel ipsa superficies refringens a loco imaginis removeretur, vel radius convexitatis minueretur, prout major objecti vicinia exigit: quippe postremum si fieret, imaginis distantia (quæ juxta formulas Artic. II (179) semper est mul-

tiplum

tiplum radii ſuperficiei ſphæricæ) ratione magnitudinis novi radii habita major evaderet, quamvis in ſe prorſus eadem maneret. Atque hoc eſt, quod bonitatem viſus apud quosdam ſingularem conſtituit, quibus nempe ita conformatus eſt oculus, motusque partium adeo expeditus, ut radiis lucis ex eodem puncto emiſſis pupillam fere parallele ingredientibus (objecto ſcilicet ad magnam diſtantiam remoto (202)) focus accurate in ipſa retina efformetur; dum vero accedente objecto radii ex eodem puncto venientes jam ad ſenſum quoque divergunt, ita pro diverſo objecti intervallo poſſint componere oculum, ut imago nihilominus ſemper ſuper retina depingatur, ſeu deinde id efficiant humorem cryſtallinum verſus pupillam admovendo, ſeu augendo illius convexitatem, ſeu etiam corneam reddendo magis convexam, aut denique bina ex iſtis, aut omnia tria ſimul præſtent, ut in quavis diſtantia objecta diſtincte cernant, modo ea nec in ſe nimis magna ſit, nec 5, vel ſex digitis minor.

209. Verum ſi contingat oculi vitio (ſeu id e natura advenerit, ſeu contractum ſit mala aſſuetudine, ſeu alicunde infortunato acciderit) ut muſculis tum firmitas, tum ſeſe contrahendi, laxandique facultas ad novam oculo conciliandam figuram neceſſaria deſit, tum equidem objecta diſtincte videri non poterunt, niſi quæ conſtituta fuerint intra certos diſtantiæ limites, ampliores, arctioresve, pro diverſa oculi, ut imagines in rectinam incidant, figuram ſuam mutandi poteſtate. Exempli cauſa ſi humor cryſtallinus, aut etiam anterior corneæ pars, nimium ſint convexa, locus verus imaginum objectorum valde remotorum eſt humori cryſtallino admodum vicinus, adeoque intra hunc humorem & retinam ; unde non niſi confuſe apparere debent, & ut in majore diſtantia ſuper ipſa retina depingantur, neceſſe eſt, ut objecta prope admoveantur. Atque hoc illorum eſt vitium, qui vicina modo diſcernunt, & *Myopes* appellantur.

210. Ex oppoſito, ſi ſegmentum anterius corneæ, vel humor cryſtallinus, tam exiguam habeant convexitatem, ut objectorum multum diſtantium ſolummodo imagines in retinam incidant, radii ex objectis vicinis venientes trans retinam ſuum focum habent ſitum ; quare cum jam intercipiantur in retina ante concurſum, objecta confuſe exhibeant, eſt neceſſe ; quod vitium eorum eſt, qui remota tantum vident, & *Presbytæ* dicuntur, quales magnam partem ſunt ſenes, apud quos ipſa ætas humores deſiccat, humoris cryſtallini convexitatem minuit, facitque, ut anterior corneæ pars ſubſidat aliquantum.

211. Itaque Myopes objecta vicina ſolum diſtincte cernunt, ſive illa, e quibus emiſſi radii ſenſibiliter divergunt; & Presbytæ

obje-

objecta remota tantum vident distincte, id est, ea, e quibus radii ad sensum paralleli veniunt; in sequentibus enim videbimus, quod si accurate loquamur, ad visionem distinctam necessarium sit, ut radii tantillum divergant (323). Jam vero ex theoria vitrorum concavorum & convexorum patet, radios parallele incidentes in vitra concava (sive qui e magna distantia veniunt) ex iisdem egredi divergentes, quia si concavitatis semidiametri utrinque sint æquales, radii in exitu e vitro acquirunt talem directionem, ut versus vitrum reducti concurrant in puncto intra vitrum & objectum sito, quod a dimidio axis parum abest. Quare Myops, in cujus oculum radii hunc in modum divergentes incidunt, objectum illorum discernere poterit; atque id genus vitium ope vitri concavi corrigetur, objectis remotis distincte apparituris, si concavitas conformationi oculi proportionata fuerit. Simili argumento colligitur, a Presbytis objecta vicina distincte videri posse, si in foco vitri convexi constituantur, quod radios e foco divergentes ad parallelismum refringit.

212. Verum nec Myopes, nec Presbytæ defectum ullum sentirent, si pupilla non tam late pateret. Si enim in oculum aditus per unicum tantum punctum foret, ut e singulis objecti punctis singuli tantum admitterentur radii, hi in singula, & separata retinæ puncta inciderent, ideoque imaginem distinctam efformarent, attamen ob paucitatem radiorum admodum debilem. Et nisi hæc debilitas visioni obesset, san promtum haberemus tam Myopibus, quam Presbytis remedium, scilicet tenuem & opacam laminam, exiguo foraminulo pertusam: quamvis fatendum, reipsa quibusdam in casibus eos hoc modo juvari.

213. Hinc etiam sequitur, *objecta per admodum parvum foramen visa debere distincte apparere, utcunque exigua eorum sit ab oculo distantia.*

214. Evenit quandoque, ut apud eundem hominem oculus alter sit recte constitutus, alter vitio, sive myopum, sive presbytarum, laboret. Tum vero ut talis objecta recte cernat, necesse est, ut oculum alterum, nulli defectui obnoxium, ea versus dirigat, alterum vitiosum ab iisdem avertat, utpote non recepturum nisi imaginem confusam, quæ alterius imagini distinctæ officeret. Hæc alterna, jam hujus, jam alterius oculi distorsio *Strabismus* appellatur, iique dicuntur *Strabi*, qui hoc vitio laborant. *

* Quod si alter oculus sit rite constitutus, alter presbytarum vitio subjectus, solum vitiosus avertendus est ab objectis vicinis, a nullo vero objecto is, qui vitio non laborat; si vitium alterius oculi sit myopum, & objecta sint justo viciniora, oculus integer averti debet in hoc solo casu. At si uterque oculus suo laboret vitio, alter myopum, presbytarum alter, tum vero alterna facienda est eorum distorsio, ut diversa fuerit objectorum distantia.

ARTICULUS III.

De Visione, quæ fit ope vitrorum, vel speculorum.

215. Cum objecta extra nos posita non aliter, nisi per imaginem in oculo depictam percipiamus, illud imprimis est manifestum, *quod ea videamus in directione radiorum, qua imaginem efformaturi oculum ingrediuntur*, quemadmodum jam superius est dictum (58). Quod si itaque radii oculum non subeant, nisi post complures refractiones, reflexionesque, quibus prima eorum, quam ab objecto emissi habuerant, directio admodum mutata est, fieri nequit, ut objectum videamus in linea recta, inde ad nostrum oculum ducta.

216. *Secundo.* Extra dubium quoque est, cum magnitudo apparens objecti, quacunque tandem ratione videatur, semper potissimum dependeat ab angulo ad oculum (77) qui a radiis ab extremis objecti punctis venientibus comprehenditur; si hic angulus sive refractione, sive reflexione reddatur major, minorve, quam citra eam, & nudo oculo objectum inspiciente foret; aut (quod idem est) *si angulus inter duos radios ab extremis imaginis ultima refractione, vel reflexione efformatæ punctis ductos comprehensus major sit vel minor, quam qui fieret, si ab extremis objecti punctis radii sine refractione aut reflexione ad oculum pervenirent, objectum auctum vel diminutum pro diversa anguli magnitudine appariturum: atque adeo oculo ad imaginem hanc ultimo efformatam accedente, vel ab eo recedente, objectum crescere, aut decrescere videbitur, etiam tunc, quando accessu ad imaginem oculus ab objecto recedit, & recessu ab imagine objecto reipsa vicinior fit*: est enim imago objecti vicaria, non nisi hujus ope videndi. Quod si autem *objectum, vel etiam objecti imago, talem situm respectu vitri cujusdam tenuissimi, aut speculi obtineret, ut radii inde egressi, vel illuc tendentes, per refractionem reflexionemve evaderent paralleli, oculus in radiorum directione collocatus objectum, aut imaginem illius, videret semper ejusdem magnitudinis, utcunque ad vitrum vel speculum accederet, vel ab eo recederet; essetque hæc magnitudo eadem, ac si oculus in loco vitri vel speculi constitueretur.* Etenim sit RS (fig. 27 & 28) semidiameter objecti vel imaginis ita respectu vitri CB sitæ, ut radii e puncto R digressi (aut ad hoc punctum directi) paralleli inter se exeant; vitri crassitie posita infinite parva unus ex his radiis RC (scilicet principalis) sine refractione transit (195). Sit porro radius SC e centro imaginis vel objecti emissus, qui cum axe vitri congruit: patet, oculo in C posito, ubi est vitrum, objectum, vel imaginem SR, sub angulo SCR appariturum; eodem vero in quovis axis puncto alio E constituto, modo illuc dirigatur radius e puncto R veniens (vel ad R tendens), angulum visorium fore

CEB = SCR. Idem eveniet, oculo in foco vitri, vel ſpeculi collocato, in quod radii ex imagine vel objecto quopiam paralleli incidunt: quæcunque ſit imaginis vel objecti diſtantia a ſpeculo, ſemper ejusdem magnitudinis oculo videbitur.

217. Quod ad diſtantiam oculi a loco, in quo objecta eſſe apparent, ea non deſumitur a diſtantia vera oculi a loco imaginis per ultimam reflexionem vel refractionem factæ. Sed quoniam de intervallo apparente præcipue judicium ferimus ex idea, quam de eorum magnitudine acquirimus (74, 101), conſequens eſt, ut cum objecta per imagines refractione aut reflexione auctas vel diminutas videmus, ea ad noſtrum oculum acceſſiſſe, aut ab eo receſſiſſe exiſtimemus, prout ratio magnitudinis viſæ ad magnitudinem, quam aliunde ſcimus objectis eſſe, poſtulat. Jam vero cum ſuperficies corporis directe viſi ſit baſis pyramidis luminoſæ (23) cujus apex eſt in oculo, quando idem apex una, pluribusve reflexionibus, vel refractionibus ſit magis obtuſus, objectum (quod ſemper videtur eſſe baſis pyramidis) hoc ipſo verſus oculum vel apicem novæ pyramidis admotum apparere debet. Oppoſitum continget, ſi apex pyramidis auctior evaſerit. Ex his ſequens conſtructio pro determinando loco apparente objectorum, quæ per vitra aut ſpecula conſpiciuntur, deduci poteſt. Sit RQ vera dimenſio objecti (fig. 29.); O locus oculi; OR axis pyramidis opticæ, qua objectum videtur; OT directio radii ab extimo puncto Q venientis poſt quotcunque refractiones vel reflexiones in ſuperficiebus ſphæricis, quarum axes omnes cadant in OR. Ducatur Q*q* ad OR parallela, donec occurrat radio OT; erit punctum *q* locus apparens puncti objecti Q, ſive ultimæ illius imaginis; O*r* diſtantia apparens ab oculo; *qr* locus apparens ultimæ imaginis reflexione vel refractione factæ, quam oculus O videt.

218. Hinc porro facile explicatur, cur objecta per vitra convexa aucta, & viciniora; per concava imminuta & remotiora appareant.

219. Denique intelligitur, quod radiis ab objecto emanantibus ita reflexis vel refractis, ut imago a tergo ſpectatoris depingatur, aut corpus opacum quodpiam inter eam, & oculum interponatur; objectum nulla ratione videri poſſit, quamdiu oculus in eodem manet loco. Quod ſi vero radii ita inflexi ingrediantur oculum, ut imaginem non niſi cis, vel trans retinam efformare poſſint, objectum confuſe tantum videbitur.

220. Hæc omnia ut exemplo generali explicentur, ſit GR (fig. 30) axis quotcunque vitrorum A, B, C; QR dimenſio objecti cujusvis; E locus oculi excipientis radium QKIHE, egreſſum primum a puncto Q, dein refractione lentis A ad K facta verſus F Tab: III fig: 30.

 dire-

directum, verum denuo refractionem in vitro concavo ad I passum, & versus *f* in egressu inflexum; tandem in transitu per novam lentem CH ad axis punctum E refractum, ubi in oculum incurrit. Patet *Primo*, cum ET sit directio postrema radii, qua ad oculum pervenit, ductis Q*q* ad GR, & *qr* ad QR parallelis, locum apparentem ultimæ imaginis objecti QR esse *qr* (217). *Secundo*, distantiam apparentem oculi ab objecto esse E*r*. *Tertio*, magnitudinem apparentem esse ad magnitudinem veram objecti, ut ER ad E*r*, quia scilicet ratio angulorum *q*E*r*, QER (qui per hypothesin sunt valde exigui) eadem est (79). *Quarto*, situm objecti esse vel erectum vel inversum, ut imago postrema cis vel trans centrum ultimi vitri vel speculi respectu objecti vel prioris imaginis, quæ objecti vicem egit, sita fuerit, quod inito calculo focorum pro singulis vitris determinatur. *Quinto*. Si rectæ, quæ medii puncti vitri distantiam ab extimo limbo metiuntur (qualis est CH) instar objecti alicujus considerentur, & earum situs apparens eadem ratione determinetur, qua N. 217 usi sumus, supponendo, quod per vitrum inter eas & oculum situm videantur, illa, quæ minimum angulum ad oculum subtendit, determinat angulum visionis, hoc est, spatium maximum, quod trans omnia vitra videri potest.

Si modo vocibus, *refractio*, *lens* &c. substituantur *reflexio*, *speculum* &c aut universim, *medium diversum*, facile intelligitur, omnia, quæ modo attulimus, Catoptricæ cum Dioptrica communia esse.

CAPUT V.

De Telescopiis & Microscopiis.

ARTICULUS I.

Notiones prævia.

221. Illud universim in *Telescopio* (sive tubo optico objectis dissitis contemplandis destinato) & *Microscopio* spectatur, ut *Primo* imaginem vivacem objecti, quod quis distincte videre cupit, exhibeat, obverso illi (objecto nempe) vitro utrinque convexo, aut plano-convexo, aut etiam menisco, vel speculo concavo (quod propterea *vitrum*, vel *speculum objectivum* appellatur). *Secundo* ut hanc imaginem nitidam, distinctamque videndam præbeat, imo auctam etiam ope alterius alicujus, pluriumve vitrorum, *quæ ocularia* dicuntur, quod ad eam partem collocentur, cui oculus est applicandus.

222. Duo

222. Duo itaque ſunt teleſcopiorum & microſcopiorum genera; alterum eorum, quæ ſolis vitris conſtant; alterum illorum, quæ tum ſpeculis, tum vitris ſunt inſtructa, ideoque *catadioptrica* vocantur.

223. *Campus* teleſcopii vel microſcopii dicitur totum illud ſpatium, quod oculus videre poteſt, ſi ita applicetur, ut microſcopium, vel teleſcopium totum ſuum effectum præſtare poſſit.

224. Quando deinceps *focum* ſimpliciter, & citra additum nominabimus, ſemper intelligemus locum concurſus radiorum refractorum, vel reflexorum, qui ab objecto ad diſtantiam infinitam remoto veniunt, ſive qui ex eodem objecti puncto digreſſi parallele incidunt. Idem eſt, ſi dicemus, vitrum, vel ſpeculum habere focum tot pedum vel digitorum.

225. Si detur vitrum, vel ſpeculum ſphæricum quodvis, longitudo foci experimentando determinari poteſt hunc in modum.

I. Si ſpeculum ſit cavum, & vitrum convexum, obvertatur ſoli, quæraturque illud punctum, in quo radii reflexi vel refracti, plano quopiam excepti, efficiunt circulum quam minimum, atque luce candidiſſima & vivaciſſima, materiamque combuſtioni aptam quam citiſſime incendunt. Vel vero tegatur ſpeculum, vel altera vitri ſuperficies, charta nigro colore tincta, & pluribus foraminulis acu factis pertuſa; tum quæratur diſtantia, in qua radii ſolis per hæc foramella ingreſſi rurſus uniuntur, atque unicum circulum candidum efformant. Vel denique obvertatur ſpeculum aut vitrum candelæ ardenti, & ad magnum intervallum remotæ, ut ſit ultra ſpeculi vel vitri centrum; quæratur diſtantia tum a candela, tum a ſpeculo vel vitro, in qua collocanda eſt tabula, ut imago candelæ inverſa, maxime diſtincta, quamque minima depingatur; utraque hac diſtantia habita, ope formulæ calculari poteſt radius concavitatis ſpeculi, vel convexitatis vitri, adeoque innoteſcet longitudo foci, quæ in ſpeculo eſt radii dimidia; in lente utrinque æqualiter convexa, ipſe fere radius; in vitro plano-convexo, dupla.

226. II. Si ſpeculum ſit convexum, vel vitrum concavum, tegatur rurſus ſpeculum, vel altera vitri ſuperficies charta nigra, foraminulis pluribus in circuli circumferentia exciſis; radii ſolis per ea tranſmiſſi, atque poſt refractionem vel reflexionem tabula excepti, divergent, totidemque maculas albas depingent, omnes in circuli eo majoris peripheria ſitas, quo tabula longius removetur: dum igitur diameter hujus circuli dupla erit illius, in quo foramina chartæ ſunt inciſa, tabulæ a ſpeculi vel vitri puncto medio diſtantia æquabitur longitudini foci quæſitæ.

227. Dum focus ſpeculi convexi quæritur, in tabula, qua radii reflexi excipiendi ſunt, exſcindendus eſt circulus paullo major illo, in cujus peripheria ſita ſunt foramella, quæ in charta ſpeculum tegente facta ſunt; ut ſcilicet lux ſolaris commode in eadem incidere poſſit.

ARTICULUS II.

De Teleſcopiis Dioptricis, ſive refringentibus.

228. Tres fere cenſentur Teleſcopiorum refringentium, ſeu ſpeculo reflectente carentium, ſpecies, figura, diſpoſitione, & numero vitrorum ocularium inter ſe diverſæ.

229. Prima eſt teleſcopii, quod *Batavum*, ſive *Hollandicum*, aut *Galilæanum* dicunt, prima quoque circiter annum 1609. reperta, atque quadraginta fere annis una adhibita. Hic tubus vitrum oculare habet unicum vel utrinque concavum, ut PQ (fig. 31), vel plano-concavum, intra objectivum convexum vel plano-convexum, ac ejus focum ita collocatum, ut axes utriusque in eandem rectam A*o*, & foci in idem punctum *o* coincidant.

230. Ex hac conſtructione patet *primo*, quod cum vitrum objectivum longe magis patere poſſit, quam pupilla oculi, longe quoque majorem radiorum copiam ex eodem objecti puncto emiſſorum excipiat, quam alias ad oculum perveniret. *Secundo*, quod radii ab objecto O admodum remoto paralleli (ut hic per AD, & duas utrinque parallelas exhibentur) in vitrum objectivum MN incidentes, ac ejus refractione ad punctum *o* convergentes, in egreſſu e vitro oculari rurſus fiant paralleli (197); & quia vitrum oculare prope *o* conſtitutum eſt, ubi eſt vertex coni radioſi per vitrum objectivum collecti, atque adeo radii admodum denſi; etiam in exitu e vitro iidem adhuc valde denſi eſſe debent. Unde *tertio* ſi poſt vitrum oculare incidant in oculum rite conformatum, vel alicujus presbytæ, (211) imaginem objecti ſui eo vivaciorem depingent, quo faſcis lucidus ex oculari vitro egreſſus denſior eſt illo, qui in vitrum objectivum incidit, & quo vitri objectivi major eſt amplitudo, quam pupillæ.

231. Quod reliqua puncta objecti OB, velut B, extra axem teleſcopii A*o* ſita concernit, eodem modo patet, quod radii, hic per CD, eique utrinque parallelas deſignati, ex iis in vitrum objectivum paralleli veniant, dein refracti ad punctum *b*, puncto *o* vicinum (187), tendant, ac tandem e vitro oculari PQ ad ſenſum paral-

paralleli, & valde densi egrediantur, ut in oculo nullo vitio laborante, vel presbytæ, imaginem admodum vivacem efforment sui objecti B. Verum quia fascis hic radiosus puncti B imaginem depingens in egressu ex oculari vitro divergit ab altero, qui imaginem puncti O exhibet, idem oculus utramque imaginem simul excipere nequit, nisi vel pupilla admodum diducatur, vel puncto F, ad quod radii P*c* reducti tendunt, sit valde vicina. Ex quo infertur, *ope ejusmodi telescopii eo plures objecti partes simul videri posse, quo oculus vitro oculari propior, & ejus pupilla amplior fuerit.* Et quia pupilla non modo per se exigua est, sed etiam nobis nolentibus contrahitur copiosiore luce incidente, consequitur, *campum talis telescopii eo fore minorem, quo objectum lucidius, & longitudo foci vitri ocularis fuerit major.* Denique quoniam natura lucis focum tam brevem, ac quis cupiat, non patitur; imo vero focos vitrorum ocularium eo longiores exigit, quo longiores sunt foci vitrorum objectivorum, ut in sequentibus videbimus (270), necesse est, *ut campus in his telescopiis sit tanto minor, quanto major est tubi longitudo.* Atque hoc incommodum fecit, ut usus id genus telescopiorum pene sit abolitus pro objectis admodum remotis, quæ tubos longiores requirunt; nec amplius, nisi valde brevia conficiantur, in quibus augmentum modicum exigitur, quæ vulgo *tubulos theatrales* appellant.

232. Ipsa quoque hæc constructio indicat, objectorum situm fore erectum; radii enim *c*, objecti extremum B exhibentes, infra axem A K positum, ad oculum directione *c*F veniunt, quæ producta infra axem descendit.

233. Si supponatur *objectum magis semper, magisque versus vitrum objectivum accedere*, consequens est (196), ut imago simili ratione longius removeatur; adeoque etiam *oculare, prolongato tubo, in majore distantia applicari debebit*, ut ejus focus semper cum imagine per objectivum depicta coincidat.

234. Myops vitrum oculare objectivo propius admovere debet, ut distincte videat. Hoc enim si fiat, radii, qui prius paralleli egrediebantur, fiunt divergentes. Nam imagine *bo* (si ea instar objecti consideretur) recedente a foco vitri concavi, radii refracti, & versus alteram partem producti minus divergunt, adeoque ex parte ipsius *bo*, ubi prius paralleli erant, jam divergere debent versus oculum (199).

235. II. Altera telescopiorum species eorum est, quæ quod observationibus syderum sint aptissima, ideoque sola fere hunc in usum conficiantur, *tubi astronomici* vocantur. Unica instructa sunt lente oculari utrinque convexa (aut plano-convexa) P Q (fig. 32)

quæ

quæ ea ratione collocanda eſt, ut ejus focus *o* cum foco vitri objectivi M N inter utrumque vitrum in axe communi congruat.

236. Hæc conſtructio oſtendit *primo*, radios ab objecti puncto O admodum remoto (& per hypotheſin in axe producto exiſtente) parallele incidentes (ac propterea per A D & utrinque parallelas exhibitos) ſeſe refractione vitri objectivi in ejus foco interſecare, illicque imaginem *o* puncti O efformare.

237. *Secundo.* Hanc imaginem vicem objecti in foco lentis ocularis P Q collocati agere, conſequenter radios ab ea in lentem ocularem emiſſos ita refringi (196) ut paralleli inde egrediantur, eo autem denſiores, quo focus ocularis brevior eſt foco vitri objectivi: & hinc in oculo presbytæ (211), vel nulli vitio obnoxio, novam efformari imaginem objecti O, tanto vivaciorem, quanto amplius eſt vitrum objectivum, ſive plus lucis admittit.

238. *Tertio.* Ab oculo in quacunque ab oculari vitro diſtantia, modo faſcis radiorum parallelorum in eum incurrat, æque bene imaginem videri, quam iidem radii in communi vitrorum foco depingunt.

239. *Quarto.* Per radios parallele ab objecti O B extremo B venientes, ac per vitrum objectivum refractos, debere prope *o* efformari imaginem *b* puncti B (188); hinc autem incidentes in vitrum oculare, poſt refractionem inter ſe parallelos egredi, cumque axe eo propius ad hoc vitrum concurrere, quo major eſt ejus convexitas, ita ut hic concurſus in foco ejus F fiat. Unde ut oculus totam ſimul imaginem *ob* videat, neceſſe eſt, ut ad punctum F conſtituatur, communem nempe interſectionem omnium faſciculorum lucis ex omnibus imaginis *ob* vel objecti O B punctis venientium.

240. *Quinto* objectum O B videri inverſum, quia ejus imago *ob*, quæ in lentem ocularem radiat, jam habet ſitum oppoſitum ſitui objecti, & punctum illius *b* per radios divergentes ſupra axem refertur, exiſtente extremo objecti B infra axem.

241. *Sexto.* Amplitudinem campi hujus teleſcopi præcipue pendere a magnitudine ſpatii ad *ob*, quod in foco communi utriusque vitri eſſe cenſetur, cum oculus in F conſtitutus omnes objecti partes videre poſſit, quarum imagines in ocularis foco, aut huic valde vicinæ, depinguntur. Atque ob hoc commodum prioris generis teleſcopiis merito præfertur.

242. *Septimo.* Accedente magis objecto ad vitrum objectivum, imaginem ejus longius removeri (196); & hinc etiam vitrum oculare, prolongato tubo, majorem debere acquirere diſtantiam, ut imago ſemper in ejus foco perſtet. Quare per hujusmodi teleſcopia tam objecta diſſita, quam vicina recte exhibentur, modo competens utriusque vitri intervallum ſervetur.

243.

243. *Octavo*, si myopes hisce utantur, lentem ocularem propius ad objectivam admoveri oportere, sive ad ejus imaginem *ob*, ut hac intra focum ocularis constituta, radii ex oculari egressi divergant (196).

244. III. Tertium Telescopiorum genus ad contemplanda objecta terrestria in usu, a priore non differt, nisi quod duæ præterea addantur lentes oculares, ut imaginis *ob* situs inversus erigatur. Ipse figuræ 33 aspectus constructionem docebit. Quatuor vitra MN, PQ, RS, TV habent axem communem A*f*. Focus cujusvis vitri coincidit cum foco binorum utrinque positorum, solentque ocularia ejusdem fere foci adhiberi. Sit OB objectum infinite dissitum, & punctum ejus O in axe telescopii: radii inde paralleli in vitrum objectivum incidentes, per refractionem in ejus foco *o* imaginem puncti O efficiunt, e qua in oculare PQ incurrentes ad parallelismum inter se, & focum F refringuntur; hinc digressi in secundum oculare RS ad ejus focum ω convergunt, alteramque objecti O imaginem depingunt, unde tandem in tertium oculare TV venientes rursus paralleli fiunt, ut oculo recte constituto, vel etiam presbytæ, excepti objectum suum vivace imagine exhibeant. Simili modo radii a puncto B ad vitrum objectivum paralleli venientes in ejus foco *b* prope *o* primam efformant imaginem (187); dein in vitro oculari PQ refracti, paralleli inter se axem eo propius ad PQ intersecant, quo focus hujus lentis est brevior. Hinc in RS delati, atque ad ejus focum inflexi secundam puncti B imaginem β constituunt, donec tandem ab ultima lente TV inter se paralleli ad ejus focum *f* refringantur, in quo constituendus est oculus, ut imaginem ωβ videat, uti superius (239) diximus, quæ habet situm erectum, sive eundem cum objecto OB.

245. Telescopia modo descripta, quæ per *quatuor vitrorum* numerum plerumque designantur, easdem, ut patet, proprietates generales habent, ac Astronomica. Sed ob quæ Astronomica his præstant, & eorum in observationibus præfertur usus, sunt *primo*, quod tubus Astronomicus ampliorem habeat campum. *Secundo*, quod lentem ocularem minoris foci patiatur, ideoque majoris sit augmenti. Utriusque rationes in sequentibus videbimus. *Tertio*, quod brevior sit. *Quarto*, quod in eo minus radiorum pereat, qui non nisi per duo vitra trajici debent.

ARTICULUS III.

De Telescopiis Catadioptricis.

246. Telescopii catadioptrici munus generatim est, fasces lucis ab objecto venientes a via detorquendo colligere, ut in

 oppo-

opposito speculo concavo reflexi convergant, & imaginem sui objecti in axe speculi, vel pone eum, depingant, velut in F′ (fig. 35). Situs hujus imaginis intra speculum & objectum impedit, quo minus per unam, aut tres lentes oculares directe videri possit: ad hoc enim opus esset, ut spectator caput inter obiectum, & imaginem interponeret, quo fieret, ut lumen nec sufficiens, nec satis prope axem, in speculum illabi posset.

247. Ad hoc incommodum tollendum, specillum exiguum planum IH ad angulum 45 graduum cum axe inclinatum ita collocatur, ut apicem coni radiosi, in quo imago est, ad *o* reflectat; tum in recta *o*K, una, tresve lentes oculares applicantur, prout situs objecti inversus, erectusve exhiberi debet; quem in finem latus tubi specula continentis MN perforatur.

248. Præcipuum in hoc telescopiorum genere, quod Newtonianum appellatur, commodum est, quod licet multo breviora sint refringentibus, eundem tamen effectum præstent. Cujus rei causa est, tum quod imago a speculo objectivo formata ab eodem non amplius quarta axis parte absit, si objectum infinite distet, quæ per vitrum æqualiter utrinque convexum in distantia semiaxis depingitur; tum etiam quod imago non intra speculum objectivum & lentem ocularem sit, ut in telescopiis dioptricis primi, ac secundi generis; maxime vero quod speculum objectivum patiatur ocularia diversorum focorum, imo brevissimi. Ex quo fit, ut idem telescopium catadioptricum pluribus tubis dioptricis diversæ longitudinis æquivaleat, cum hi effectum debitum præstare nequeant, nisi ocularibus iis instructi sint, quorum foci ad focos objectivorum rationes determinatas habeant, quarum rationum tamen valde arcti sunt limites, ut deinceps videbimus.

249. Cum imago a speculo objectivo recedat, objecto ad illud accedente (145), ut usus sit hujus telescopii, manifestum est, debere specillum IH esse mobile, ut imago semper in focum ocularis incidat. Itaque etiam necesse est, ut moto intra tubum specillo IH simul secundum latus tubi MN ipsum oculare in eandem partem moveatur, ut nempe ejus focus semper congruat cum apice coni radiosi a specillo HI reflexi.

250. Patet præterea, myopes debere specillum planum aliquantum ad speculum objectivum admovere, ut imagine intra lentem ocularem & ejus focum constituta radii ita divergentes in eorum oculum veniant, ut hujus conformatio ad visionem distinctam postulat.

251. Al-

251. Alterius quoque formæ, paulloque magis compositæ, telescopia catadioptrica construuntur, tam objectis terrestribus, quam cælestibus apta, quæ Gregoriana appellant. En brevem descriptionem. Objecto speculum sphæricum concavum AB (fig. 36) opponitur, & paullo ultra focum F in ejus axe collocatur alterum specillum multo minus itidem concavum CD, sed foci brevioris, ita, ut utriusque axes congruant. Imago F intra hujus specilli focum G, & centrum E posita, ejus respectu vices objecti agit. Quare (143) in eodem axe secunda imago H efformabitur, eo longius ultra centrum E specilli CD, quo prior F foco G vicinior est. Et quia specillo CD ad imaginem F admoto propius, vel ab eadem remoto, imagini H distantia quævis tribui potest, solet ea tantillum intra speculum AB in medio ad I foramine circulari præditum, constitui, ut per lentem ocularem PQ videri possit. Manifestum autem est, hanc imaginem apparituram situ erecto, cum respectu imaginis F, situm objecti invertentis, inversa sit.

252. Quando objectum est copioso lumine illustratum, ut major fiat secunda imago, ea trans speculum AB versus O dirigi potest, & in O focus vitri ocularis PQ constitui, ut radii versus O convergentes e vitro paralleli egrediantur, ac postea lente ultra O excepti iterum colligantur ad punctum, in quo oculus est collocandus.

253. Ex dictis constat, per specillum parvum in utriusque hujus telescopii axe situm intercipi radios lucis parallelos, qui in medium speculi objectivi inciderent. Unde nil refert, seu hoc speculum in medio pertusum sit, seu integrum.

254. Incommoda his telescopiis annexa sunt, quod modicum habeant campum; quod difficulter versus objecta dirigantur; quod multis cautelis tum in constructione, tum in usu eorum opus sit; quod cum magni sint pretii, damnum tamen facile accipiant.

ARTICULUS IV.

De Microscopiis.

255. I. Microscopiorum, quæ in usu sunt, prima species est simplex vitrum MN (fig. 34) vel utrinque, vel una ex parte convexum, quod *vitrum auctorium* generatim appellant. Itaque si objecti considerandi BO punctum O ad focum in axe collocetur, radii inde emissi e vitro paralleli egrediuntur, apti proinde, qui imaginem illius in oculo recte constituto, vel presbytæ,

in quavis diſtantia efforment, modo oculus in eorum directione reperiatur. Myops objectum paullo intra focum conſtituet, ut imaginem accurate depictam videat. Punctum B ejusdem objecti, axi valde vicinum, ut in lentis foco poſitum cenſeri adhuc poſſit, pariter emittet radios, qui refractione ad ſenſum paralleli fiant, eoque magis ad axem inclinati, quo convexitas lentis minoris ſphæræ fuerit, ſive foci brevioris. Quare ſi oculus prope o, ubi radius principalis B C axem ſecat (ideoque in valde parva a lente diſtantia) ponatur, objectum O B ſub angulo B o O tanto magis auctum videbitur, quanto minore intervallo ab oculo abeſt, quam ſoleat illud eſſe, in quo objecta alias diſtincte videre conſuevimus.

256. Exempli gratia, quia objecta mediocri viſu præditi non ſolent diſtincte videre nudo oculo, niſi ea 7, aut 8 circiter digitis diſtent, ſi hæc diſtantia recta $o\,\omega$ deſignetur, & ope lentis objectum diſtincte appareat, nemo ſibi facile perſuadebit, ejus diametrum B O eſſe oculo adeo vicinam, ut reipſa eſt; ſed eam circa ω exiſtere putabit, ideoque in ratione $\omega\beta$ ad O B, ſive $o\omega$ ad o O auctam (79). E quo ſimul conficitur, *magnitudinem apparentem objecti per lentem viſi dependere ex parte ab ipſa oculi conformatione.*

257. II. Sed lente hac in re longe ſuperior eſt ſphærula vitrea, facile parabilis, ſi ad flammam ſpiritus vini ellychnio affuſi (ne admiſta fuligine opaca reddatur) exiguum vitri fruſtulum colliqueſcere ſinatur. Reſumpta enim formula N. 182, ac poſito $p = 3$, $q = 2$, fit $x = \frac{6drR + 4erR - 2deR}{3dR - 6rR - de + 3dr + 2er}$; quæ ut ſphæræ vitreæ accommodetur, ſumi debet $e = 2r$; $r = R$, & $d = \infty$; his ſubſtitutis habetur $x = \frac{1}{2} r$; hoc eſt, objecto in axe ſphæræ ad diſtantiam quartæ partis diametri collocato, radii prope axem in ſphæram incidentes, egrediuntur inter ſe paralleli; ergo diſtincte objectum videbitur, eoque magis auctum, quo oculo fuerit vicinius, & conſequenter quo minor fuerit ſphæræ diameter.

258. Vicem etiam microſcopii ſimplicis obire poteſt globulus vitreus cavus & aqua repletus, qui eundem fere præſtat effectum, quem ſphæra aquea, tum quod craſſities vitri exigua ſit, tum etiam quod ſuperficies utraque concentrica eodem modo refringat radios, ac ſi ſola aqua adeſſet. Verum quia lux minus refringitur in aqua, quam vitro, ratione ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis in aqua exiſtente 4 ad 3 circiter, focus, in quo collocandum eſt objectum, ut radii in ſphæram incidentes refringantur ad parallelismum in egreſſu, diſtat a ſphæra ſemidiametro, ut facile invenitur e formula generali pro focis data (182), ſi fiat $p = 4$, $q = 3$, $r = R$, $e = 2r$, & $d = \infty$. E quo liquet,

quet, horum globulorum non esse tantum augmentum, quam eorum, qui e vitro solido funduntur.

259. Parari quoque potest lenticula mere aquea, si exiguum laminæ tenuis metallicæ foramellum gutta aquæ ope acus imposita repleatur, ne ejus limbis madefactis aqua convexitatem amittat. Major adhuc erit talis lenticulæ effectus, si in lamina $\frac{3}{4}$ lineæ circiter crassa utrinque cavitas sphærica exigua fiat, axe communi per oppositos utriusque vertices transeunte, & inæqualis radii, ita ut tenuissima laminæ pars vertices separet, quæ dein acus cuspide perforetur; repletur tum duplex hæc cavitas aquæ gutta.

260. III. Altera Microscopiorum species Telescopiis Astronomicis non absimilis est. Constat duabus lentibus convexis, quarum objectiva MN (fig. 37) est foci admodum brevis, extra quem paullum collocatur objectum OB, ut ejus imago *ob*, in aliqua distantia, & cum proportione aucta, efformetur (196): tum, ut distincte videri possit, focus lentis ocularis ad eundem cum hac imagine locum constituitur.

261. Ex hac constructione patet *primo*, *distantiam imaginis a lenticula objectiva magnas subire mutationes*, *dum intervallum inter eam*, *&* *objectum* O B *paullum mutatur* (196). Et quoniam difficillimum est, ut quis in distantia data, ac loco eodem objectum certo collocet; in usu hujus microscopii lens ocularis tamdiu versus objectivam admovenda est, vel ab ea retrahenda, donec imago objecti distinctissime depingatur; aut vero necesse est, ut in objecto ipso, vel toto microscopio motus, ut res postulat, quam lentissimus effici possit: id, quod pro diverso microscopii apparatu facilius, difficiliusve obtinetur. *Secundo* colligitur, *objectum debere eo majus apparere*, *quo ejus imago* o b *longius abest a vitro objectivo* M N; *&* (*cum postea per lentem ocularem videatur*) *quo oculo est propior*, *quam sit intervallum*, *ad quod objecta sine vitris distincte videre solemus*. *Tertio* manifestum est, *magnitudinem apparentem objecti debere mutari*, *quando hoc a lente objectiva recedit*; nam objecto recedente, ejus imago versus eandem accedit, ac simul minuitur.

262. IV. Quandoque fere circa medium inter lentem objectivam MN, & imaginem *ob*, altera ocularis interponitur, ut imago propius multo ad lentem objectivam formetur, adeoque tubus microscopii brevior adhiberi possit. Hac ratione simul campus microscopii amplior redditur, quemadmodum id patebit, si ipsa figura construatur, & quæ N. 220 adduximus, rite applicentur.

263. V. Denique fieri possunt microscopia catadioptrica, objecto inter focum & centrum speculi concavi constituto, ut imago ultra centrum efformata (143), ac lente oculari excepta distin-

ꝯte videatur. Apud Smith extat etiam deſcriptio microſcopii e duobus ſpeculis ſphæricis compoſiti, concavo altero; altero convexo, utroque in medio foramine circulari prædito, ut lux liberum acceſſum habeat. Collocatur autem objectum inter centrum & focum ſpeculi concavi, a quo reflexi radii in convexum incidunt, unde denuo reflexi imaginem prope foramen ſpeculi concavi depingunt, ope lentis ocularis ſpectandam.

ARTICULUS V.

Animadverſiones generales in Teleſcopia & Microſcopia.

264. I. *Tangens anguli, ſub quo ſemidiameter objecti per primæ & ſecundæ ſpeciei teleſcopia dioptrica* (imo etiam tertiæ, ſi trium lentium ocularium ſit idem focus) *videtur, eſt ad tangentem anguli, ſub quo nudo oculo ſpectatur, ut longitudo foci vitri objectivi ad longitudinem foci ocularis*, neglecta ſcilicet vitrorum craſſitie.

Nam objecti extremitas altera B (fig. 31 & 32) per faſcem radiorum parallelorum F*c*; altera vero per faſcem *o* K repræſentatur: angulus igitur, ſub quo objectum per teleſcopium videtur, eſt ille, quem axes utriusque faſcis F*c*, & *o*K comprehendunt. Et quoniam imago *o b* in foco ocularis P Q exiſtit, radii e puncto *b* (quod tanquam objectum ab aliis ſeparatum & ſolitarium conſiderari poteſt) in vitrum oculare incidentes, ex eodem cum radio principali paralleli egredi debent (196); ergo angulus *c* F K = *b* K *o*. Sed angulus O D B, ſive huic æqualis *b* D *o* (quia radius B D ſine refractione per vitrum M N tranſit (195)) eſt ille, ſub quo oculus in D collocatus objectum ſine teleſcopio videret; quare angulus, ſub quo objectum per teleſcopium apparet, eſt ad angulum, ſub quo nudo oculo ſpectatur, ut *b*K*o* ad *b* D *o*. Eſt autem, ſumpto radio *b o*, in triangulo rectangulo *b*K*o*, *o*K cotangens anguli *b*K*o*; & in triangulo *b D o*, *o*D cotangens anguli *b*D*o*; ergo cotangentes horum angulorum ſunt ut *o*K ad *o*D; ergo (Elem. 737) tangentes eorundem ſunt reciproce ut *o*D ad *o*K.

265. COROLL. I. Quia magnitudines apparentes objectorum maxime dependent ab angulis opticis, ſub quibus eorum ſemidiametri videntur; ſequitur, *diametrum objecti per teleſcopium viſam eſſe ad eandem ut nudo oculo apparet, ſicut eſt longitudo foci vitri objectivi ad longitudinem foci vitri ocularis*; ſive, quod idem eſt, *magnitudines apparentes diametri ejusdem objecti per diverſa teleſcopia viſi eſſe inter ſe in ratione compoſita ex directa longitudinum focorum vitrorum objectivorum, & reciproca longitudinum focorum ocularium.*

266. Co-

256. Coroll. II. Et quoniam (79) diſtantiæ apparentes objectorum ſunt reciproce ut anguli optici, ſub quibus eorum ſemidiametri videntur; erit *diſtantia apparens objecti per tubum opticum ſpectati, ad ejusdem diſtantiam apparentem, ſi nudo oculo videatur; ut eſt longitudo foci vitri ocularis ad longitudinem foci lentis objectivæ.*

267. Quod hic de teleſcopiis dioptricis oſtendimus, verum etiam eſt de catadioptricis, & microſcopiis ſecundæ ſpeciei, quemadmodum patebit, ſi quod diximus, ad verbum applicetur ad figuram 35; modo literæ *o'*, *b'*, *c'*, K', F', virgula notatæ ſubſtituantur literis *o*, *b*, *c*, K, F, & ſupponatur radius O D axi admodum vicinus, ut triangulum *o' b'* D pro rectangulo haberi poſſit; dein dum applicatio ad microſcopia in figura 37 fit, loco *longitudo foci vitri objectivi*, poſitum intelligatur *diſtantia imaginis a lente objectiva.*

268. Coroll. III. *Ut objecta per teleſcopia quam maxime aucta apparerent, neceſſe foret, ut longitudo foci vitri objectivi eſſet admodum magna, & longitudo foci ocularis valde exigua.* Et propterea eo longiores adhibentur etiam tubi, quo objecta & minora ſunt, & magis diſſita. Verum figura ſphærica, quæ vitris tribuitur, & natura lucis faciunt, ut effectus, quem quis forte ſibi ſpondeat, expectatione ſit inferior. Rationes in ſequentibus dabimus.

269. II. Teleſcopia & microſcopia, quæ imaginem objecti in foco lentis ocularis ex altera reſpectu oculi parte efficiunt, illud habent commodi, quod omnes hujus imaginis dimenſiones menſurari poſſint ope filorum tenuiſſimorum, quæ per totum ſpatium, quod occupat, mobilia ſunt: ejusmodi fila ſumi poſſunt e folliculo bombycis; machina autem ad motum filorum efficiendum, ejusque quantitatem metiendam, conſtructa *micrometrum* dicitur. Hæc fila diſtinctiſſime videntur, vitro oculari eorum reſpectu vices microſcopii primæ ſpeciei obeunte; & tanto accuratius imaginis dimenſiones acquiruntur, quanto eadem majus augmentum a vitro oculari accipit, & ſimul quo fila exactius in eodem cum imagine plano fuerint conſtituta: reddimur vero de hoc certi, ſi filis & objecto immotis, oculus jam in hanc, jam in alteram partem moveatur, & nihilominus eadem objecti pars ad eandem partem fili ſemper videatur.

270. Quod ſi moto, ut dictum eſt, oculo advertatur, objectum non ad easdem filorum partes manere immotum, micrometrum *parallaxin* habere dicitur, qua voce ſignificamus, objectum apparere in diverſis locis, ut diverſa eſt oculi poſitio. Tollitur hic defectus, ſi margines reticuli, in quibus fila tenſa ſunt, vel ad vitrum objectivum, vel ad oculare propius admoveantur, prout

oculo

oculo recedente objectum vel attolli vel deprimi refpectu filorum videtur.

271. *Micrometri ufus errori eft obnoxius*, five, quod eodem recidit, error a parallaxi filorum pendens fit eo minus fenfibilis *quo minus eft fpatium, per quod fila moventur; quo minor eft vitri objectivi apertura; & quo longior eft focus ocularis.* Ut enim fecure, & citra erroris periculum, micrometro utamur, neceffe eft, ut ejus fila accurate in eodem plano fint pofita, in quod foci vitrorum objectivi & ocularis coincidunt: jam vero foci utriusque fiunt in fuperficiebus fphæricis (189) externe fe tangentibus, quæ adeo cenferi nequeunt in eodem ad fenfum plano, nifi quatenus hoc fpatium exiguum eft, & utriusque fuperficiei radius fat magnus. In fequentibus porro oftendetur (279 & 298), imagines objectorum non formari in ejusdem ad fenfum fuperficie fphæræ, nifi quando apertura vitri objectivi modica eft.

272. III. Si fervata eadem vitri objectivi, in eodem telefcopio, apertura, diverfa fucceffive ocularia adhibeantur ad idem objectum contemplandum, hoc eo obfcurius apparet, quo oculare brevioris fuerit foci. Etenim fafciculi radiorum parallelorum omnes fefe interfecant in eo axis puncto, in quo collocandus eft oculus, adeoque efformant conum aliquem, cujus bafis eft vitrum oculare, apex in oculo: eft vero hic eo magis obtufus, quo focus ocularis eft brevior; unde neceffe eft, ut radii magis a fefe invicem feparati, ac minus denfi, oculum ingrediantur, & confequenter imaginem minus vivacem, licet majorem, depingant. Itaque *obfcuritas imaginum eft in ratione reciproca duplicata longitudinum focorum vitrorum ocularium.* Nam cum eadem fit luminis quantitas, manente per hypothefin eadem vitri objectivi apertura; eo major eft obfcuritas, quo minor eft denfitas luminis; hæc vero eo eft minor, quo fpatium a lumine occupatum majus eft, hoc eft, quo areæ, in quibus imagines depinguntur, funt ampliores, & confequenter (Elem. 608) quo diametrorum apparentium quadrata funt majora; igitur obfcuritas in telefcopiis eft directe ut quadrata diametrorum apparentium imaginum. Sunt autem (265) diametri apparentes in ratione compofita ex directa longitudinum focorum vitrorum objectivorum, & reciproca longitudinum focorum ocularium; ergo longitudine foci vitri objectivi manente eadem, funt diametri apparentes imaginum in ratione reciproca longitudinum focorum ocularium: & hinc manente eodem vitro objectivo, obfcuritas imaginum eft in ratione reciproca duplicata longitudinum focorum ocularium.

273. IV. Duo telefcopia, vel duo microfcopia æqualis bonitatis in fuo genere cenfentur, quando objecta eadem claritate, five eadem vivacitate luminis oftendunt. Quod fi jam vitra

tra objectiva & ocularia in utroque ex materia æque bona elaborata ſupponantur, ſi eorum figura, & politura æqualis ſint perfectionis, erit *claritas objectorum in ratione compoſita ex directa duplicata diametrorum aperturæ vitrorum objectivorum, & reciproca duplicata numerorum, qui utriusque teleſcopii vel microſcopii augmentum exprimunt.* Sit claritas $= c$, diameter aperturæ $= d$, diſtantia vitri objectivi ab imagine $= a$, longitudo foci vitri ocularis $= b$, adeoque (265) ratio augmenti $\frac{a}{b}$: dico eſſe $c = \frac{bbdd}{aa}$. Nam areæ imaginum in retina depictarum, ſunt ut areæ, quas occupant imagines a vitro objectivo efformatæ; hæ vero ſunt (Elem. 608) ut quadrata diametrorum, adeoque (265) ut $\frac{aa}{bb}$: quare ſi areæ imaginum in retina factarum ſint eædem, earum claritas erit ut quantitas luminis per vitrorum objectivorum aperturas incidentis, ſive ut quadrata diametrorum aperturarum (Elem. 608); ergo quadratis augmenti iisdem exiſtentibus, claritas eſt in ratione duplicata diametrorum aperturæ, ſive $c = dd$. Verum ſi ponantur aperturæ objectivorum eædem, quantitates luminis eædem quoque ſunt, ideoque claritas imaginum eſt in ratione reciproca duplicata diametrorum earum, hoc eſt, $c = \frac{bb}{aa}$. Ergo ſi nec eædem ſint objectivorum aperturæ, nec eadem imaginum augmenta, earum claritas erit $c = \frac{bbdd}{aa}$.

274. V. Teleſcopia majora, quæ diametros objectorum octuagies vel centies majores exhibent, non poſſunt objecta terreſtria diſtincte repræſentare, ſed uſum habent ſolum in obſervatione ſyderum. Lumen enim ex objectis terreſtribus diffuſum, jam alias longe debilius, quam quod ex aſtris allabitur, nimium diſpergitur in tam amplis imaginibus, quas vitra objectiva talium teleſcopiorum efformant. Quin etiam radii ex objectis terreſtribus ad teleſcopia prope terræ ſuperficiem, eam veluti perſtringentes adveniunt: in progreſſu ubique fere magnam partem intercipiuntur, aut detorquentur ab occurrentibus craſſioribus particulis in atmoſphæra perpetuo aſcendentibus, & agitatis; unde imago tremula, & male terminata apparet. Poſtremum hoc incommodum experimur, ſi tempeſtate calida, vel vento vehementiore vapores humidos agitante, quamvis cælum ſudum alias & innube videatur, aſtra ſpectemus.

CAPUT VI.

De Obstaculis, quae in Constructione Telescopiorum & Microscopiorum se produnt, & eorum perfectionem necessario minuunt.

275. Duplex obstaculorum genus sese offert in constructione cujusvis machinae dioptricae & catoptricae: alterum a figura pendet, superficiebus refringentibus, aut reflectentibus tribuenda, quae vel plana est, vel sphaerica: saltem perquam difficile, & vix non physice impossibile est, ut iis alia accurate concilietur; alterum a resolutione lucis in diversae naturae radios, quando refringitur, vel reflectitur, provenit.

ARTICULUS I.

De Obstaculis a figura sphaerica superficierum pendentibus, & ratione iis occurrendi.

276. Ex calculo formularum, quas adhibuimus (134 & 182) ad determinandas longitudines focorum superficierum sphaericarum refringentium, & reflectentium, manifestum est, nos assumpsisse, curvaturam ab eo puncto, per quod axis transit, usque ad punctum incidentiae radii ex objecto in eodem axe existente oblique venientis, esse insensibilem. Hac stante hypothesi formulae ostendunt, omnes radios ab eodem objecti puncto egressos, post reflexionem, vel refractionem, concurrere cum axe in uno eodemque puncto: sed quoniam haec hypothesis geometrice accurata non est, nequit esse unicum punctum intersectionis omnium radiorum ab eodem objecto venientium cum axe, si in superficie sphaerica reflectantur, vel refringantur; & hinc quod *focum*, seu locum imaginis vocavimus, reipsa non est nisi locus ille, in quo plurimi radii se intersecant; reliquorum radiorum eo plures erunt intersectiones, quo superficies reflectens, vel refringens plurium fuerit graduum: hujus rei exemplum & calculus N. 135 extat.

277. Cum quodvis intersectionis punctum sit locus alicujus imaginis, eo magis sensibilis, quo plures radii concurrunt; sequitur, quod *omnes ejusmodi imagines principali vicinae eandem confusam reddere, & ejus figuram turbare debeant.*

278. Dato numero graduum, & extensione superficiei refringentis aut reflectentis, trigonometrice calculari potest longitudo foci radiorum prope limbos incidentium (135 & 184); quae si compare-

paretur cum ea, quæ ex formulis generalibus deducitur, reperitur ſpatium ab extremis hiſce focis occupatum, quod equidem notabile non eſt, niſi in microſcopiis refringentibus, ubi ob brevitatem foci lentis objectivæ, curvitas etiam in exiguæ aperturæ ſpatio eſt admodum ſenſibilis.

279. His defectibus e figura ſphærica provenientibus mederi poſſumus *primo*, ſi apertura exigua tribuatur vitro, quod objecto obvertitur, ut arcus eam metiens valde paucorum ſit graduum; illa tamen cautela adhibita, ne juſto minor apertura neceſſariæ ad claritatem & vivacitatem imaginum luminis copiæ obſit. *Secundo*, ſi prope focum conſtituatur *diaphragma*. Eſt autem diaphragma planum rotundum, nigro colore tinctum, & opacum, in medio exciſo foramine circulari, cujus diameter fere æqualis diametro imaginis, quæ ab objecto maximo, quod per vitrum oculare adhuc diſtincte cerni poteſt, depingitur. Limbi diaphragmatis radios inutiles intercipiunt, & abſorbent. *Tertio*, ſi interna tubi ſuperficies colore nigro inficiatur, ut abſorbeantur radii ab objectis multum ab axe diſſitis venientes, qui alias valde oblique incidentes, & a lateribus tubi reflexi ad ipſam usque imaginem, & vitrum oculare pervenirent, ac viſionem confuſam efficerent.

280. Celebres Geometræ demonſtrarunt, cujusnam curvaturæ deberent eſſe ſuperficies refringentes, & reflectentes, ut radii omnes ab eodem objecti puncto emanantes ad idem omnino punctum rurſus unirentur; verum infortunato accidit, ut ex obſtaculis, quæ conſtructioni ac perfectioni machinarum opticarum opponuntur, illud ſit omnium minimum, quod a figura ſphærica pendet.

ARTICULUS II.

De obſtaculis, quæ reſolutio lucis in diverſæ naturæ radios opponit.

Cum de viſione ageremus, ſumpſimus interea (51), lumen componi e diverſæ ſpeciei radiis, e quorum combinatione colores dependeant: hic igitur paucis præcipua exponenda ſunt experimenta, quibus aſſertum innititur.

281. I. Supponamus in cameram obſcuram (ut eam N. 5. conſtitutam vidimus) per exiguum foramen C (fig. 38) patere aditum faſci radiorum ſolarium A B, qui ſeu in objecta charta alba, ſeu in oppoſito pariete L K, ad D imaginem albam ſolis efformet e tot circulis luminoſis inter ſe commiſtis conſtantem, quot in foramine C puncta concipi poſſunt. Si iidem radii interpoſita ſuperficie Q R priſmatis triangularis vitrei, cujus axis ſit ad axem faſcis

luminoſi perpendicularis, intercipiantur, imago alba ſolis ad D mutabitur in figuram GF ſupra D, oblongam, extremis rotundis, lateribus utrinque rectis, ſeptem coloribus diſtinctam, quos in iride obſervamus, ſpatio nempe ad *r* rubro, *a* aurantio, ad *f* flavo, ad *v* viridi &c.

282. Hinc vero patet *primo*, figuram hanc coloratam (quam *ſpectrum* appellant) efformari non potuiſſe, niſi radii in faſce A B confuſi, & non interpoſito priſmate uſque ad D ita perventuri, ſeparati fuiſſent per refractionem in duabus priſmatis ſuperficiebus QR, PR, ad ſeſe invicem inclinatis.

283. *Secundo*, cum imago D ſit alba, & ſpectrum F G omnes ex ordine colores iridis referat, ſequitur, *lucem albam nil aliud eſſe, quam miſtionem omnium colorum; ſingulos vero colores eſſe certæ ſpeciei radios.* Id vero infinitis aliis experimentis evincitur; ac inter alia ſequente.

284. II. Si in loco, in quo ſpectrum GF depingitur, conſtituatur lens, ut radii ſpectrum componentes in foco rurſus uniantur, atque ad eundem focum collocetur tabula vel charta, imago alba & circularis apparebit. Si charta propius ad lentem admoveatur, imago verſus medium alba manebit, ſed inferne rubro, ſuperne cæruleo & indico terminabitur: cum enim ante focum radii nondum ſint uniti; verſus F rubri, verſus G autem cærulei prævalent. Si charta ultra focum ponatur, imaginis medium rurſus album erit, ſed partem ſupremam color ruber, infimam cæruleus tinget, quod radii ſcilicet per focum decuſſatim tranſeant.

285. *Tertio* colligitur, *radios rubros omnium minime refringi*, ſive radios rubros eſſe minime refrangibiles; paullo magis aurantios; tum flavos &c. Newtonus menſuris accurate acceptis invenit, luce ex aëre in vitrum tranſeunte, ſinum anguli incidentiæ eſſe ad ſinum anguli refracti (quorum ſinuum ratio in radiis ejusdem ſpeciei ſemper eſt conſtans) in ratione, quam ſequens tabella exhibet:

Pro omnibus colorum commiſſuris, ut ſeſe ordine excipiunt, dum radii ſunt adhuc certo

Rubri	ut	1, 54	- - - -	1, 5425	ad 1.
Aurantii		1, 5425	- - -	1, 544	
Flavi		1, 544	- - - -	1, 54667	
Virides		1, 54667	- - -	1, 55	
Cærulei		1, 55	- - - -	1, 55333	
Indici		1, 55333	- - -	1, 55555	
Violacei		1, 55555	- - -	1, 56	

286 Ex ipſo aſpectu confuſorum limitum colorum ſpectri, & figuræ oblongæ extremis rotundis, facile intelligitur, eos oriri ex meris ima-

imaginibus circularibus ſolis, quarum ſingulæ ſint coloris magis minusve ſplendidi & vivacis ſecundum ordinem a nobis expoſitum.

287. III. Si charta, qua ſpectrum coloratum F G excipitur, ita perforetur, ut non niſi radii, v. g. rubri transmitti poſſint, iisque novum, aut ſucceſſive plura nova priſmata objiciantur, ſeu etiam lentes; hi radii manebunt rubri, utcunque reflectantur, vel refringantur, cujuscunque ſint coloris vitra, per quæ tranſeunt, vel corpora, in quæ incidunt. Illud ſolum diſcrimen notari poterit, quod hic color ruber radiorum eo ſit vivacior, quo color vitrorum, vel corporum reflectentium magis analogus eſt rubro. Idem ſentiendum de radiis alterius coloris, quem, ubi ſemel a reliquis ſeparati fuerint, haud amplius amittunt.

288. Per lentem vitream duo, tresve colores ſpectri rurſus inter ſe commiſceri poſſunt, atque color aliquis, ut libuerit, compoſitus effici; cujus tum claritatis gradus, tum ad primigenios ratio alia, aliaque erit, ut diverſa fuerit cujuslibet e componentibus quantitas; idem vero rurſus, ſi viſum fuerit, in eosdem ope priſmatis reſolvetur, quorum commiſtione eſt ortus.

289. IV. Sit priſma, cujus duo plana ſint æqualia & ad angulum rectum inclinata, adeoque ejus ſectio triangulum rectangulum iſoſceles Q T H (fig. 39) exhibeat. In hujus planum T Q incidat fere ad perpendiculum faſcis radiorum ſolarium A K, ut ſine refractione per illud tranſeat: reflectetur pars radiorum D L in baſi Q H fere perpendiculariter ad planum H T, ob angulum ad T rectum, e quo paralleli ad M pervenient. Objiciatur illis hic fere ad angulum rectum planum G E alterius priſmatis G F E, efformabunt ſpectrum omnium colorum *v r*, quorum nominum primæ literæ ſunt adſcriptæ, quamvis hoc ſpectrum ob exiguum radiorum numerum in Q H reflexorum non ita vivax ſit futurum. Reliqui radii per Q T H penetrantes, refractione itidem ſpectrum coloratum U R depingent. Vertatur tum lente priſma Q T H circa axem ſuum, ut angulus incidentiæ radiorum A D cum catheto T D paullatim major fiat, quam ut lux tranſire poſſit, adeoque reflecti debeat; videbitur primo diſparere lux violacea D U, tum coloris Indici D I, dein cærulea D C &c, verum ſimul colores iidem *v*, *i*, *c* &c. in ſpectro *v r* vivaciores fient. E quo intelligitur, radios in ſpectro U R diſparentes ſucceſſive incipere reflecti a baſi Q H, atque uniri faſci D M, adeoque radios maxime refrangibiles ſimul eſſe maxime reflexibiles. Quoniam autem nunquam differentia aliqua ſenſibilis obſervatur inter angulum incidentiæ & reflexionis alicujus faſcis radioſi, videtur, quod radii violacei non poſſent ante alios reflecti, niſi, dum ad D perveniunt, jam a ceteris eſſent ſeparati,

parati, adeoque quod reflexio non fiat, nisi præcedente aliqua refractione, quæ in exiguo spatiolo inter punctum incidentiæ, & punctum reflexionis facta sit, ita ut radii tantillum separati per refractionem, in minimo illo spatiolo factam, sub eodem angulo post reflexionem egrediantur, sub quo inciderunt.

Articulus III.

Quæ de proprietatibus lucis dicta sunt, universim ad Telescopia & Microscopia applicantur.

290. E diversa radiorum lucis refrangibilitate necessario consequitur, illud, quod superius *imaginem* alicujus puncti lucem emittentis in foco lentis efformatam diximus, nil aliud esse, quam continuam seriem punctorum coloratorum r, a, f, v, e, i, v (fig. 40) ordine colorum iridis sese excipientium, ita, ut focus r radiorum rubrorum a vitro sit remotissimus; focus vero v radiorum violaceorum vicinissimus. Postremi hi radii, ubi secto axe producuntur, vel per imagines a vitro remotiores transeunt, vel extrema earum radunt, quo fit, ut vel confusæ evadant, vel fimbrias coloratas attextas habeant, in quibus lux cærulea & violacea plerumque dominatur, id, quod Optici *iridem* appellant.

291. Evenit hoc plerumque in imaginibus per vitra objectiva telescopiorum & microscopiorum depictis, maxime si *primo* hæ imagines longe a vitro remotæ sint, cum separatio radiorum refractione ad exiguos angulos facta eo sensibilior evadat, quo majus est intervallum imaginis a superficie refringente vel reflectente. *Secundo.* Si apertura vitri objectivi sit major, hoc est, si superficies radios incidentes excipiens sit plurium graduum: tunc enim angulus radiorum prope limbos incidentium fit major, atque ideo etiam refractio crescit, ut anguli radiorum post separationem divergentium; ut colores a separatione pendentes citius percipi possint.

Articulus IV.

Applicantur eadem ad telescopia & microscopia dioptrica.

292. Si in formula generali superius (182) inventa ponatur $q = 1$, $p = 1, 54$ ab initio, dein $p = 1, 56$, scilicet illud pro radiis rubris, hoc pro violaceis; inveniri potest spatium, ad quod spectrum coloratum $r\,v$ (fig. 40) extenditur in foco telescopii. Itaque neglecta vitri crassitie, si fiat $e = 0$, $r = R$, & $d = \infty$, formula

mula

mula abit in hanc $x = \frac{pr}{2pp - 2p}$; & hinc diſtantia foci radiorum rubrorum elicitur $x = 0,9259\,r$; violaceorum vero $x = 0,8928\,r$. Facile autem intelligetur, differentiam inter hos duos focos 331 eſſe partem 28[am] proxime majoris, cum 9259 diviſa per 331 dent quotum 28 proxime. Quare *dum objectum ad diſtantiam infinitam remotum eſt, longitudo ſpectri colorati e diverſa refrangibilitate lucis provenientis eſt $\frac{1}{28}$ longitudinis foci lentis.*

293. Et quoniam lux circa medium ſpectri (ad ſenſum) prope C D eſt maxime denſa, & minime ſeparata, ubi proinde ſupponi poteſt verus locus imaginum objectorum alborum, qualia ſunt aſtra, ſequitur *primo*, quod in teleſcopio termini viſionis confuſæ e diverſa radiorum refrangibilitate ortæ, a loco vero imaginis objectorum valde remotorum diſtet utrinque circiter $\frac{1}{55}$ longitudinis foci vitri objectivi.

294. Quia porro triangula v C F, v A G ſimilia ſunt, eſt C F : F v = A G : G v; itaque etiam C F = $\frac{1}{55}$ A G; & hinc *ſecundo*, *diameter* C D *fimbriarum coloratarum imaginem* F *objecti valde diſſiti ambientium, eſt* $\frac{1}{55}$ *aperturæ vitri objectivi.*

295. OBSERVA. I. Si conſtituatur imago F in C D, ea per imagines ſingulas ſingulorum colorum r, a, f, v, c, i, v reddetur quodammodo nebuloſa; & per radios, qui tranſeunt per C D, acquiret fimbrias, ſive *iridem*; ita ut ſingulis alicujus imaginis punctis ſimul iride cinctis, ſimul nebula obfuſcatis, imago tota objecti confuſa eſſe debeat.

296. COROLL. I. Si objectum per teleſcopium ſpectandum ſit certi alicujus coloris, v. g. rubri, manifeſtum eſt, tubum prolongandum eſſe, retracto vitro oculari, ut diſtincte videatur, quia ejus imago reliquis accuratior eſt ad r. Contrarium faciendum eſt, ſi color objecti ſit cæruleus vel violaceus. E quo colligitur, *focum teleſcopiorum vel microſcopiorum eſſe varium, ut varius eſt objectorum color, quæ per ea ſpectantur.* Idem verum eſt, ſi aſtra ſpectentur cælo non perfecte ſudo: ut enim vapores, aut raræ nubeculæ hujus vel illius generis radiorum majorem copiam transmittunt; ita etiam imago ſyderum vel propius, vel remotius a vitro objectivo ad ſenſum quoque efformatur, quemadmodum id annotavit D. Bouguer.

297. COROLL. II. Si loco vitri albi, e quo objectiva teleſcopiorum elaborari ſolent, adhiberetur certo colore tinctum, quod non niſi ſui coloris radiis aditum præberet; uti v. g. ſi foret cæruleum;

ruleum; tum vero imago, per ſolos radios cæruleos ab objecto emanantes formata nec confuſa eſſet, nec iride cincta; ejusque diſtantia & magnitudo vera exacte reperiretur, adhibita in calculo formulæ pro teleſcopiis & microſcopiis ratione 1 ad 1, 551667. At enim ſimul illud eveniret, ut imagines fierent nimis debiles defectu luminis, ideoque nec ſatis diſtincte cernerentur.

298. COROLL. III. Angulis, ſub quibus radii colorati facta refractione a ſeſe invicem divergunt, iisdem manentibus, patet, CF fore eo minorem, quo minor fit AG. Quin etiam addi poteſt, Fv quoque tum imminuendam, quod extenſio foci, a figura ſphærica vitri pendens, decreſcente apertura decreſcat (279). Igitur *ut apertura vitri objectivi minuitur, ita irides imaginum, & obfuſcantes eas nebulæ tolluntur.* Verum quia hoc genus remedii cum detrimento luminis, & ex hoc pendentis claritatis imaginum conjunctum eſt, is modus aperturæ ſtatuendus eſt, ut & ſufficiens lucis copia admittatur, & imagines ſine iride ſenſibili ſint quam maxime nitidæ; id quod ſola experientia, & vitrorum perfectio, quibus quis utitur, determinare poteſt.

299. OBSERVA. II. Similibus calculis pro microſcopiis ex datis dimenſionibus, & habita ratione eorum, quæ in caſu particulari in conſiderationem veniunt, inſtitutis, patebit, quandonam irides, & objectæ imaginibus nebulæ, plus minusve ſpatii occupent, ac plus, minusve viſioni obturbent. Inde vero determinabitur, quam ampla eſſe poſſit objectivorum apertura, ut quantum fieri citra confuſionem poteſt, lucis admittatur. Quod ut certius in quovis caſu ſingulari obtineatur, plura parari poſſunt diaphragmata, vitrum objectivum tangentia, illudque retineri, quod effectus optimus commendat.

300. OBSERVA III. Radii violacei, & indici ſpectri colorati ſunt maxime debiles, & fere inſenſibiles, niſi quando objectum eſt valde fulgidum, uti ſol; cærulei item adhuc ſunt admodum debiles, uti etiam rubri ad extremum r. Hinc vero ſequitur *primo*, quod in teleſcopiis & microſcopiis multum detrahendum ſit a longitudine vera ſpectri colorati, ut habeatur longitudo hujus ſpectri, qua ſenſibile eſt; item quod tantundem minuendæ ſint diametri veræ iridum, ut obtineantur diametri, ad quas irides ſenſibiles extenduntur. Newtonus invenit, loco $\frac{1}{55}$ accipiendam eſſe $\frac{1}{250}$ circiter. *Secundo* quod verus locus CD imaginis F conſtituendus ſit inter focos radiorum flavorum, & aurantiorum, ubi ex experimentis priſmatis lumen eſt vivaciſſimum. Invenitur vero hoc punctum,

ctum, si in formula pro focis vitrorum ponatur $p = 31$ & $q = 20$ *.

301. OBSERVA IV. Diminuta objectivi apertura non tollit ex integro irides imagini circumfusas, sed solum minuit tum earum magnitudinem, tum colores, seu, ut rectius dicamus, colorum ab objecto propriis discrimen, idque magis, si objectum sit magis lucidum. E quo deducitur, *per irides augeri diametrum apparentem imaginum.* Atque hoc locum etiam habet in objectis nudo oculo spectatis, pupilla idem præstante respectu imaginum in oculo depictarum, quod facit apertura vitri respectu foci. Ex hac observatione complurium illusionum opticarum ratio redditur; exempli causa primo, *cur flamma e longinquo visa sub majore appareat angulo, quam qui distantiæ & magnitudini illius veræ ex calculo respondet?* sic D. Picard observavit, ignem tres pedes latum noctu ad distantiam fere 32000 hexapedarum, sive 16 leucarum Parisinarum, per tubum visum habuisse diametrum apparentem 8″, cum reipsa tantum $3''\frac{1}{4}$ esse debuisset. Secundo. *Quare stellæ fixæ, quæ diametrum apparentem sensibilem habere videntur, dispareant momento, quando limbus obscurus lunæ iis motu admodum lento occurrit?* Tertio. *Quare stellarum maxime illustrium diameter minor videatur, si per telescopia longiora spectentur, quam si aspiciantur per breviora, quæ proinde objecta longe minus aucta exhibent?* Notandum isthic, aperturam vitri objectivi in telescopiis majoribus, proportione longitudinis habita, minorem fieri, quam in brevioribus. Ita in telescopio Astronomico triginta pedes longo, vitrum objectivum non nisi 3 digitos patet; & in telescopio 3 pedum adhuc fere integri digiti aperturæ diameter admittitur. Quarto. *Cur si luna, dum parum a novilunio abest, & per lucem e terra reflexam satis fortiter illuminatur, ut etiam ejus pars, ad quam radii e sole nondum directe pervenire possunt; cur, inquam, si luna tunc per telescopium conspiciatur, semicirculus illuminatus soli obversus sensibiliter appareat major altero opposito?* Quinto. *Cur limbo illuminato lunæ versus stellam primæ magnitudinis progrediente in occultatione, stella, cujus lumen est multo vivacius lunari, non dispareat, nisi postquam jam tota infra discum lunæ subiisse videtur?* scilicet, quando stella tamdiu videtur, quamdiu adhuc est extra verum limbum lunæ, & tantummodo versatur adhuc in spatio transparente iridis lunam ambientis.

302. SCHOLIUM. Ex omnibus prioribus observationibus colligitur, solam esse experientiam, quæ pro diversitate objectorum, tum quod ad copiam lucis, qua collustrantur, tum quod ad colores, decidere possit, quanta sive in telescopiis, sive in microscopiis debeat esse objectivorum apertura, quis sit verus imaginum

L locus

* Newtonus Opt. L. I. part. I. Prop. VII. Exper. XVI., *ubi hæc definit, ponit rationem sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in his radiis* 17 *ad* 11.)

locus, quæ aptiſſima diaphragmatum diameter, quæ illic ad definiendum viſionis campum ſunt conſtituenda.

303. Quod ad rationem longitudinis foci vitri objectivi ad longitudinem foci ocularis, rurſus ea non aliunde, quam ex experientia definienda eſt, utpote cum admodum diverſa eſſe debeat pro diverſa vitrorum perfectione & objectorum luce. Sic objectum valde lucidum perquam diſtincte videri poterit per objectivum accurate elaboratum, ſi cum oculari exigui foci conjungatur; cum enim imago citra ſenſibilem defectum efformetur, atque ſat vivax ſit, per vitrum, quod ei magnum augmentum adfert, recte adhuc videtur; verum ſi objectum per ſe ſit obſcurum, cerni diſtincte nequit, niſi per oculare, quod ejus radios non multum diſpergit, cujus conſequenter focus adeo brevis eſſe non poteſt; ſimiliter, ſi vitrum objectivum aliquo vitio laboret, quod etiam in imaginem transfunditur, huic ſpectandæ adhiberi non debet vitrum magni augmenti, ne ejus vitium notabilius evadat. Denique objecta interdiu conſideranda, ocularia minus acuta poſcunt; cum enim magna lucis vis tum ſpectatoris oculum jam prius ſubeat, atque aciem viſus quodammodo obtundat, antequam eum ad teleſcopium applicet, lumen nimia foci brevitate diſperſum haud ſatis perciperet.

304. Nulla igitur conſtans regula in hiſce rebus ſtatui poteſt, cui praxis ſemper ſit adſtringenda, ſed oportet uſu ejusmodi machinarum acquiſitam experientiam conſulere, atque dimenſiones earum, quæ pluris apud æquos æſtimatores fiunt, tanquam normam & modum novis, quæ conſtrui debent, adhibere. Atque hoc non modo de vitris ipſis, ſed etiam de tubis, totoque ad uſum neceſſario apparatu, dictum putetur.

305. Nos iſthic dimenſiones ſolum ſubjiciemus, quas meliores artifices in conſtructione teleſcopiorum, & microſcopiorum magis uſitatorum obſervare ſolent.

Pro Teleſcopio quatuor vitrorum.

Longitudo foci vitri object.	Diam. aperturæ vitri object.	Longit. foci vitri ocul.	Diam. diaphragm. in foco vitri object.	Augm. diametrorum apparentium object.
1 Ped.	4½ Lin.	16 Lin.	4 Lin.	9ies
2	6½	22	5½	13
3	9	26	7½	17
4	11	28	9	21
5	12	30	10	24
6	13	31	10½	28
7	14	34	11	30
8	15	36	11½	32

Sumuntur in hac tabula vitra objectiva accurate elaborata, non tamen excellentia; hæc enim & focum lentium ocularium breviorem,

&

& majorem tam aperturæ objectivi, quam diaphragmatis in ejus foco constitui, diametrum patiuntur.

Pro Telescopio Astronomico.

Longitudo foci vitri objectivi	Diameter aperturæ vitri objectivi		Longitudo foci vitri ocularis		Augmentum diametrorum apparentium objecti circiter
Ped.	Digit.	Lin.	Digit.	Lin.	
1	0.	$6\frac{1}{2}$	0.	8	20ies
2	0.	9	0.	10	28
3	0.	$11\frac{1}{2}$	1.	$0\frac{1}{2}$	34
4	1.	1	1.	$2\frac{1}{2}$	40
5	1.	$2\frac{1}{2}$	1.	4	44
6	1.	4	1.	6	49
7	1.	$5\frac{1}{2}$	1.	$7\frac{1}{2}$	53
8	1.	$6\frac{1}{2}$	1.	$8\frac{1}{2}$	56
9	1.	8	1.	$9\frac{1}{2}$	60
10	1.	9	1.	11	63
11	1.	10	2.	0	66
12	1.	11	2.	2	69
14	2.	$0\frac{1}{2}$	2.	3	75
16	2.	2	2.	5	79
18	2.	4	2.	7	85
20	2.	$5\frac{1}{2}$	2.	$8\frac{1}{2}$	89
25	2.	8	3.	0	100
30	3.	0	3.	$3\frac{1}{2}$	109
35	3.	3	3.	7	118
40	3.	6	3.	10	126
45	3.	8	4.	$0\frac{1}{2}$	133
50	3.	10	4.	3	141

306. Si objectiva vitra præter morem excellant, eorum apertura amplior esse potest, & focus ocularis minor. Sic objectivum a Campani elaboratum foci 34 pedum patitur oculare foci $2\frac{1}{2}$ digitorum, & aperturam 4 digitorum diametri: atque tum 163^{ies} diametros objectorum cælestium apparentes, quæ sufficientem claritatem retinent, auget.

307. Pro Microscopiis trium vitrorum, oculare debet esse foci digitalis, & diametri circiter 9 linearum; quod in medio ad distantiam 8 fere linearum ab oculari collocatur, focum 18 linearum habeat, & diametrum unius digiti. Cum his variæ lentes objectivæ mutabiles conjungi possunt, v. g. foci 1, 2, 4, 6 linearum; sed aperturæ harum admodum exiguæ sint, oportet, atque bonitati vitrorum proportionatæ; distantia autem ob oculari sex circiter digitorum.

ARTICULUS V.

Applicatio dictorum de proprietatibus lucis ad Telescop. & Microscop. Catadioptrica.

308. Experientia docuit, imagines reflexione formatas longe minus esse confusioni obnoxias, quam quæ per refractio-

nem fiunt. Et ſane intelligitur, radios, cum facta refractione ſeparentur, atque a ſeſe invicem divergant, quo longius progrediuntur, eo magis colorum diſcrimina prodere. At vero in reflexione ſeparatio radiorum parallelorum non fit niſi (ut ita dicam) in ipſo puncto incidentiæ, vel in intervallo inter hoc, & punctum reflexionis. Poſt reflexionem itaque hi radii quodammodo infinite parum ſeparati, ſunt adhuc ad ſenſum paralleli; unde neque ſeparatio percipi poteſt, ſed illud ſolum advertitur, quod faſcis radioſus reflexus tantillo magis dilatatus appareat, quam fuerit prius. Hinc eſt, quod in teleſcopiis catadioptricis irides haud videantur, ſed tantum exigua in imaginibus confuſio notetur, partim ex dilatatione faſciculorum lucis, partim ex figura ſphærica ſpeculorum orta. Quare longe ampliorem aperturam ſpecula objectiva teleſcopiorum, & microſcopiorum ferunt, quam vitra ejuſdem foci; ex quo fit, ut imagines reflexione depictæ multo vivaciores ſint, ideoque diſtincte per lentem exigui foci cerni poſſint, & magnum acquirere augmentum ſine claritatis detrimento. Quod commodum in teleſcopiis dioptricis haberi nequit, niſi tanto ſint longiora (ut e tabulis ſuperioris Articuli liquet), tantoque etiam minus tractabilia.

309. Teleſcopia catadioptrica primæ ſpeciei, qualia N. 246 & ſequente deſcripſimus, diverſa vitra ocularia admittunt, pro modo luminis, quo objecta fulgent, & deſiderati in eorum diametris apparentibus augmenti. En dimenſiones, ſecundum quas partes hujus generis teleſcopiorum conſtrui poſſunt, ut effectum debitum præſtent (vide Smith, Tom. I. pag. 364.).

Longitudo foci Speculi concavi	Diameter aperturæ Speculi.		Longitudo mediocris foci vitri ocularis		Augm. Diametrorum apparentium objecti
Ped.	Digit.	Lin.	Lin.	Centeſim.	Circiter
½ - - -	0	11 - - -	2,	00 - - -	36
1 - - -	1	6 - - -	2,	39 - - -	60
2 - - -	2	6 - - -	2,	83 - - -	102
3 - - -	3	3 - - -	3,	13 - - -	138
4 - - -	4	1 - - -	3,	37 - - -	171
5 - - -	4	10 - - -	3,	54 - - -	202
6 - - -	5	7 - - -	3,	73 - - -	232
7 - - -	6	3 - - -	3,	88 - - -	260
8 - - -	6	11 - - -	4,	01 - - -	287
9 - - -	7	7 - - -	4,	13 - - -	314
10 - - -	8	2 - - -	4,	24 - - -	340
11 - - -	8	9 - - -	4,	34 - - -	365
12 - - -	9	4 - - -	4,	44 - - -	390

Quod ad ſpecillum planum HI (fig. 35) pertinet, id ovale eſſe debet, cum axem Ao' coni Do'D radiorum ad eundem axem

paral-

parallele incidentium ſub angulo 45 graduum ſecet: ejus dimenſiones petuntur a ſpatio, quod radii reflexi occupant in illo loco, in quo collocandum eſt ſpecillum, dum oculare foci minimi adhibetur, id, quod facili calculo reperitur. Eſt mihi hujusmodi teleſcopium, cujus ſpeculi objectivi focus eſt duorum pedum: ſpeculum minus fere ſeptem lineas in maxima ſua latitudine habet; quinque in minima.

Caput VII.

Diverſæ quæſtiones Opticæ.

Inviolabilis in hiſce *lectionibus* brevitatis lex, atque arctior cum Phyſica Experimentali a noſtris exercitationibus aliena nexus quam plurima non modo ſcitu jucunda, ſed etiam utilia, nos prætermittere cogunt. Interim tamen ſupplementi inſtar eorum, quæ minus a Phyſica pendent, & quibus tirones exerceri poſſunt, quæſtiones non nullas, indicatis modo reſponſis, ſubjungere viſum eſt.

310. I. *Cur, ſi cui in tenebris in caput ictus impingatur, tractus quidam lucis videntur?*

Ictus omnes partes elaſticas capitis concutit, iisque tremorem quemdam, aliquamdiu perdurantem, inducit, adeoque etiam nervi optici fibræ contremiſcunt, quod ſenſationem ſimilem excitat, ac ſi lux confuſa oculos feriret.

311. II. *Quare, dum per tabulas vitreas feneſtrarum in vicos deſpicimus, melius videmus transeuntes, quam illi nos trans easdem videre poſſint?*

Qui in vicis ſunt, majore in luce verſantur; hinc modica illa, quæ e feneſtris tranſit, exiguam facit impreſſionem: contrarium accidit illis, qui e cubiculo tranſeuntes ſpectant.

312. III. *Cur, ſi caput acus prope ad oculum cis chartam exiguo foramello pertuſam teneatur, & idem foramellum luci obverſum aſpiciatur, caput acus videtur eſſe trans chartam, & ſitu inverſo?*

Caput acus non videtur cis chartam, quia oculo nimis vicinum eſt; & videtur trans chartam & inverſum, ob easdem cauſas, propter quas, ſi quis extra cameram obſcuram poſitus per ejus aperturam aſpicere poſſet, quin impediretur luci aditus, objectorum exteriorum imagines inverſas cerneret.

313. IV. *Cur, ſi carbo ardens admodum velociter in gyrum agatur, videtur tæniam igneam exhibere?*

Impreſſio lucis in retinam motum illic quemdam tremulum excitat aliquamdiu perdurantem cum ſenſatione lucis: hinc ſi carbo ma-

gna velocitate circulum non magnum defcribat, tremor ille perfeverat integræ revolutionis tempore.

Vifus nofter eft fenfus fatis lentus & fegnis; & diverfi colores magna cum celeritate alter alteri fuccedentes haud poffunt fatis diftinctas impreffiones facere, neque oculum fimili voluptate afficere, ac experiatur auris, cum fonorum celerrime fefe confequentium harmoniam percipit.

314. V. *Quare videntur fæpe nubes albæ magno numero in fafcias circulares, modicæ latitudinis, & verfus idem horizontis punctum convergentes, difpofitæ?*

Si nubes leviores, ideoque fatis elevatæ, aliæ ab aliis fint feparatæ, a vento in diftantia paullo majore a terra, & directione horizontali fpirante, omnes verfus eandem plagam impulfæ fafciarum longarum inter fe, & cum horizonte parallelarum formam induunt, quæ confequenter (82) debent videri verfus idem punctum lineæ libellæ per oculum tranfeuntis, & ideo in horizonte, convergere. Et quoniam a fpectatore valde diffitæ funt, velut in ipfa fuperficie fphæræ cæleftis fitæ, & circulares apparent.

315. VI. *Si candelabrum penfile, accenfis candelis, fufpenfum e fune longiore & contorto, dein fibi permiffo, circa axem rotetur, cur contingit quandoque, ut uni e fpectatoribus videatur in hanc, alteri in alteram partem moveri, quamvis uterque ex eodem illud loco afpiciat?*

Candelæ accenfæ circulum defcribunt, & motus candelabri refertur ad diametrum per oculum tranfeuntem: jam vero in diftantia aliqua fæpe non fatis difcernitur, utra e duabus candelis oppofitis fit in extremo hujus diametri remotiore ab oculo (89), præcipue quando planum circuli fere per oculum tranfit, nec fatis attenditur ad phænomena Perfpectivæ. Hinc fi alter e duabus candelis hanc, alter aliam exiftimet remotiorem effe; candelabrum illi verfus hanc plagam moveri videbitur, huic verfus oppofitam. Idem contingere poteft, fi duo videant pinnulas ventorum indices in tectorum vertice valde oblique, vel alas molendini a ventis acti in majore diftantia.

316. VII. *Quæ caufa, quod fi quis e tenebris ad lucem majorem repente veniat, vifus tantopere perftringatur; & cum ad locum etiam mediocriter tantum obfcurum e magna luce tranfit, prorfus nihil videat?*

In tenebris pupilla eft admodum dilatata, in luce magna valde contracta; jam motus iridis, quo hæc dilatatio & contractio peragitur, non eft adeo velox; & lumen repente in pupillam valde amplam incidens majus eft, quam ut imaginem diftinctam efformare poffit (288), fed potius organa vifioni deftinata fubito, & violente concitat, quo fit, ut acies oculi obtundatur. At vero fi

ad

ad lucem copiosam pupilla nimium arctetur, & repente in loco obscuro constituatur, sufficiens ad distinguenda objecta lumen non admittit, unde illa cæcitas oritur, quæ non prius desinit, quam pupilla satis temporis ad dilatationem habuerit.

317. VIII. *Quare objectum si prope oculum positum per foramellum acu in chartæ nigræ folio factum aspiciatur, eo apparet majus, quo magis ad oculum admovetur, cum tamen si sine eo foramine consideretur, ejusdem ad sensum videatur magnitudinis, quamvis ad diversas ab oculo distantias collocetur?*

Visio per tale foramellum fit accurata (213), & interjecta inter oculum & objectum charta aspectum rerum aliarum circumpositarum impedit, nec admittit, ut aliunde, quam ex imaginibus in oculo depictis de magnitudine judicium feramus.

318. IX. *Quare charta madefacta acquirit colorem quemdam griseum, & fit magis transparens?*

Chartæ siccæ pori filis varie implexis impediti sunt; humor aspersus ac in poros penetrans, hæc fila explicat, ac ordinatius componit, ut pori quasi totidem tubuli fiant liquore pleni, aptique ad lucem transmittendam, quod chartam reddit aliquantum transparentem, & simul candorem tollit, quem a radiis intra poros non satis pervios varie reflexis habebat.

319. X. *Quare quidam circa vesperum clarius vident, quam alii?*

Sunt hi præcipue myopes, qui objecta valde vicina distincte, & quin oculis vim inferant, vident; cum ex opposito alii, qui sunt oculis recte constitutis, cogantur pupillam contrahere, quando objecta admodum prope sunt admovenda; unde non recipiunt tantum luminis, ac myopes.

320. XI. *Quare myopibus objecta remotiora apparent plerumque majora, quam aliis visu bono præditis?*

Imagines objectorum non efformantur distincte, nisi in puncto intersectionis radiorum ab eodem objecti puncto egredientium: in oculo myopis hi radii non attingunt retinam, nisi post punctum concursus, adeoque ubi ad retinam perveniunt, jam iterum divergunt.

321. XII. *Quare, qui fiunt presbytæ, minuto charactere scripta non possunt, ut prius, legere, nisi exponant radiis solaribus, aut pone candelam ardentem collocent?*

Ad lumen copiosum pupilla contrahitur, & ad exigui foraminis magnitudinem reducitur; atqui per ejusmodi foramen visio debet esse distincta (213).

322. XIII. *Quare etiam ex illis non nulli, qui nullo oculorum vitio laborant, putant se in luna, dum pleno orbe fulget, quamdam faciei humanæ figuram videre, cum tamen, si per telescopium conspiciatur, nullam prorsus similitudinem referat?*

Sunt

Sunt quædam in luna, maxime verſus limbos oppoſitos, maculæ magnæ, aut potius ſpatia reliquo diſco obſcuriora (quæ Aſtronomi plerumque *maria* vocant): majores hæ maculæ non prorſus ad limbos uſque ſe extendunt, nec etiam ad centrum pertingunt, & ſpatio interjecto clariore a ſeſe invicem ſeparantur, per mediam lunam protenſo, quod verſus extrema ſua maculis longioribus & exiguæ latitudinis, variiſque lucidis apicibus, interruptum eſt. Dubium non eſt, per magnam lunæ a terra diſtantiam, & lumen intenſius totius orbis, veras ſpatiorum ejusmodi clariorum, obſcuriorumque figuras diſcerni non poſſe. His ſi addatur præjudicium quoddam, quod facile ex aſpectu imaginum lunæ plenæ, quæ ei plerumque faciem humanam tribuunt, hauriri poteſt, fit ut majores illæ, & obſcuriores maculæ ſpatiis verſus limbum clarioribus cinctæ, atque ſimili lucidiore circa medium ſeparatæ, videantur velut genæ; tractus ille ſplendidior in medio naſum repræſentet, reliquus orbis variis clarioribus, ac obſcurioribus maculis diſtinctus, reliquas faciei partes exhibeat. At vero cum teleſcopium omnes maculas diſtincte oſtendat, ea faciei figura prorſus evaneſcit.

323. Hæc occaſionem præbent obſervationi cuidam magni momenti hic faciendæ. Si ſplendor nimius lunæ eſſet præcipua cauſa confuſionis, qua ejus maculæ videntur, promptum eſſet remedium, ſi per exiguum foramellum aſpiceretur (212). Interim tamen, licet hæ maculæ ſint admodum magnæ, & obſervator inſigni oculorum acie præditus, nunquam bene terminatæ, niſi per teleſcopium apparent. Neceſſe itaque eſt, ut diſtantia lunæ excedat eam, ad quam viſus utcunque excellens ſeſe extendit; & cum luna circiter 90000 leucis a terra abſit, adeoque radii inde ad nos ex ſingulis ejus punctis emiſſi ſint quam qui maxime ad ſenſum paralleli, manifeſte ſequitur, *parallelismum radiorum cum oculum ſubeunt nullo vitio laborantem, non efficere viſionem diſtinctam, ſed potius ad hanc requiri, ut tantillo divergant.* Hoc ſi non eſſet, ſane objecta remotiſſima viderentur maxime diſtincta, quod evidenter falſum eſt, experientia teſte. Per teleſcopia radii, quantum neceſſe eſt, ad divergendum cogi poſſunt, ideoque, ceteris paribus, objecta ſemper diſtincte cerni. Verum ut hoc fiat, focus vitri ocularis non debet accurrate congruere cum foco objectivi, ſive vero loco imaginum, ſed tantillo ultra eum conſtitui, ut radii ex oculari paullulum divergentes egrediantur. Diſcrimen in teleſcopiis fere imperceptibile eſt; at non item in microſcopiis ſive ſimplicibus, ſive compoſitis, eoque id magis, quo augmentum diametrorum apparentium objectorum majus eſt, atque magis diverſa oculorum conſtitutio apud obſervatores. Hinc regu-

regulæ, quas ſive pro conſtructione, ſive pro calculando effectu teleſcopiorum & microſcopiorum attulimus, non tanto cum rigore accipi debent, utpote quæ parallelifmum radiorum e vitris ocularibus egredientium ad viſionem diſtinctam neceſſarium ſupponunt. Retinuimus tamen hanc hypotheſin tanquam ſimpliciſſimam, eique maxime vicinam, quam natura oculi recte conſtituti poſtulat. Itaque præſcriptæ regulæ in teleſcopiis pro ſatis accuratis haberi poſſunt; at in microſcopiis ejusmodi ſolum cenſendæ ſunt, quæ poſſint ita proxime determinare ſitum debitum vitrorum pro viſione diſtincta, atque magnitudines apparentes diametrorum objectorum, ut perbrevi tentamine obſervator dein facile aptiſſima vitrorum ac objecti intervalla deprehendere poſſit, e quorum dimenſione in caſibus peculiaribus etiam calculos juxta regulas generales factos eadem facilitate corriget.

324. XIV. *Quare, dum lux ſolaris vel alia ſatis fortis, in latera interna vaſis rotundi radiat, apparent in tali vaſe duo ſemicirculi lucidi ita inter ſe juncti, ut figuram cordis exhibeant, puncto concurſus eo viciniore ad axem vel centrum vaſis, quo lumen propius admotum eſt.*

Hæ curvæ lucidæ oriuntur ex interſectionibus valde invicem vicinis radiorum reflexorum a ſingulis ſemicircumferentiæ punctis ſuperficiei cavæ vaſis, quæ illuminatur, uti figura 41 oſtendit. Punctum B eſt focus hujus ſemiperipheriæ, ejusque diſtantia a centro dependet (145) a diſtantia objecti lucentis a ſemiperipheria illuminata. Curvæ A B, B C dicuntur *cauſticæ per reflexionem.*

325. XV. *Quare ſi gladius nudatus verſus ſpeculum convacum protenditur, terreri ſolent ii, qui ſe in tali ſpeculo ſpectant?*

Si gladius ſit intra centrum & focum ſpeculi, ejus imago inverſa apparet ante ſpeculum, & ex parte ſpectatoris, hæc imago porro a ſpeculo recedit (143) gladio ad ſpeculum propius admoto, ideoque ejus acies verſus ſpectatorem accedit.

326. XVI. *Quare ſi ſol, luna, aut fax, in aquam fluentem, velut rivum, radiat, videtur in ejus ſuperficie tractus quidam longus lucidus, tremulus & interruptus?*

Partes aquæ aliæ ſuper alias decurrunt inſtar tenuiſſimarum lamellarum, quæ vices totidem ſpeculorum planorum varie inclinatorum agunt, atque omni momento magnitudinem, locum, velocitatem & inclinationem mutant, planitiem jam ad ſpectatorem, jam in partem oppoſitam vertentes.

327. XVII. *Si tabula vitrea ſpeculi valde oblique aſpiciatur, cur quinque vel ſex imagines candelæ ardentis pone ſpeculum poſitæ videntur?*

Tabulæ hujus craſſities pluribus ſtratis invicem ſibi incumbentibus, & lamellis conſtat, quarum ſuperficies ſingulæ tanquam totidem ſpecula conſiderandæ ſunt.

328. XVIII. *Si baculus ad dimidiam longitudinem aquæ immergatur, & oculus ſpectatoris collocetur in plano anguli refractionis, cur pars ſubmerſa propius ad ſuperficiem aquæ inflexa, & brevior apparet, quando oculus ad eam partem conſtituitur, ad quam baculi pars ex aqua eminens facit cum ſuperficie aquæ angulum acutum, quam ſi ſpectator ſit ex parte altera?*

Ratio facile ex aſpectu figuræ 42 colligitur, in qua radii Hτ, Gτ ab extremo baculi τ venientes, refracti exeunt directione OH, OG verſus oculum, qui eos in T concurrere putat, ideoque hic conſtitutus partem baculi Bτ videt, quaſi ea eſſet BT; at ex altera parte, eadem illi apparet ut B*t*.

329. XIX. *Quare objecta trans aquam, vel tabulam ſpecularem paullo craſſioris vitri viſa apparent majora, viciniora, & ſubinde etiam clariora?*

Repræſentet (fig. 43) IK diametrum pupillæ. Objectum O trans vitrum videtur per radios extimos OBDI, OCEK, qui apparent, velut ſi e puncto *o* venirent, angulumque I *o* K majorem comprehendunt, quam ſit IOK, qui fieret ab extimis radiis vitro remoto. Dein ſi objectum per vitrum ſpectetur, radii qui ex O inter B & C cadere poſſunt, ad oculum veniunt; at ſi tollatur vitrum, ad oculum non pertingunt radii, niſi inter F & G intercepti, adeoque pauciores.

330. XX. *Cur urinatores ſub aquam demerſi objecta tantum confuſe videre poſſunt?*

Refractio radiorum ex aere in aquam incidentium tanta fere eſt, ac illa, quæ fit in noſtro oculo; itaque oculo intra aquam poſito exigua tantum fit refractio; ideoque radii imaginem nequeunt diſtincte efformare, niſi multum ultra retinam.

331. XXI. *Quare humor cryſtallinus in oculis piſcium eſt ad ſenſum globulus ſolidus?*

Humor aqueus in oculis piſcium inutilis foret; & ſi humor cryſtallinus ſimilem a pupilla diſtantiam haberet, ut in animantium terreſtrium oculis, campus viſionis nimium parvus eſſet. Oportuit itaque, ut humor cryſtallinus infra pupillam illico collocaretur, ut pupilla latius pateret, ut humor cryſtallinus eſſet denſior, ideoque majores efficeret refractiones, ut denique eſſet globoſus, ne majus inter eum & fundum oculi ſpatium relinqueretur.

332. XXII. *Quare qui nictante oculo, ac lacrymis ſuffuſo, candelam ardentem aſpiciunt, faſces radioſos ex ea emitti, maxime ex ſuprema & infima parte vident?*

Pen-

Pendet hoc a refractione irregulari, quæ fit in humore extremis palpebrarum limbis adhærente, & oculo connivente ad pupillæ aperturam admoto; five etiam in ipsis lacrymis supra corneam se diffundentibus.

333. XXIII. *Cur imago objecti per vitrum polyedrum visi toties multiplicatur, quot in vitro sunt areolæ planæ?*

Ex radiis ab objecto paullum remotiore in talem areolam fere sub æqualibus angulis incidentibus, complures per duplicem refractionem ad oculum perveniunt, atque fascem luminosum constituunt, satis fortem, qui in oculo imaginem objecti depingat, quæ proinde in axe hujus fascis apparere debet. Jam vero cum inclinatio cujuslibet areolæ alia sit, totidem fasces efformantur, quorum axes alium semper situm ab inclinatione areolarum pendentem habent. Quare tot imagines diversæ, ac in tot locis diversis videntur, quot areolæ radios ad oculum transmittunt.

334. XXIV. *Quare per lucernam magicam objecta tantopere augentur?* In hac lucerna est AC (fig. 44) speculum sphæricum cavum; B lumen candelæ, vel lampadis crassioris ellychnii paullo intra focum collocatum, ut radii a speculo reflexi convergant; DD lens vitrea, radios tum directos, tum etiam reflexos a speculo, adhuc magis colligit: EF est objectum coloribus transparentibus in tabula vitrea pictum, & situ inverso. Radii per hanc tabulam transeunt, incidunt in lentem GH, a qua refracti convergunt, & imaginem in K efformant, ubi diaphragma radios inutiles, & irregulariter refractos, intercipit. Postquam radii in K sese intersecuerunt, in lentem LM incidunt foci valde longi, e qua egressi admodum divergunt. Tum tandem in tabula alba ad maximam, qua fieri potest, distantiam excipiuntur, habita ratione vivacitatis, & distinctionis imaginis *fe*, quæ situ erecto depingitur. Jam vero patet, ut hæc omnia ita fiant, quemadmodum diximus, focum lentis DD debere esse intra B; lentis autem GH focum alterum constituendum esse inter eandem, & objectum EF; denique lentis LM focum collocandum ultra K versus GH.

335. XXV. *Quare si laminæ metallicæ exiguum foramellum gutta aquæ, cui animalcula microscopica innatant, repleatur, atque versus candelæ lumen aspiciatur, quandoque ejusmodi animalculum maximo cum augmento & distincte videtur?*

Superficies interior guttæ respectu animalculi vices speculi sphærici concavi agit. Itaque quando animalculum est intra focum, & superficiem guttæ internam ab oculo remotiorem, ita, ut radii ab animalculo venientes ab ea versus oculum reflexi per alteram guttæ superficiem oculo viciniorem inter se paralleli egrediantur,

tur, videbitur imago ſuperficiei animalculi ab oculo averſæ; atque hæc imago eo erit major, quo animalculum propius ad focum illum fuerit.

PARS TERTIA

Perſpectiva.

CAPUT I.

Notiones & Principia Generalia, quibus univerſa Perſpectivæ Theoria ſuperſtruitur.

336. Objectum ex legibus Perſpectivæ delineare in tabula, ultra quam plerumque reſpectu oculi ſitum ſupponitur, nihil eſt aliud, quam ſingula puncta tabulæ deſignare, per quæ radii luminis ex ſingulis ſuperficiei viſibilis punctis ad oculum venientes tranſirent. Et ſimilitudo imaginis cum objecto omnibus numeris abſoluta eſt, ſi ad eadem puncta tabulæ iidem colores applicentur, cujus ſunt radii illic tranſeuntes. Colores autem hunc in modum applicare, eſt *Perſpectivæ Pictoriæ*, quæ ad claſſem Mathematicam non pertinet.

337. PRINCIPIUM I. *Quidquid in tabula optice repræſentatur, ex uno eodemque puncto ſpectari debet.* Exprimit enim tabula, quod fit actione momentanea, quod adeo unico oculi obtutu videri poteſt.

338. PRINCIPIUM II. *Projectio perſpectiva puncti objectivi in tabula illic fieri debet, ubi radius ex eo puncto ad oculum ductus, per planum tabulæ tranſit.*

339. PRINCIPIUM III. *Projectio perſpectiva lineæ rectæ objectivæ, quæ producta per oculum non tranſit, eſt recta in tabula, in qua eam ſecat planum trianguli, cujus baſis eſt recta objectiva, & latera radii ab ejus extremis uſque ad oculum ducti.*

340. PRINCIPIUM IV. Ut projectio perſpectiva figuræ planæ recte intelligatur, cogitandum eſt, quod *radii ex omnibus ſuperficiei aſpectabilis figuræ planæ punctis ad oculum ducti efficiant pyramidem, cujus baſis figura objectiva eſt, & vertex in oculo: jam figura, quæ fit ſectione hujus pyramidis per planum tabulæ, eſt projectio perſpectiva figuræ illius objectivæ.*

341. COROLL. I. *Projectio perſpectiva polygoni nequit eſſe ſimilis polygono objectivo, niſi hujus planum ſit tabulæ parallelum.* Elementa enim pyramidis ſimilia eſſe non poſſunt baſi, niſi fiant ſectionibus ad baſin parallelis.

342. COROLL. II. *Projectio perspectiva solidi est figura plana composita ex projectionibus omnium planorum solidum comprehendentium, quæ simul oculo sunt conspicua.*

343. THEOREMA I. *Quemcunque situm habeat tabula, projectio perspectiva duarum aut plurium rectarum objectivarum inter se parallelarum convergere debet versus punctum aliquod in plano tabulæ (sive intra hanc, sive extra eam positum), in quod cadit recta ex oculo ad rectas objectivas parallele ducta.*

DEMONSTR. Utcunque duæ pluresve parallelæ objectivæ respectu oculi positæ sint, semper debent videri concurrere (82); igitur etiam earum projectio perspectiva convergere debet. Jam vero oculo per eundem radium repræsentatur punctum concursus parallelarum objectivarum, & punctum concursus earum projectionis; quare necesse est, ut punctum concursus projectionis sit illud in plano tabulæ, per quod transit recta ab oculo ad punctum concursus linearum objectivarum ducta. Sed quoniam punctum concursus parallelarum objectivarum infinite distat ab oculo, recta ex oculo ad hoc punctum ducta est iisdem parallela; ergo punctum concursus projectionis perspectivæ linearum objectivarum inter se parallelarum est illud plani tabulæ, producti si opus sit, in quod cadit recta ex oculo ad parallelas objectivas parallele ducta.

344. COROLL. I. Si parallelæ objectivæ simul sint parallelæ ad planum tabulæ, recta ex oculo ad punctum earum concursus apparentis ducta, nuspiam potest occurrere tabulæ plano, utpote cui parallela quoque est: igitur neque dari potest punctum concursus earum projectionis, sive earum projectiones perspectivæ sunt etiam parallelæ inter se. Hinc *si tabula sit verticalis, sive ad horizontem perpendicularis, omnium verticalium objectivarum projectiones sunt rectæ verticales; & projectiones omnium horizontalium, sive ad libellam ductarum, simulque ad planum tabulæ parallelarum, sunt rectæ in tabula ad libellam ductæ.* Projectiones item rectarum objectivarum cum plano tabulæ parallelarum, sed ad horizontem inclinatarum, sunt etiam parallelæ in tabula, & tantundem ad horizontem inclinatæ.

345. COROLL. II. *In tabula verticali projectiones omnium rectarum objectivarum, quæ ad libellam ducuntur, simulque ad planum tabulæ sunt perpendiculares, debent concurrere in puncto visus tabulæ.* Dicitur enim *punctum visus*, in quod cadit recta ex oculo ad planum tabulæ perpendicularis, consequenter ad rectas objectivas parallela.

346. THEOREMA II. *Si recta objectiva sit plano tabulæ parallela, & in partes æquales divisa, etiam ejus projectio perspectiva erit recta in partes æquales divisa: at si recta objectiva plano tabulæ non sit parallela, ejus projectio non dividitur in partes æquales.*

DEMONSTR. Sit AB (fig. 45) recta objectiva trifariam secta in C, D, & plano tabulæ GH parallela; sit O locus oculi; erit *ab* projectio rectæ AB. Manifestum, ductis rectis OA, OC, OD, OB, triangula AOC, *aOc*; COD, *cOd*; DOB, *dOb* esse similia (Elem. 510). Cum itaque bases AC, CD, DB æquales sint: etiam iis homologæ *ac*, *cd*, *db* æquari inter se debent. At vero si PQ exhibeat situm tabulæ ad rectam AB inclinatæ, triangula $\alpha O\beta$, $\beta O\gamma$, $\gamma O\delta$ non amplius sunt similia triangulis correspondentibus AOC, COD, DOB; adeoque cum bases AC, CD, DB inter se æquales sint, bases $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, $\gamma\delta$ inter se æquales esse non possunt.

347. COROLLARIUM I. Ex similitudine triangulorum sequitur, partes projectionis perspectivæ alicujus rectæ ad tabulam parallelæ & in partes inæquales divisæ, etiam inæquales esse debere, verum proportionales partibus homologis rectæ objectivæ; atque adeo projectionem perspectivam figuræ ad tabulam parallelæ esse similem figuræ objectivæ.

348. COROLL. II. Lineæ perspectivæ, quæ in tabula sunt parallelæ, sunt in eadem ratione divisæ, ac earum objectivæ; sed lineæ perspectivæ in tabula convergentes, non dividuntur in ea ratione, in qua sectæ sunt earum objectivæ, utpote cum in hoc casu istæ (objectivæ) nequeant esse parallelæ ad tabulam.

349. THEOREMA. III. *Projectio perspectiva ejusdem lineæ objectivæ semper est ejusdem magnitudinis in tabula, quemcunque situm respectu horizontis habeat, & quæcunque ponatur distantia ab oculo, modo semper sit in plano eodem ad tabulam parallelo.*

Idem intelligendum est de quotcunque lineis objectivis inter se æqualibus, & de lateribus polygoni, quemcunque situm in plano eodem tabulæ parallelo habeant.

DEMONSTR. Quamvis hoc theorema evidenter consequatur ex dictis NN. 341, & 347; illius tamen veritas luculentior erit e sequente ratiocinio. Cogitetur recta data objectiva circa unum extremum immotum rotari, altero circulum in plano ad tabulam parallelo describere. Radii ex oculo ad omnia hujus circuli peripheriæ puncta ducti constituent pyramidem conicam (sive conoides) plano tabulæ basi parallelo sectam. Ergo projectio perspectiva basis erit itidem circulus in tabula. Ulterius concipiantur omnem diametri hujus circuli objectivi indefinite produci versus omnem partem, & in eas productas transferri continuo longitudo radii: fiet, ut hac ratione omnes in partes æquales dividantur, & quælibet talis pars considerari potest tanquam linea objectiva data, in alio semper, alioque situ, quem habere potest. Sed

(346) projectiones harum partium æqualium sunt pariter inter se æquales; ergo projectio perspectiva rectæ ejusdem objectivæ, quemcunque situm in plano eodem ad tabulam parallelo habentis, est magnitudinis constantis, sive ejusdem.

350. Problema Fundamentale. *Datis positione plano tabulæ, loco oculi, & puncto objectivo post tabulam, invenire ejus projectionem perspectivam in tabula.*

Pro resolutione Problematis notandum est, situm alicujus puncti in spatio absoluto non posse determinari, nisi per ejus distantias a tribus planis datis diversum inter se situm habentibus. Fit autem hæc determinatio commodissime, si tria plana data sibi perpendiculariter insistant; atque id etiam in praxi Perspectivæ observatur. Supponi enim solet imprimis planum indefinitum HR (fig. 46) per oculum in O positum transiens: situs hujus plani est ad libellam, seu horizontalis, unde etiam *planum horizontale* dicitur. Præcipuus illius usus est, ut distinguantur objecta *superne* & *inferne* posita; quidquid enim in plano hoc existit, cum sit in linea libellæ oculi, nec *infra*, nec *supra* esse dici potest; quæ autem sunt supra hoc planum, oculo altiora; & quæ infra idem sunt, oculo depressiora sunt.

Dein assumitur alterum planum indefinitum VC, pariter per oculum O transiens, & verticaliter, seu ad perpendiculum erectum, ideoque etiam *planum verticale* vocatur. Servit, ut discrimen statuatur inter objecta dextima & sinistima: nam quæ in hoc plano collocata sunt, directe opponuntur oculo. Est hoc planum ad alterum HR perpendiculare; utpote verticale ad horizontale. Tandem sumitur planum tabulæ TB ad aliquod intervallum ab oculo & perpendiculare planis horizontali & verticali, ut adeo omnia tria sint perpendicularia inter se, singula binis quibusvis.

Linea horizontalis tabulæ *hr*, est intersectio plani horizontalis cum plano tabulæ. *Linea verticalis* tabulæ *ut* est intersectio plani verticalis cum plano tabulæ. *Punctum visus* tabulæ est punctum *a*, in quo linea horizontalis secat lineam verticalem. *Radius principalis* est pars O*a* intersectionis plani verticalis cum plano horizontali, quæ metitur distantiam oculi a plano tabulæ.

351. I. Resolutio per Calculum. Sit datum punctum D, cujus projectio *d* in plano tabulæ TB petitur. Demittantur ex hoc puncto D in planum horizontale HR, & in planum verticale VC, perpendicula DI, DS; ducatur ex I recta IA in plano horizontali ad verticale perpendicularis; & ex S altera SA in plano verticali ad planum horizontale perpendicularis. Patet, DSAI esse parallelogrammum rectangulum, cujus planum est norma-

normale ad plana verticale VC, & horizontale HR, ideoque parallelum plano tabulæ TB. SA, five DI, eſt menſura diſtantiæ puncti dati D a plano horizontali, ſive ejus altitudo ſupra libellam oculi: & DS, ſeu IA metitur ejusdem diſtantiam a plano verticali, ſeu quantum objectum reſpectu oculi ſit ſiniſterius. Denique pars Aa interſectionis planorum verticalis & horizontalis, (quæ adeo ad planum tabulæ normalis eſt) menſura eſt diſtantiæ parallelogrammi DSAI a plano tabulæ, conſequenter etiam puncti dati D. His poſitis, cum punctum D detur poſitione, dantur hoc ipſo tres diſtantiæ dictæ DI, DS, Aa magnitudine.

Ducantur ex loco oculi O rectæ OI, OD, OS; habebitur pyramis quadrangularis ODSAI, per planum tabulæ baſi parallelæ secta in $dsai$. Ergo (340) rectangulum $dsai$ eſt projectio perſpectiva rectanguli DSAI, & d puncti dati D. Evidens quoque eſt, rectangulum $dsai$ eſſe ſimile rectangulo DSAI, utpote cum ſint elementa ejusdem pyramidis ſectionibus parallelis formata: hinc latera rectanguli $dsai$ proportionalia ſunt lateribus homologis rectanguli DSAI; & ob triangula Oas, OAS ſimilia, habetur OA : Oa = AS : as; ergo etiam eſt OA ad Oa, ut quodvis latus rectanguli DSAI ad latus homologum rectanguli $dsai$: ergo (Elem. 686) ſequentes duæ habentur analogiæ: OA (ſive Oa + aA): Oa = AI (ſeu DS): ai ſive ds: & OA (vel Oa + aA): Oa = AS (vel DI): as vel di, ex quibus duæ dantur regulæ, aut analogiæ pro ſolutione generali Problematis per calculum.

I

Ut radius principalis plus diſtantia objecti a plano tabulæ eſt
Ad radium principalem;
Ita eſt diſtantia objecti a plano verticali
Ad diſtantiam ſui puncti perſpectivi a linea verticali tabulæ.

II

Ut radius principalis plus diſtantia objecti a plano tabulæ eſt
Ad radium principalem;
Ita eſt diſtantia objecti a plano horizontali
Ad diſtantiam ſui puncti perſpectivi a linea horizontali tabulæ.

352. EXEMPLUM. Supponamus oculum diſtare a tabula 6 pedibus ſeu 72 digitis; punctum vero objectivum ab eadem remotum eſſe 15 pedibus, vel 180 digitis; 4 pedibus, ſive 48 digitis ſupra libellam oculi elevatum; & 7 pedibus, ſive 84 digitis verſus ſiniſtram a plano verticali diſſitum. Oporteat jam hujus puncti projectionem perſpectivam invenire.

Sit

Sit (fig. 49) L T A B margo tabulæ datæ, quem rectangulum suppono. Assumatur in tabula punctum *a*, cui oculus directe est opponendus, sive *punctum visus* tabulæ: ducatur per idem punctum recta *t u* ad marginis latera T A, L B normalis (quod si margo tabulæ non esset rectangularis, ita ducenda foret *tu*, ut, cum peracta delineatione tabula loco destinato collocatur, situm habeat verticalem); erit hæc linea verticalis tabulæ; agatur etiam recta *hr* lateribus T L, A B perpendicularis per idem punctum *a* (vel si margo non sit rectangulus, ut sit normalis ad *ut*), quæ erit linea horizontalis tabulæ.

Fiant tum hæ duæ proportiones: $72 + 180 : 72 = 48 : x$;
$72 + 180 : 72 = 84 : y$.
his rite solutis, obtinebitur $x = 13, 71$, seu 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. quæ est distantia puncti projectionis *d* quæsiti a linea horizontali tabulæ *hr*, & supra eandem accipienda; *y* autem fiet $= 24$ digitis, quæ est distantia ejusdem puncti *d* versus sinistram a linea verticali *u t*.

Designatio ipsa hujus puncti *d* in tabula variis modis fieri potest. Subjiciemus eos, qui commodiores, & exactiores videntur.

353. I. Si margines tabulæ sint rectanguli, accipiantur in lateribus T L & A B puncta E, & *e* a punctis *h* & *r* lineæ horizontalis 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. remota, & agatur per ea linea cæca E *e*, in qua (per primam analogiam) situm esse debet punctum perspectivum quæsitum. Simili ratione ad partem sinistram lineæ verticalis in lateribus T A, L B accipiantur puncta *b* & K ab *u* & *t* lineæ verticalis 24 digitis distantia, ducaturque per ea linea cæca, in qua (per analogiam alteram) pariter esse debet punctum quæsitum, quod adeo erit intersectio *d* linearum E *e*, *b* K.

In praxi, cum hoc modo utimur, qui pro majoribus tabulis est accuratissimus, opportune latera marginis in digitos, aut etiam in lineas dividuntur, initio divisionum in punctis *t*, *u*; *r*, *h* sumto; ex *t* scilicet versus L; dein versus B pergendo; ex *u* versus T & A; ex *h* versus T & L iisdem divisionibus translatis; ut etiam ex *r* versus A, & B. Ex his etiam illud commodi emerget, ut facile duci possint perpendiculares, & ad horizontalem parallelæ, id quod fieri frequentissime oportet, quando plurium objectorum delineatio optica facienda est.

354. II Si margines tabulæ non sunt rectanguli, accipiatur in linea verticali *tu* punctum *s* supra punctum visus *a* 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. ac per illud agatur E *e* ad verticalem perpendicularis. Tum accipiatur in linea horizontali punctum *i* a puncto *a* versus sinistram 24 digitis distans, & ducatur per illud perpendicularis K *b*: intersectio harum perpendicularium erit punctum *d* quæsitum. Modus

hic commode adhibetur pro tabulis minoribus, cum præcipue ope duplicis gnomonis labor excitandi perpendiculares evitetur.

355. III. Poteſt quoque punctum *d* determinari, quin ulla linea ducatur, idque ope duplicis circini, hunc in modum. Crura unius circini aperiantur accurate ad diſtantiam puncti quæſiti a linea verticali, alterius ad diſtantiam ejusdem a linea horizontali. Tum crure unius circini altero in puncto viſus *a* fixo, notetur altero in linea horizontali punctum *i*; ſimiliter ope alterius notetur in linea verticali punctum *s*. Denique circino priore manu altera, altera poſteriore prehenſo, figatur crus unum illius in *i*, hujus in *s*; ubi reliqua duo crura in tabula conveniunt, punctum quæſitum *d* eſſe debet.

356. II. Resolutio Graphica. Sit TB (fig. 47 & 48) planum tabulæ, *ut* ejus linea verticalis; *rh* horizontalis; *a* punctum viſus, D punctum objectivum datum. Tranſeat per D planum horizontale KF, parallelum lineæ horizontali *rh*; ſit XZ interſectio hujus plani cum plano verticali, quod concipitur per *ut* & XZ tranſire; BY ſit interſectio plani KF cum plano tabulæ. Ex puncto D demittatur ad BY perpendiculum DE, quod metitur ejus diſtantiam a plano tabulæ; punctum E, in quod cadit in tabula, dicitur *punctum incidentiæ*: conjungantur puncta viſus *a* & incidentiæ E recta *a*E; transferatur diſtantia DE objecti a tabula in rectam BY, ex E in G; (perinde eſt, ſive punctum G verſus B, ſive verſus Y accipiatur): dein in lineam horizontalem *hr* ita transferatur ex puncto viſus *a* radius principalis *a*O, ut punctum O in partem alteram reſpectu puncti G cadat, hoc eſt, ad partem dextram puncti viſus *a*, ſi G fuerit ad ſiniſtram puncti incidentiæ E, & viciſſim: ducatur OG; ejus interſectio *d* cum *a*E erit punctum perſpectivum dati D.

Demonstr. Ducatur per *d* recta LN parallela verticali *ut*, ac ideo ad horizontalem *hr* & ad BY perpendicularis; erunt triangula *d*GE, *da*O ſimilia, eorumque altitudines *d*N, *d*L in ratione laterum homologorum (Elem. 578); itaque O*a* : GE = *d*L : *d*N, & (Elem. 304) O*a* + GE : O*a* = *d*L + *d*N (ſeu *at*) : *d*L, quæ eſt prima analogia reſolutionis prioris, cum *at* ſit altitudo oculi ſupra planum libellæ, in quo objectum ponitur, ideoque diſtantia objecti a plano horizontali. Denique quia parallelas *d*L, *ut* ſecat recta *a*E, triangula *ad*L (ſeu *asd*), & *at*E ſimilia ſunt, & hinc *at* : *as* (ſive *d*L) = *t*E (ſeu DS) : *ds*. Atqui oſtendimus eſſe O*a* + GE : O*a* = *at* : *d*L; ergo etiam O*a* + GE : O*a* = DS : *ds*, quæ eſt ſecunda analogia reſolutionis primæ.

357. Ob-

357. OBSERVA. Evidens eſt, conſtructionem Problematis manere eandem, ſeu ponatur planum tabulæ perpendiculariter erectum ſupra planum KF, ſeu cum eo congruere, modo linea BY repræſentet ſectionem tabulæ cum plano KF, & linea verticalis *tu* maneat in linea ZX ejusdem plani KF. Atque ſic rem habere ſupponendum erit in prioribus duabus methodis, quas ſequente Capite allaturi ſumus.

Ex hac ſecunda ſolutione praxes variæ deductæ ſunt, quæ paſſim in libris de Perſpectiva conſcriptis traduntur; præcipuas ſubjungemus.

CAPUT II.

Deſcribuntur præcipuæ Methodi Perſpectivæ Practicæ.

I METHODUS

Per Craticulam Perſpectivam.

358. Conſtruitur imprimis quadratum ABDE (fig. 51), quod exhibet planum objectivum tabulæ, hoc eſt, totum ſpatium, quod objecta delineanda in plano occupant. Dicitur etiam *planum Geometricum*. Quadratum hoc dividitur in plura alia, quam fieri poteſt, parva; & poſito, quod margo inferior tabulæ AB congruat cum latere AB quadrati AD, ducitur in plano tabulæ linea horizontalis QO ad eam altitudinem, quæ commoda viſa fuerit; uti etiam linea verticalis VI, prout oculus ſpectatoris vel directe medio tabulæ opponendus eſt, vel ad alterutram partem collocandus, ita, ut S ſit punctum viſus, SI altitudo oculi ſupra planum Geometricum. Ex puncto S ad ſingulas diviſiones lateris BA ducuntur rectæ SB, SG, SI, SC, SM, SA. Radius principalis (ejus longitudinis, quæ opportuna judicatur, ut tantundem oculus a tabula diſtet) utrinque ex puncto S in lineam horizontalem (etiam productam, ſi opus ſit), velut in O & Q, transfertur. Ex utroque hoc puncto ad puncta diviſionum lateris AB, aguntur rectæ OB, OG, OI, OC, OM, & QA, QM, QC, QI, QG, QB, quarum interſectiones *e*, *k*, *l*, *n*, *r*; *d*, *t*, *p*, *f*, *h*, cum rectis SA, SB determinant puncta, per quæ ductæ rectæ *de*, *tk*, *pl*, *fn*, *hr* cum rectis *g*G, *i*I, *c*C, *m*M conſtituunt trapezia majori B*de*A incluſa, quæ omnia ſunt projectio perſpectiva quadrati BDEA, atque minorum in eo contentorum. Trapezium

 B*de*A

B *d e* A *craticula perſpectiva* vocatur. Pro demonſtratione, quod B *d e* A ſit projectio perſpectiva quadrati BDEA, manifeſtum eſt (356) punctum A eſſe punctum incidentiæ puncti E, & AB eſſe æqualem diſtantiæ puncti E a plano tabulæ; igitur interſectio *e* rectarum SA, OB eſt punctum perſpectivum puncti E. Eodem modo puncti K punctum incidentiæ eſt idem A, & AG = AK; ergo puncti K projectio perſpectiva eſt *k*, ubi rectæ SA, OG ſe interſecant. Idem eſt de ceteris omnibus punctis quadrati ABDE.

359. SCHOLIUM. Equidem ex conſtructione patet, craticulam perſpectivam deſcribi poſſe independenter a puncto S, ex datis ſolum O & Q; cum rectæ ex O & Q ad diviſiones lateris plani Geometrici AB ductæ, interſectionibus ſuis determinent diagonales trapeziorum, quæ in craticula deſcribuntur, adeoque his datis etiam ipſa trapezia conſtrui poſſint. Verum modus, quem dedimus, accuratior eſt; cum enim rectæ G*g*, I*i*, C*c* in puncto viſus S concurrere debeant (345); exactius verſus illud tendunt, ſi ipſum punctum S adhibeatur, quam ſi ſolum utamur angulis trapeziorum.

Rectæ *d*B, *g*G, *i*I, *c*C &c, quarum diviſiones inæquales repræſentant partes æquales rectarum BD, GR, IX, CY &c, dicuntur *Scalæ decreſcentes longitudinum*, quod ſerviant *diminuendis* dimenſionibus objectorum ea ratione, qua diverſæ eorum partes magis a tabula diſtant. Et parallelæ *hr*, *fn*, *pl* &c ſunt *ſcalæ decreſcentes latitudinum & altitudinum*, cum ad *diminuendas* latitudines, & altitudines objectorum in diſtantiarum a tabula ratione adhibeantur.

360. USUS CRATICULÆ PERSPECTIVÆ. Quoniam craticula perſpectiva exhibet in tabula ſpatium quadrati Geometrici BDEA, manifeſtum eſt, quod ſi planum alicujus objecti, cujus projectio perſpectiva petitur, delineetur in hoc quadrato, ita ut diviſiones ejuſdem ſpectentur tanquam ſcala dimenſionum plani delineati, facile quoque projectio perſpectiva fieri poſſit. Ut ſi v. g. quadratum in plano Geometrico oblique ad tabulam ſitum perſpective delineare velim, cujus ſingula latera ſint trium pedum; conſtruo quadratum BAED (fig. 52), cujus ſingulæ diviſiones ſint unius pedis, aut ſaltem unum pedem exhibeant, ac intra hoc alterum oblique poſitum IMNO, cujus ſingula latera æquentur tribus diviſionibus lateris quadrati Geometrici, ſitumque datum habeant. Tum in craticulæ perſpectivæ areolis correſpondentibus quadratulis plani Geometrici, in quibus ſunt puncta I, M, N, O, deſigno puncta *i*, *m*, *n*, *o*, ut ſingula ſint ad areolarum partes homologas. Ductis *mi*, *io*, *on*, *nm* habeo trapezium *ionm* perſpectivum quadrati IONM, ut per ſe liquet.

361. Si quadratum IONM sit basis cubi perspective delineandi, præterea e punctis *i*, *m*, *n*, *o* erigi debent perpendiculares ad horizontem *i*F, *m*P, *n*Q, *o*H; & quoniam altitudo cubi objectivi est æqualis tribus divisionibus lineæ AB quadrati geometrici; singulæ dictæ perpendiculares fiant æquales triplæ latitudini areolæ illius, cui quævis insistit, & acceptæ ope cricini in lineis horizontalibus, quæ per puncta *i*, *m*, *n*, *o*, transeunt. Denique ducantur QP, PF, FH, HQ; habebitur projectio perspectiva cubi. Nam rectæ Plana verticalia cubi objectivi terminantes, plano basis sunt perpendiculares; igitur (344) earum projectiones debent esse rectæ verticales, sive parallelæ ad VK; & quia earum dimensio objectiva æquatur triplici divisioni quadrati geometrici; earundem altitudo perspectiva æqualis est triplici latitudini trapeziolorum craticulæ, acceptæ in eodem plano (parallelo scilicet ad planum tabulæ), in quo ea altitudo collocari debet.

362. OBSERVA I. Facile apparet, in hisce operationibus supponi quadratum geometricum esse respectu oculi post tabulam; ideoque necesse est, ut objecta, quæ in tabula tanquam anteriora, & oculo propiora repræsentanda sunt, propius ad AB, latus maximum craticulæ perspectivæ, delineentur; quæ vero remotiora apparere debent, constituenda sunt versus latus quadrati DE.

363. II. si in plano objecti, cujus delineatio ex legibus Perspectivæ facienda est, vel in pluribus ejusdem planis, aut in planis inter se parallelis, descriptæ sint plures lineæ parallelæ inter se, uti v. g. sunt membra ornatus Architectonici, tum ut labori parcatur, tum ut accurationi consulatur, determinandum est punctum earum concursus (quod earum *punctum accidentale* dici solet). Jam vero quando hæ parallelæ sunt simul horizontales, quod quam sæpissime accidit, earum punctum concursus est in linea horizontali tabulæ, ita, ut, si habeatur projectio unius ex illis, tantum opus sit hanc projectionem usque ad lineam horizontalem producere; punctum, in quod cadit, est simul reliquarum punctum accidentale. Cum enim supponantur omnes parallelæ simul esse ad libellam ductæ, radius ex oculo ad easdem parallelus debet duci in plano horizontali, ergo tabulæ nullibi occurrere potest, quam in linea horizontali.

Itaque habita semel projectione perspectiva *nm* rectæ objectivæ NM, eandem projectionem produco in R, quod est punctum accidentale projectionis rectæ objectivæ OI, & duarum basis superioris, quæ sunt ad NM, & OI parallelæ. Idem est de puncto L, in quo concurrere debent projectiones parallelarum ON, IM, hisque correspondentium in basi superiore cubi. At si parallelæ objectivæ non sint ad libellam ductæ, opus est, ut duarum repe-

riantur projectiones, quæ in eam partem, in quam convergunt, productæ concursu suo determinant punctum accidentale omnium reliquarum.

364. III. Ut repleatur vacuum extra latera craticulæ perspectivæ relictum, rectæ *de*, *tk*, *pl* &c (fig. 51) utrinque produci possunt usque ad tabulæ margines, & divisiones lineæ *de* in utramque partem productam transferri; si dein ex puncto visus S ad puncta harum divisionum ducantur rectæ, donec occurrant marginibus tabulæ, efficient cum *kt*, *lp* &c productis nova trapezia, sive projectiones perspectivas quadratulorum, quæ ex utroque latere quadrati geometrici BAED adhuc addi possunt, quo spatium plani geometrici capacius reddetur.

365. IV. Quando tabulæ minores faciendæ sunt, & objecta sub diversis obliquis sitibus repræsentanda, usus craticulæ perspectivæ commendandus est. Verum pro magnis tabulis hæc methodus locum non habet, præcipue, si objecta magno numero, & inter se distantia dantur; tunc enim planum Geometricum iis sufficiens construi nequit. Quod si tamen tam magnum haberi possit, ut omnia objecta sub dimensionibus subduplis, subtriplis, vel subquadruplis capiat, hæc in craticula separatim perspective delineari poterunt; sed dein in tabula ad id destinata rursus depingenda, lineis, quæ in craticula descriptæ sunt, duplicatis, triplicatis, vel quadruplicatis; eritque objectorum projectio ejusmodi tanto accuratior, quanto minus dimensiones ex craticula acceptæ augeri debuerunt.

366. V. Omitti etiam potest descriptio quadratulorum in plano Geometrico, si accurata tabella conscribatur, quæ dimensiones, situm, & distantiam objectorum in tabula exhibendorum contineat. Tum enim latere infimo tabulæ in tot, quot libuerit, partes æquales diviso, quarum quævis digitum, pedem, hexapedam, aut generatim mensuram eam repræsentet, juxta quam tabella magnitudinum conscripta est, & quæ *modulus* dici poterit, craticula his divisionibus conveniens fiet, cujus singula trapezia digitum quadratum, aut pedem, vel hexapedam quadratam, aut denique *modulum quadratum* valebunt. Unde objecta delineanda eo modo, quo tabella magnitudinum exigit, in craticula collocari poterunt.

II METHODUS
Sine Craticula perspectiva.

367. In hac methodo, ut in præcedente, supponitur planum basis objecti delineandi EFGHI (quod in præsente exemplo est pri-

prisma pentagonum) (fig. 50) in ea distantia a limbo inferiore tabulæ in plano geometrico constructum esse, in qua apparere debet.

Ducatur in plano tabulæ linea verticalis VK, atque paullo ultra planum basis objecti continuetur; fiat item horizontalis SP, in qua accipiatur SO, æqualis radio principali, versus utramque partem puncti S. Tum ab angulo B marginis infimi tabulæ abscindatur BC altitudini prismatis objectivæ æqualis, jungaturque C cum extimo puncto lineæ horizontalis P. Inveniatur per constructionem superius descriptam (356) omnium angulorum prismatis projectio perspectiva: exempli causa pro angulo E, accipiatur circino ejus distantia a linea verticali VK, & transferatur ex K in D, erit D punctum incidentiæ anguli E. Accipiatur præterea ejusdem distantia a margine tabulæ AB, & transferatur ex D in N, in partem scilicet oppositam puncto O respectu D; ducantur SD, ON; harum intersectio *e* erit projectio perspectiva puncti E.

Repertis hac ratione projectionibus reliquorum angulorum pentagoni, excitentur ex iis perpendiculares *e*T, *f*L, *g*M &c, quæ fiant æquales lineis $\epsilon\tau$, $\varphi\lambda$, $\gamma\mu$ &c inter PC & PB interceptis ex parallelis ad AB, quæ e singulis punctis *e*, *f*, *g* &c ducuntur. Reliqua peragantur ut priore methodo; erit eadem demonstratio.

368. Observationes, quas priore articulo subjunximus, hic quoque locum habent. Potest etiam fieri exacta distributio objectorum delineandorum, & tabella tum distantiarum a linea verticali, tum a limbo tabulæ AB singulorum punctorum, quorum projectio petitur, conscribi, cujus ope, ut superius dictum est, puncta D & N reperiantur; uti etiam tabella altitudinum pro punctis supra basin objectorum elevatis. Delineatio perspectiva eo erit accuratior, quo ichnographia, & objectorum altitudines exactius fuerint acceptæ; & id quidem, quamvis singulis pedibus dimensionum objectivarum non nisi duæ vel tres lineæ in scala moduli respondeant.

III Methodus
Per margines scalares.

Hæc methodus priores duas includit, atque alia præterea habet commoda, ob quæ iis merito præferatur, quorum unum e præcipuis est, quod delineatio æque ope angulorum figurarum, ac laterum perfici possit. Unde in ea describenda paullo prolixiores erimus, quam in præcedentibus.

Con-

Constructio marginum scalarium.

369. Constituto in tabula puncto visus S (fig. 53), ducatur per illud linea horizontalis H S Q, atque utrinque, quantum fieri potest, ultra tabulam prolongetur. Fiat etiam linea verticalis V T, in qua accipiatur punctum C seu versus V, seu versus T, ita, ut S C æquetur radio principali. Centro C radio quovis (quo hic fuerit longior, eo divisio fiet accuratior) describatur arcus A B, 60, vel 70 graduum circiter, qui in singulos, vel in denos saltem gradus dividatur, initio ad A facto. Ex C per singula divisionum puncta ducantur rectæ occurrentes lineæ horizontali, quæ hac ratione una ex parte divisa erit. Tum eædem ejus divisiones ex puncto S in alteram partem transferantur, ut utrinque æqualiter dividatur tota ejus longitudo. Compendii causa ad C A applicari potest instrumentum *Transportatorium* in suos gradus accurate divisum, & ope fili tenuis in ejus centro fixi, & per singulos gradus tensi, in linea horizontali puncta divisionum notari.

370. Et quia ex hac constructione manifestum est, divisiones lineæ horizontalis a puncto S computatas esse tangentes angulorum ad C, sinu toto existente C S; eædem multo accuratius reperientur, si construatur separatim scala R D in quotvis partes æquales divisa, ita tamen, ut earum 10 æquentur radio principali, quæ iterum in denas minores subdividi poterunt, & harum quævis rursus in denas alias, quo fiet, ut radii principalis partes millesimæ habeantur. Quodsi si jam e tabula tangentium excerpantur competentes numeri, iidem ex scala parata facile in lineam horizontalem transferentur.

371. In margine infimo tabulæ F E accipiantur (incipiendo ab extremo F & pergendo versus E) tot, quot libet, partes æquales, quæ sint *modulus* dimensionum objectorum delineandorum; & ex puncto Q, accepto in horizontali producta ad distantiam a P æqualem radio principali, ducantur ad eas lineæ cæcæ, vel vero applicata regula notentur puncta interfectionum in linea F G, adscriptis notis 1, 2, 3, 4 &c. Eædem divisiones transferantur ab E in latus E K.

372. Denique in marginem F E ex utraque parte puncti T transferantur partes æquales 1, 2, 3, 4 &c illis, ad quarum divisionum puncta prius lineæ cæcæ ex Q ductæ fuerunt, quarum interfectione latus F G divisum est. Quin majoris commoditatis gratia eædem partes æquales transferantur ex puncto V in utramque partem marginis supremi tabulæ, iisdemque numeris notentur. Atque ita constructio marginum scalarium absoluta erit.

Ex

Ex his marginibus ſcalaribus diviſiones lineæ horizontalis ſerviunt projectioni perſpectivæ linearum ad libellam ductarum, quæ ad planum verticale ſunt obliquæ. Diviſiones marginum dextri & ſiniſtri ſunt *ſcalæ decreſcentes* longitudinum proportionatæ objectorum a tabula diſtantiis; & diviſiones ſuperioris & inferioris ſunt *ſcala frontis*, ſive objectorum in ipſa fronte, ſive margine tabulæ FE conſtitutorum, & ad planum tabulæ parallelorum, modulus.

373. Conſtructionem marginum ſcalarium rite factam eſſe, ut demonſtretur, concipiatur *primo* centrum C ita elevari ſupra punctum viſus S, ut planum trianguli SCH ſit ad planum tabulæ normale. Liquet punctum C tunc fore locum oculi, atque gradus arcus AB centro C deſcripti eſſe menſuram angulorum ad oculum, quos efficiunt lineæ in plano horizontali deſcriptæ, & ad planum verticale obliquæ; quare recte in linea horizontali notari poſſunt puncta, ad quæ radii ex oculo per ſingulos gradus ducti terminantur. *Secundo* cogitetur ſimiliter, quod linea QP elevetur perpendiculariter ad planum tabulæ, ut angulus SPQ ſit rectus, linea vero FE ſit ad idem planum, ſed ex parte altera ab oculo averſa, normalis, atque propterea planum, in quo ſunt rectæ ex Q ad puncta diviſionum FE ductæ, ſit ad planum tabulæ perpendiculare, FG exiſtente communi utriusque interſectione. Patet, diviſiones FE fore diſtantias a tabula in plano Geometrico producto acceptas. Exempli cauſa, FN deſignet unitatem moduli diſtantiæ ultra tabulam, erit F 1 ejus projectio perſpectiva; nam ob triangula rectangula QP1, FN1 ſimilia eſt PQ : FN = P1 : F1; igitur etiam PQ + FN : PQ = P1 + F1 (ſeu PF) : P1, quæ cum ſit ex primis analogiis reſolutionis generalis (351), ſequitur, punctum 1 eſſe projectionem puncti N. Idem eſt de aliis diviſionibus.

374. Coroll. Ex his conſtat, quod ſi nequeat ſufficienter produci planum tabulæ, ut diviſiones in marginibus dextro & ſiniſtro, quot requiruntur, obtineantur, eæ facili calculo reperiri poſſint; id, quod faciendum quoque eſt pro majoribus tabulis. En hujus rei exemplum!

Sit radius principalis SC decem pedum, aut generatim decem unitatum moduli; altitudo oculi ſupra planum Geometricum 6; ut obtineantur diſtantiæ P 1, P 2, P 3 &c, quarum intervalla ſingula ſingulis moduli unitatibus reſpondeant, faciendæ ſunt ſequentes proportiones.

	10 + 1	- - - -	5, 45 = P 1
	10 + 2	- - - -	5, 00 = P 2
	10 + 3	- - - -	4, 61 = P 3
	10 + 4	- - - -	4, 29 = P 4
	10 + 5	- - - -	4, 00 = P 5
ut	10 + 6	ſunt ad 10; ita 6 ad	3, 75 = P 6
	10 + 7	- - - -	3, 53 = P 7
	10 + 8	- - - -	3, 33 = P 8
	10 + 9	- - - -	3, 16 = P 9
	10 + 10	- - - -	3, 00 = P 10
	10 + 11 &c	- - - -	2, 86 = P 11 &c.

Unde ex ſcala in partes decimales (quarum in præſente exemplo diſtantia lineæ horizontalis a margine infimo tabulæ contineat 6, 00) facile erit in marginibus lateralibus tabulæ diviſionum puncta accurate notare, quotquot delineationi neceſſaria fuerint.

375. Alter modus dividendi margines laterales, ſua facilitate ſe commendat, eſtque prioribus duobus expeditior, niſi quod magnam circumſpectionem, ut errores vitentur, exigat; ideoque tum commodiſſime adhibendus, quando ſolummodo majoribus diviſionibus opus, uti ſi minores objecti partes paucæ ſunt, & tantum præcipua quædam puncta deſignanda, quæ conſtituendis ceteris ſerviant, vel dum res non ſinit, ut tam minutim ſequamur regulas, ſed naturali quadam æſtimatione rudiusve, adumbrandum eſt objectum.

Menſura, quæ pro unitate moduli aſſumpta eſt, transferatur in marginem inferiorem tabulæ ex F in N (fig. 54), & radius principalis ex P in Q ad eandem partem puncti N; ducantur PN, QF: ex puncto interſectionis a demittatur ad PF perpendiculum $a\,1$; ducatur Q 1, & ex b, ubi ſecat PN, rurſus demittatur perpendicularis $b\,2$ ad PF: tum iterum ducatur Q 2, & ex puncto interſectionis c cum PN, perpendicularis $c\,3$ ad PF, & ſic deinceps, donec tot diviſiones habeantur, quot opus eſt.

376. DEMONSTR. Quoniam QP, NF ſunt parallelæ, erunt triangula Q P a, N F a ſimilia: itaque $PQ : FN = Pa : aN$; & $PQ + FN : PQ = Pa + aN$ (ſeu PN): Pa. Sunt vero etiam triangula rectangula PNF, Pa1 ſimilia; ergo $PN : Pa = PF : P1$; conſequenter $PQ + FN : PQ = PF : P1$, quæ eſt analogia, juxta quam diviſio facienda erat.

Obſervanda circa lineam horizontalem tabulæ.

377. Si ſupponamus ſpectatoris oculum ita reſpectu tabulæ collocatum, uti debet, cum projectio perſpectiva perfecta eſt, atque ei per tabulæ quadrum (quæ ideo inſtar vitri transparens ſupponitur) patere liberum aſpectum plani indefiniti, continui, & ad li-

libellam positi, manifestum est, quod hæc planities ei appareat usque ad circulum procurrere, qui cæli superficiem aspectabilem a tellure separare videtur (*qui horizon cælestis dicitur*). Jam vero projectio perspectiva hujus circuli non potest esse nisi linea recta: cum enim hic circulus habeat centrum in ipso spectatoris oculo, radii ex eo ad omnia circumferentiæ illius conspicuæ puncta ducti sunt in eodem plano: itaque eorum interfectio cum plano tabulæ est intersectio binorum planorum, quæ necessario linea recta est (Elem. 629). Patet igitur, hanc esse lineam horizontalem tabulæ, quæ adeo est projectio perspectiva portionis horizontis cælestis, spectatori visibilis, ejusque divisiones sunt projectio graduum ejusdem.

378. Quoniam oculus centrum est horizontis cælestis, sequitur, quod si duæ lineæ objectivæ in plano libellæ per oculum transeunte convergant ad aliquem angulum in oculo, gradus horizontis, & consequenter divisiones lineæ horizontalis tabulæ, metiantur hunc angulum, ideoque earum ope linearum objectivarum inclinatio optice repræsentari possit. Et quia omnia plana inter se parallela ad distantiam infinitam ab oculo videntur concurrere; planum geometricum, & universim omne planum libellæ convergit cum plano horizontali per oculum transeunte, donec in horizonte cælesti cum eo coincidat. Atque hinc *linea horizontalis tabulæ est linea concursus projectionum omnium planorum ad libellam positorum.*

Planorum omnium ad libellam positorum, quibus insistunt objecta delineanda, distantia a se invicem finita est, cum interim horizontis cælestis peripheria infinite ab oculo distat; igitur intervallum inter ea plana infinite parvum est respectu distantiæ ab oculo, ad quam concurrere videntur; atque adeo omnia plana ad distantiam finitam supra vel infra oculum ad libellam posita, respectu horizontis cælestis, & consequenter respectu lineæ horizontalis tabulæ, quæ illius projectio est, instar unius cum eodem horizonte cælesti congruentis consideranda sunt, verticali per oculum transeunte, seu perpendiculari eorum distantiam inter se metiente, evanescente, & rationem puncti cum centro horizontis coincidentis non excedente.

Unde angulus, qui fit a duabus rectis in plano quopiam ad libellam posito convergentibus, atque verticem in verticali per oculum transeunte habet, non aliter spectari debet respectu peripheriæ horizontis cælestis, sive lineæ horizontalis tabulæ, quam si fieret in ipso oculo: quare ejus mensura erunt etiam divisiones lineæ horizontalis, earumque ope optice delineari poterit.

Denique cum objecta quævis, quæ ab oculo distincte cerni possunt, ideoque in tabula delineari, habeant distantiam tum inter se, tum

ab oculo finitam, horizonte cælesti infinite distante; puncta omnia, quibus objectorum partes constant, censenda sunt infinite propinqua, atque adeo omnes anguli, quos in plano quovis ad libellam posito efficiunt termini eorum planorum, sive latera, ita considerandi sunt, tanquam in centro horizontis cælestis eorum vertices existerent, ut adeo divisiones lineæ horizontalis eosdem metiantur.

379. Hinc sequitur I°. *per divisiones lineæ horizontalis tabulæ mensurari posse, & perspective delineari omnes angulos, in plano quovis ad libellam posito sitos.*

380. II°. *Ut projectio perspectiva anguli cujuslibet objectivi fiat, inveniri debere projectionem illius verticis* (qua ratione reperiatur, inferius Num. 389 dicetur), *atque ex ea rectas ad bina divisionum lineæ horizontalis puncta, inter quæ numeri graduum mensura contineatur, duci; sive ad ea, ad quæ radii ex oculo lateribus objectivis anguli paralleli pervenirent.*

381. III. *Si e quotlibet punctis* C, D, E, *in tabula acceptis* (fig. 55) *ducantur binæ ad easdem intersectiones lineæ horizontalis* A, B, *angulos* A C B, A D B, A E B *fore projectiones angulorum objectivorum inter se æqualium, quorum mensura est numerus graduum divisionibus inter* A & B *comprehensis æqualis;* in præsente figura scilicet 30°. Certe, cum C B, B D, B E ad idem punctum accidentale convergant, necesse est, ut sint projectiones opticæ trium parallelarum (363); similiter rectæ A C, A D, A E tres parallelas alias designant: atqui si tres parallelæ inter se occurrant tribus aliis itidem inter se parallelis, eadem debet esse omnium inclinatio, ideoque idem angulus.

382. Infertur denique, rectam, uti D A, aut E A, ex quovis tabulæ puncto D vel E ad punctum quodpiam A lineæ horizontalis ductam esse projectionem perspectivam lineæ objectivæ in plano libellæ sitæ, & ad planum verticale tot gradibus, & versus eam partem inclinatæ, quot, quæve a puncto A indicantur. In hoc exemplo lineæ D A, vel E A sunt projectiones rectarum ad libellam ductarum, quæ decem gradibus versus dextram a plano verticali declinant.

Problemata ope marginum scalarium solvenda.

383. PROBLEMA I. *Ex dato puncto tabulæ* C (fig. 55) *ducere rectam, quæ sit optice parallela datæ lineæ perspectivæ* D F. Supponitur, quod hæ lineæ sint in planis ad libellam positis.

RESOLUTIO. Producatur perspectiva data D F, donec occurrat lineæ horizontali in quovis puncto B; tum jungantur C B.

384. PROBLEMA II. Ad extremum D (fig. 55) lineæ perspectivæ D F, cujus objectiva est in plano libellæ, angulum numerum graduum petitum continentem construere.

RESOLUTIO. Producta linea perspectiva, donec occurrat horizontali in B, numerentur ex B versus eam partem, ad quam construen-

ſtruendus eſt angulus, v. g. verſus A, tot diviſiones lineæ horizontalis, quot graduum eſſe debet angulus, & ducatur DA.

385. OBSERVA I. Si angulus conſtruendus fuiſſet 60 aut 80 graduum, eodem modo accipi inter B & A 60 vel 80 gradus debuiſſent, 20 ſcilicet, aut 40 gradibus ultra punctum viſus S ſumtis.

386. II. Si angulus ad partem puncti B debuiſſet conſtrui; diviſionibus ex hac parte non ſufficientibus, accipi debuiſſet anguli petiti complementum ad duos rectos, & gradus ex B verſus ſiniſtram A numerari, indeque linea ADR duci; atque ita angulus BDR fuiſſet petiti numeri graduum.

387. PROBLEMA III. *Ex dato puncto* D (fig. 56) *lineæ perſpectivæ datæ* CE, *erigere optice perpendicularem.*

RESOLUTIO. Problema hoc ad præcedens redit. Producta CE usque ad lineæ horizontalis punctum B, a B in diviſionibus horizontalis numerentur 90 gradus v. g. usque ad A, indeque ducatur AD.

388. PROBLEMA IV. *Ex puncto tabulæ dato ducere perſpective perpendicularem ad rectam datam.*

RESOLUTIO. Sit data CE (fig. 56), & F punctum tabulæ pariter datum. Producatur CE uſque ad horizontalem in B; inde usque ad A numerentur 90 gradus, & per F ducatur ex A recta ad AD, quæ erit perpendicularis quæſita.

389. PROBLEMA V. *Data puncti objectivi in plano Geometrico diſtantia a tabula, & a plano verticali, invenire ejus punctum perſpectivum.*

RESOLUTIO. Per diviſiones marginum lateralium diſtantiæ puncti objectivi a tabula reſpondentes ducatur linea cæca, & alia itidem cæca ex puncto viſus ad eam diviſionem marginis inferioris, quæ indicat diſtantiam puncti objectivi a plano verticali, utriusque interſectio erit punctum perſpectivum quæſitum. Exempli cauſa, ſi diſtantia a plano tabulæ eſſet quatuor unitatum moduli; & a plano verticali trium verſus ſiniſtram, punctum perſpectivum foret G.

390. Si punctum datum non ſit in plano Geometrico, ſed vel ſupra illud elevatum, vel infra depreſſum, v. g. in foſſa quapiam, concipienda eſt perpendicularis ex eo ad planum Geometricum ducta, quæ ſeu altitudinem, ſeu depreſſionem metiatur; quoniam itaque hæc perpendicularis tam plano tabulæ, quam verticali parallela eſt, punctum plani Geometrici, in quod cadit, eandem ab his planis habet diſtantiam, quam punctum objectivum datum. Unde ſi fiat projectio puncti hujus in plano Geometrico, in quod cadit perpendicularis, & ducatur per illud parallela lineæ verticali, determineturque longitudo perpendicularis eo modo, quem Pro-

 blema-

blemate ſequente præſcribemus, extremum perpendicularis punctum erit projectio perſpectiva dati.

391. PROBLEMA VI. *Lineam objectivam poſitione, & magnitudine datam optice deſcribere in tabula.*

RESOLUTIO. Sit longitudo lineæ datæ duarum unitatum moduli, alterum ejus extremum G (fig. 56) diſtet a plano verticali tribus, & a plano tabulæ quatuor ejusmodi unitatibus: quæratur per Probl. Præcedens ejus projectio G. Sed ut alterius extremi punctum perſpectivum rite determinetur, triplex expendendus eſt caſus.

392. CASUS I. *Dum linea objectiva plano verticali parallela eſt.* Ponatur extremum lineæ G eſſe tabulæ propius. Quia longitudo eſt duorum modulorum, alterum ejus extremum a tabula ſex modulis diſtat. Ducatur jam ex G ad punctum viſus recta GS, & per diviſionum marginum lateralium puncta 6, 6 cæca 6 I 6: interſectio I erit projectio alterius extremi.

Quod ſi extremum G altero magis diſtaret a tabula, duo moduli ex quatuor ſubducendi eſſent, & recta per puncta 2, 2 marginum lateralium ducta abſcinderet in recta S 3 extremum quæſitum.

393. CASUS II. *Dum linea objectiva eſt plano tabulæ parallela.* Vel in hac hypotheſi extremum G propius eſt plano verticali, quam alterum, vel eſt remotius? Si hoc, liquet, alterum extremum a plano verticali diſtare uno modulo. Unde ex puncto viſus S ducatur cæca ad marginis inferioris diviſionem 1; hujus interſectio K cum parallela ad horizontalem per G tranſeunte determinat alterum extremum quæſitum.

At ſi extremum G lineæ objectivæ ſit plano verticali vicinius, diſtantia alterius ab eodem plano erit 5 modulorum, & recta ex S ad diviſionem 5 inferioris marginis duci debebit.

394. CASUS III. *Quando linea objectiva tam ad planum verticale, quam ad planum tabulæ obliqua eſt;* uti ſi 20 gradibus verſus dextram a plano verticali declinet.

Ducatur per G recta ad diviſionem 20° lineæ horizontalis ad partem dextram puncti viſus; per idem G, & verſus eam partem, ad quam linea objectiva declinat, ducatur quoque GK lineæ horizontali parallela, & optice æqualis objectivæ (393) ſive duorum modulorum: ex hujus extremo K ducatur KQ, quæ ſecet rectam GL ad 20° ex G ductam verſus eam partem, ad quam ſitum eſſe debet extremum quæſitum, & ſimul tranſeat per diviſionem illam lineæ horizontalis, quæ indicat dimidium complementi anguli obliquitatis, quem facit linea objectiva cum plano verticali (in noſtro

ſtro exemplo per 35°, quod eſt medietas de 70°, ſive complementi 20°). Interſectio rectarum KQ, & GL determinat punctum L perſpectivum extremi alterius quæſiti. Quod ſi enim ad ea, quæ fieri præcepimus, attendatur, patebit, factam fuiſſe projectionem perſpectivam trianguli objectivi iſoſcelis GKL, cujus crura GK, & GL optice æqualia ſunt.

395. OBSERVA. Si ſeparatim conſtruatur, vel trigonometrice calculetur triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa ſit recta objectiva data, & unus ex angulis acutis æqualis angulo obliquitatis lineæ objectivæ cum plano verticali, ex valore lateris huic angulo oppoſiti reperietur, quantum extremum alterum lineæ objectivæ magis, minusve diſtet a plano verticali, quam extremum G: & ſi, ducta ex puncto viſus per G recta SM, accipiatur in inferiore margine tabulæ linea MP, qua lineæ objectivæ extremum quæſitum L magis, minuſve a plano verticali abeſt, & ducatur ad punctum viſus alia recta PS, hujus interſectio cum GH erit punctum L quæſitum.

396. PROBLEMA VII. *Lineam datam perſpectivam in quotvis partes optice æquales dividere.*

RESOLUTIO. Sit data PQ (fig. 57) in quatuor partes æquales dividenda. Ex quovis puncto S lineæ horizontalis ducantur per ejus extrema P, Q rectæ SD, ST occurrentes margini inferiori tabulæ. Intervallum DT ſecetur in partes æquales DM, ML, LG, GT, & ducantur SM, SL, SG, quæ datam PQ in punctis *m*, *l*, *g*, in partes optice æquales divident. Manifeſtum enim eſt, eas partes intercipi inter parallelas objectivas SD, SM, SL, SG, ST (383) æqualiter inter ſe diſtantes, ac rectam TD in partes æquales ſecantes; igitur per easdem data PQ in partes perſpective æquales dividitur.

397. OBSERVA I. Pro majore accuratione, punctum S ita ſeligendum eſt, ut quantum fieri poteſt, diſtantiæ ejus ab extremis datæ PQ ſint æquales.

398. OBSERVA II. Si recta PQ dividenda ſit in partes inæquales in ratione data, in eadem ratione dividatur TD (id, quod ope *circini proportionum* expedite fit), & rectæ ex S ad diviſionum puncta ductæ ſecabunt quoque datam PQ in ratione data.

399. PROBLEMA VIII. *Ex dato puncto* A *in tabula ducere perſpectivam* AK *rectæ, quæ cum plano verticali faciat angulum objectivum majorem, quam ut graduum numerus in diviſionibus lineæ horizontalis exhiberi poſſit* (fig. 57).

Ex dato puncto A ad eam partem, ad quam ſpatii commoditas admittit, ducatur recta AH horizontali parallela, & æqualis

lis projectioni perspectivæ radii principalis. Ex puncto visus O accipiatur OZ designans gradus complementi anguli dati, & conferatur cum divisionibus marginis inferioris, ut sciatur, quot modulos contineat: tum ducatur OH, & ex ea abscindatur HK, tot modulis perspective æqualis, quot continet OZ: recta AK erit quæsita perspectiva.

Etenim cum AH sit æqualis radio principali, & AHO projectio anguli recti, sequitur, HK esse tangentis anguli HAK, sive complementi anguli dati, projectionem: igitur AK habet situm, qui quærebatur.

400. OBSERVA. Quod si recta quæsita simul debeat esse magnitudinis datæ, accipiendum est in AH punctum N ita, ut AN sit perspective æqualis magnitudine datæ; & ducenda NC ad divisionem lineæ horizontalis, quæ indicat dimidium complementi anguli objectivi dati (394): obtinebitur AV.

401. SCHOLIUM. Allata adhuc Problemata ostendunt, ope marginum scalarium haberi posse delineationem perspectivam plani alicujus objectivi non tantum ex laterum, sed etiam angulorum magnitudine. Atque ut id fiat accuratius, & expeditius, sæpe perutile est, adhibere simul diversarum diagonalium tum situm, tum longitudinem, quarum computus in polygonis regularibus admodum facilis est. Verum res hæc diligens requirit exercitium.

402. PROBLEMA IX. *Rectas ad planum horizontale perpendiculares optice exhibere; sive, quod idem est, linearum altitudinum projectionem perspectivam invenire.*

I RESOLUTIO. Problemati satisfit per ea, quæ superius N. 357 dicta sunt.

403. II RESOLUTIO. Oporteat ex puncto Q (fig. 57) ad horizontem perpendicularem excitare, $6\frac{1}{2}$ modulos altam. Ducatur ex puncto visus O, vel alio quovis lineæ horizontalis, per Q recta OF usque ad inferiorem marginem tabulæ F, indeque erigatur ad eundem marginem normalis FE, $6\frac{1}{2}$ modulos, in ejusdem divisionibus acceptos, longa: ducatur OE: hujus intersectio I cum QI ad horizontalem perpendiculari ex Q erecta, erit supremum punctum lineæ quæsitæ.

Nam evidens est (381), OF, OE esse projectiones duarum linearum ad libellam ductarum, ac inter se parallelarum, consequenter rectis FE, QI, ab illis interceptis, exhiberi objectivas æquales.

404. III RESOLUTIO. Constat, distantiam lineæ horizontalis a projectione perspectiva alicujus puncti objectivi in plano Geometrico collocati tot esse modulorum, quot assumta est altitudo

oculi

oculi ſupra planum Geometricum. Exempli gratia, ſi linea horizontalis ducta eſt ad diſtantiam 5 modulorum a margine inferiore, diſtantia puncti Q a linea horizontali debet continere quinque modulos perſpective acceptos. Quod ſi itaque ſpectetur QR ut quinque modulorum, in eadem ſupra R accipi poteſt punctum I, quod a Q diſtet $6\frac{1}{2}$ partibus æqualibus, quarum in QR continentur quinque. Executio facilis eſt ope *circini proportionum.*

405. PROBLEMA X. *Lineas perſpectivas altitudinum in partes æquales, ſive inæquales in ratione data, dividere.*

RESOLUTIO. Cum lineæ perſpectivæ altitudinum ſint ad planum tabulæ parallelæ, in partes æquales, vel inæquales in ratione data non ſecus, ac lineæ objectivæ dividendæ ſunt, idque vel ope *circini proportionum*, vel ex diviſionibus rectæ FE, in margine inferiore acceptis, ductis per QI rectis ad O, quibus in eadem ratione, ac FE, ſecatur QI.

406. PROBLEMA XI. *Determinare in tabula punctum accidentale parallelarum inter ſe, & ad horizontem inclinatarum, quarum poſitio datur.*

RESOLUTIO. Cum parallelæ poſitione dentur, ſi concipiantur plana verticalia, in quibus ſingulæ ſitæ ſunt, evidens eſt, hæc plana fore inter ſe parallela, ideoque dari eorum ſitum reſpectu plani verticalis tabulæ. Jam igitur hæc plana vel ſunt plano verticali tabulæ parallela, vel ad illud obliqua quantitate data:

407. I. Si ſunt parallela ad planum verticale tabulæ, punctum accidentale quæſitum eſt in linea verticali tabulæ, ſupra, vel infra punctum viſus quantitate æquali numero graduum, qui ſunt complementum inclinationis parallelarum cum horizonte, & ex puncto viſus in diviſionibus lineæ horizontalis accipiuntur: & quidem ſupra punctum viſus, ſi parallelarum extrema ſuperiora a plano tabulæ ſint reclinata; infra vero, ſi verſus tabulam vergant.

408. Sit exempli cauſa delineandum parallelepipedum rectangulum, cujus plana ſint ad horizontem ſub angulo 39° inclinata, longitudine illius ad planum verticale parallela, velut trabs quadrangularis in murum ad planum tabulæ parallelum reclinata (fig. 60). Manifeſtum eſt *primo*, rectas quatuor plana lateralia parallelepipedi claudentes eſſe omnes ad horizontem angulo 39° inclinatas; dextimum vero & ſiniſtimum planum eſſe plano verticali tabulæ parallelum. *Secundo* Plana baſium eſſe itidem ad horizontem inclinata angulo 51°, complemento ſcilicet ad 39°, ob rectos angulum quemvis ſolidum conſtituentes. *Tertio* ex octo lateribus baſium eſſe quatuor horizonti parallela (quorum projectiones hic ſunt *ab*, *dc*, AB, DC), nempe imprimis latus, cui in plano Geometrico incumbit, eique in eadem baſi parallelum (AB, DC); dein latus,

quo innititur muro, & huic in basi illa parallelum (*ab*, *dc*): reliqua quatuor harum basium latera (*ad*, *bc*; AD, BC) esse ad horizontem inclinata angulo complementi ad 39°. Ex his apparet, in linea verticali reperienda esse duo puncta accidentalia; alterum T supra punctum visus, pro lineis A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, plana lateralia parallelepipedi terminantibus, quarum puncta suprema recedunt a plano tabulæ: alterum P infra punctum visus S, pro lateribus basium AD, BC, *ad*, *bc*, quorum superior pars versus tabulam accedit. Itaque ex linea horizontali accipienda est imprimis tangens 39°, & in verticalem ex S in T transferenda; dein tangens 51° ex S in P. Reliqua ex inspectione figuræ patent.

409. II. Si plana verticalia, in quibus sunt parallelæ datæ, faciunt cum plano verticali tabulæ angulum, uti si supponamus, parallelepipedum exempli prioris esse reclinatum in planum, quod cum verticali faciat angulum 30°, sive cum plano tabulæ angulum 60°, tum opus est tribus punctis accidentalibus, uno in T (fig. 59) pro rectis terminantibus plana lateralia parallelepipedi; altero in Q pro lateribus basium, quorum alterum est in plano geometrico, alterum in plano, in quod reclinatur parallelepipedum, atque pro his parallelis: tertio in P pro reliquis quatuor lateribus basium, quorum duo plano geometrico, duo muro oblique insistunt.

410. Quod ad punctum Q pro parallelis, quarum una est in plano geometrico, nulla est difficultas, quippe quod sumi debet in lineæ horizontalis ea divisione, quæ denotat angulum obliquitatis earum cum plano verticali. Sed ut reliqua, v. g. T, reperiantur, sequens adhiberi potest methodus.

411. In linea horizontali VQ accipiatur VE tangens complementi anguli inclinationis planorum lateralium parallelepipedi cum horizonte; transferatur ex O in perpendicularem OF, sumpto O ad divisionem 45°: jungantur F & V recta, quæ secet in R alteram perpendicularem, erectam ad D, ubi notatur complementum declinationis planorum lateralium a plano verticali: transferatur OF ex D in K, & junctis K & R, fiat DT = KR; erit T punctum accidentale quæsitum. Eodem modo invenitur punctum P.

412. Ut methodi veritas demonstretur, cogitandum est, quod recta ad horizontem sub angulo v. g. 39° inclinata indefinite producta in superficie sphæræ cælestis pertingeret ad punctum 39° supra horizontem elevatum, aut vero ad peripheriam circuli minoris sphæræ cum horizontali paralleli, & undique ab eo 39° distantis (id genus circulus voce Arabica *Almicantarath* appellatur). Jam vero cum projectio perspectiva horizontis cælestis sit linea

hori-

horizontalis tabulæ (377), *projectio alicujus Almicantarathi est hyperbola, cujus vertex est in linea verticali, & semiaxis principalis æquatur tangenti altitudinis illius supra horizontem* (sive parti lineæ horizontalis interceptæ inter punctum visus, & divisionem numerum graduum altitudinis designantem); *semiaxis vero conjugatus radio principali.*

413. Circulus enim cælestis horizonti parallelus est basis coni optici, cujus vertex in oculo, & basis coni oppositi aliud Almicantarathum tantundem infra horizontem depressum. Sit A (fig. 58) locus oculi; A B H repræsentet planum horizontis cælestis cum plano geometrico ad distantiam infinitam ab A concurrentis; P T sit planum tabulæ; E G M Almicantarathum supra horizontem angulo H A E elevatum; K N I Almicantarathum infra horizontem. Evidens est, sectiones conorum oppositorum M S *m*, N S *n* per planum tabulæ P T ad eorum axem C L parallelum esse hyperbolas, quarum centrum est punctum visus tabulæ B, & semiaxis principalis A D, sive S B. Et ut ostendatur, quod semiaxis conjugatus sit A B, esto A D vel S B $= a$, S D $=$ P C $=$ A B $= b$ (est autem A B radius principalis). A C, vel B P sit $= x$; hinc S P $= x - a$; P M $= y$. In triangulis rectangulis A S D, S E P similibus est A D : S D $=$ S P : E P; igitur E P $= \frac{bx - ab}{a}$; & E C $=$ E P $+$ P C $= \frac{bx}{a}$; item P G $=$ P C $+$ C G $= \frac{bx + ab}{a}$. Jam vero ex natura circuli E M G, habetur (Elem. 565) $PM^2 = PE \times PG$; igitur $yy = \frac{bb\,xx}{aa} - bb$, quæ est æquatio ad hyperbolam, cujus semiaxes sunt a & b (Elem. 840).

414. Hinc jam constat, quod si, sumta V C $=$ V E, notetur in plano (fig. 59) verticali punctum C altitudinis 39°, ac per illud describatur hyperbola C T semiaxibus V C, V O, ea sit projectio perspectiva Almicantarathi 39°, & punctum accidentale quæsitum in eadem existat, ubi a perpendiculari ex D erecta secatur. Restat jam, ut demonstretur, constructione exposita (411) verum punctum T reperiri.

415. Sit itaque V O $= b$, V C, vel O F $= a$; V D $= y$; D T, aut K R $= x$: ob triangula V D R, O V F similia, est O V : O F $=$ V D : D R, hinc D R $= \frac{ay}{b}$; & $DR^2 = \frac{aa\,yy}{bb}$. Et quia K D, seu V C $= a$, est $KD^2 = a^2$. Porro ob triangulum K D R rectangulum, $KR^2 = KD^2 + DR^2$, sive $xx = aa + \frac{aa\,yy}{bb} = DT^2$: ergo (Elem.

844) D T est ordinatim applicata ad axem conjugatum hyperbolæ, cujus semiaxes sunt V C, V O.

416. COROLL. I. Liquet (Elem. 833), V F esse asymptotum hyperbolæ C T: hinc dato puncto T almicantarathi 39°, facile est, hyperbolam integram, quæ sit ejus projectio perspectiva, describere (Elem. 874).

417. OBSERVA I. Hæc methodus commode adhibetur, si inclinatio, & declinatio linearum objectivarum 50 vel 60 gradus non excedat: quod si enim major sit, lineas in plano tabulæ admodum producere necesse est, quod non sine incommodo fit. Unde in ejusmodi casu puncto accidentali carere debemus, & quasvis lineas singillatim determinare, quærendo trigonometrice, vel graphice (vide methodum N. 518) punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum ex cujusvis supremo puncto demissum, nec non ipsam perpendiculi altitudinem; ac punctum illud plani geometrici, una cum perpendiculi altitudine optice describendo.

418. OBSERVA II. Si, quæ adhuc dicta sunt, rite intelligantur, ipsa figura 59 ostendit, quam facilis sit parallelepipedi descriptio optica, quam superius (N. 409) exposuimus.

419. COROLL. II. Ex fig. 58 patet, a esse tangentem anguli inclinationis parallelarum datarum, qui dicatur I; y tangentem anguli obliquitatis, quem faciunt earum plana cum plano verticali tabulæ, qui vocetur O; b vero sinum totum, qui sit R. Igitur formula $xx = \frac{aabb + aayy}{bb} = (bb + yy) \times \frac{aa}{bb}$ factis his substitutionibus in hanc abit $xx = (\text{R}^2 + tang^2\,\text{O}) \times \frac{tang^2\,\text{I}}{\text{R}^2}$. Est autem ex Trigonometria $sec^2 = \text{R}^2 + tang^2$; quare etiam $xx = sec^2\,\text{O} \times \frac{tang^2\,\text{I}}{\text{R}^2}$, & hinc $x = sec\,\text{O} \times \frac{tang\,\text{I}}{\text{R}}$. Sed ex iisdem regulis trigonometricis est $sec = \frac{\text{R}^2}{cos}$: quare $x = \frac{\text{R}^2}{cos\,\text{O}} \times \frac{tang\,\text{I}}{\text{R}} = \frac{\text{R} \times tang\,\text{I}}{cos\,\text{O}}$. Unde obtinetur hæc anologia: *Ut est cosinus anguli obliquitatis planorum, in quibus sunt parallelæ objectivæ ad horizontem inclinatæ, cum plano verticali tabulæ, ad tangentem anguli inclinationis earundem cum horizonte; ita est sinus totus ad distantiam puncti accidentalis harum parallelarum a linea horizontali tabulæ.*

420. COROLL. III. Hinc etiam sequitur, quod si ex omnibus gradibus in linea horizontali notatis erigantur perpendiculares, eæ sint projectio perspectiva circulorum maximorum horizonti perpendicularium (qui in Astronomia dicuntur circuli verticales), quorum gradus metiuntur inclinationem quamvis rectarum ad horizon-

zontem, & planum verticale obliquarum. Ipsa quoque linea verticalis tabulæ ejusmodi circulum exhibet, qui cum meridiano sphæræ cælestis comparari potest. Quod si quis igitur has projectiones circulorum verticalium in suos gradus dividere voluerit, lineæ verticali tabulæ easdem tribuet, quæ fiunt in linea horizontali; reliquarum divisiones expedito calculo per analogiam præcedentem reperiet.

421. Sed ut divisio hæc peragatur graphice, sit OQ (fig 61) linea horizontalis, SB verticalis, OY projectio circuli verticalis dividenda. Transferatur radius principalis ex O in Q, & distantia OS, verticalis dividendi a puncto visus S, ex O in M. (si linea verticalis tabulæ instar meridiani consideretur, distantia hæc OS voce Astronomis usitata dicetur *azimuthum* verticalis dividendi). Conjungantur M & Q recta, & centro Q, radio QO describatur arcus ON: demittatur ex N ad OQ perpendicularis NL, erit LQ manifeste cosinus azimuthi, ejus tangente existente OM, & sinu NL. Transferatur LQ in partem oppositam ex Q in P, & ducatur per P perpendicularis ad horizontalem PR, in quam, velut in *t*, *u*, *x* &c versus utramque partem puncti P transferantur divisiones lineæ horizontalis ex S acceptæ. Ducantur per puncta *t*, *u*, *x* &c & Q rectæ, quæ determinabunt puncta divisionum quæsita T, V, X &c. Cum enim P*t* v. g. sit tangens 10° radio existente OQ, ex similitudine triangulorum rectangulorum QOT, QP*t* habetur QP : P*t* = QO : OT. Quæ est analogia corollarii præcedentis (419.

422. Obesrva III. Si fingamus sphæræ cælesti, vel terrestri inscriptum esse cubum, ad cujus duo plana opposita axis æquatoris, vel eclipticæ sit perpendicularis, per præcedentes regulas in quatuor planis reliquis, per quæ axis non transit, optice exhiberi possunt omnia puncta superficiei sphæræ, quæ undique ab æquatore vel ecliptica intra 45 gradus continentur. Reliquorum vero projectio eodem modo fieri posset, si supponerentur plana cubi producta. Atque hunc in modum constructæ sunt chartæ cælestes Patris Pardies.

423. Problema XII. *Projectionem opticam facere figuræ in plano libellæ a plano geometrico distante descriptæ.*

Resolutio. In margine inferiore tabulæ AB (fig. 62) accipiatur numerus modulorum, quo planum datum supra planum geometricum elevatum est, transferaturque in utrumque marginem lateralem ex B in L, & ex A in K: conjungantur L & K recta, quæ jam instar marginis ipsius inferioris AB consideretur, & spatium LCDK tanquam totum planum tabulæ, veluti si figura, cujus projectio petitur, sita foret in novo hujus plano geometrico. Un-

de L K easdem habebit divisiones, quas A B, eundemque usum respectu figurae delineandae, quem A B respectu objectorum in vero plano geometrico sitorum. Lineae porro horizontalis divisiones immutatae manent, eademque iis utendi ratio; verum quod ad lineas C L, D K, in quibus distantiae punctorum figurae delineandae a plano tabulae accipi debent, divisiones non sunt eaedem, ac in C B, D A, attamen proportionales. Unde inveniri poterunt vel ope circini proportionum, vel graphice sequente methodo.

Ducatur ad D A sub angulo quovis D F, eique aequalis, atque transferantur in eandem divisiones marginis D A, quarum correspondentes in D K petuntur. Jungantur K, F, & ad K F per singula divisionum rectae D F puncta agantur parallelae, quae determinabunt divisiones quaesitas in D K. Exempli causa, si oporteat in D K designare distantiam duorum modulorum a tabula, accipiendi sunt duo primi moduli decrescentes scalae D A, atque ex F in G transferendi; tum ducenda est G H ad F K parallela; erit K H distantia quaesita in plano supra geometricum elevato.

Eadem omnino operandi ratio est, si ponatur planum, in quo figura repraesentanda est, supra planum horizontale tabulae, vel infra planum geometricum, uti v. g. in fossa. Nam in priore casu L K supra C D, in posteriore infra A B, velut in *l k*, constituenda est.

424. PROBLEMA XIII. *Dato puncto perspectivo* B (fig. 63) *centri circuli radii dati, v. g. trium modulorum, exhibere projectionem circuli.*

RESOLUTIO. Per punctum datum B ducatur ex puncto visus V recta V F, & D C ad horizontalem parallela, fiantque B D, B C trium modulorum optice decrescentium. Per idem B ducantur quoque P G, O L ad divisionem 45 graduum utrinque a puncto visus in linea horizontali. Similiter ex divisione $22°\frac{1}{2}$ ex parte dextra ducantur rectae per C & D, quae O L secabunt in M & N. Ex eadem divisione ad partem sinistram $22°\frac{1}{2}$ rectae ad C & D ductae secabunt P G in I & K. Denique per octo puncta inventa C, I, E, N, D, K, F, M, ducatur curva regularis, erit ea projectio perspectiva circuli petiti.

425. Evidens est, *projectionem perspectivam circuli esse ellipsin, quemcumque is situm habeat.* Radii enim ex singulis circuli peripheriae punctis ad oculum ducti conum, sive conoides, efficiunt, cujus vertex est in oculo, & sectio per planum tabulae necessario est ellipsis.

426. Descriptio ellipsis facilior, & accuratior fit, si per E & F ducantur ad lineam horizontalem parallelae, quae efficiant trapezium, quod erit projectio quadrati, cui circulus inscriptus est, P L G O. Itaque ellipsis ita erit describenda, ut omnia quatuor latera

tera

tera trapezii in C, D, E, F, tangat. Si ad modum operandi præscriptum attendatur, patebit, eum adhiberi posse ad inveniendos vertices angulorum octogoni circulo inscripti.

427. Observa. Equidem facile apparet, centrum ellipseos non esse B, nec ejus axem majorem DC. Sed centrum est punctum medium S rectæ EF. Nam cum OG, & PL sint tangentes ellipseos, & DC eis parallela, hæc bisecatur in B per rectam EF, quæ per puncta contactus transit; igitur DC est ordinata diametri EF, in cujus medio consequenter est centrum S.

428. Quod positionem axium hujus ellipseos attinet, ea diversa est, pro diversa scilicet circuli objectivi distantia tum a plano verticali, tum a plano tabulæ. Et quoniam id scire pulchrum magis, quam utile in delineationibus, generatim notasse sufficiat, axem majorem ellipseos, quæ sit projectio perspectiva circuli, non esse, nisi projectionem chordæ illius, quæ jungit puncta contactus circuli cum radiis extimis ex oculo ad circulum dictis.

Caput III.

Exemplum, & observationes generales pro delineationibus Perspectivis omnis generis.

429. Cum objecti multis partibus constantis designatio optica facienda est, in eo maxime elaboret delineaturi industria, oportet, ut solerter advertat, quænam lineis similiter ductis comprehendantur, quæ inter parallelas easdem, quæ in iisdem verticalibus, in iisdem diagonalibus &c. consistant, ut singulæ in projectione locum debitum sortiantur, ne errorum numerus, quibus praxis a regularum accuratione deficit, etiam ex hoc capite augeatur.

430. Proponatur exempli causa ex regulis Perspectivæ delineatio stylobatæ ordinis Tusci cum plintho baseos columnæ facienda, ita, ut trunci planum alterum aspectabile inclinatum sit ad planum verticale tabulæ sub angulo 40° ex sinistra parte, alterum ex parte dextra sub angulo 50°, sitque distantia anguli quadræ, qui oculo est propior, a plano tabulæ unius, & a plano verticali duorum modulorum versus sinistram. Omnium autem membrorum stylobatæ dimensiones eæ sint, quas fig. 64 notatas exhibet numeris suis, quamvis ipsa descriptio illius utcunque rudis esse possit, quippe cujus nullus usus alius in præsens est, quam ut singulorum membrorum nexum & ordinem monstret.

431. At-

431. Atque ne difficultatum, quæ in delineatione occurrere possunt, numerus, si simul aspectui objiciantur, tironem absterreat, eas plurium figurarum descriptione partiemur, quo etiam linearum multiplicium confusioni occurretur. Unde pro assumptæ tabulæ magnitudine, ubi marginum scalarium constructio peracta erit, ducatur ex puncto visus V (fig. 73) ad divisionem 2 marginis infimi versus sinistram lineæ verticalis recta V 2, & per puncta 1, 1 marginum lateralium altera 1 A 1, cujus intersectio exhibet punctum perspectivum A anguli stylobatæ oculo proximi (389).

432. E puncto A ducantur indefinitæ A 40°, A 50°, exhibentes situm planorum conspicuorum; ex puncto visus V vero ad marginis infimi divisionem 7 recta V 7, quæ intersectione sua cum 1 A 1 determinat A C (393) novem modulorum decrescentium; tot enim ex stylobatæ dimensionibus quadræ longitudini competunt. Jungatur C cum 20° (medietate 40 graduum, qui complementum sunt ad 50°) ex parte dextra sumtis, habebitur projectio E anguli quadræ dextimi (394). Hinc jam facile positio tota quadræ A D F E absolvetur, ducta ex A ad 5° (quæ scilicet directio diagonalis est) recta, & altera E F ex E ad 40°, intersectio F erit angulus viciniori A oppositus. Denique ducatur per F & 50° recta occurrens alteri A 40° in D.

433. Et quoniam quadræ latera æqualia in ichnographia quadratum efficiunt, & reliqua omnia stylobatæ membra singulorum laterum æquales dimensiones habent; non solum diagonalis quadræ per A & F descripta, sed etiam omnium reliquorum membrorum, quæ in eorum planis concipi possunt, versus 5° ex parte dextra lineæ horizontalis tendere debent, quippe quæ divisio 45 gradibus abest a 40° ex sinistra, & 50° ex dextra sumtis.

434. Præterea manifestum, quod si concipiatur planum perpendiculariter erectum super diagonali A 5 projectionis ichnographiæ quadræ, omnes reliquorum membrorum diagonales in eodem sint futuræ.

435. Atque hinc I°, ut membrorum projecturæ, & retractiones commodius designentur, ejusdem diagonalis portionem oculo propiorem in partes optice æquales dividere consultum est (399). Et ne diversi generis divisionibus marginis infimi usus impeditior fiat, adhibeatur pro novis hisce linea A C margini parallela; cum porro arbitraria sit puncti ad hanc divisionem peragendam in linea horizontali electio (396), assumatur hoc in 40°, ducaturque inde per E (fig. 74) recta, donec A C secet in G, productam, si opus sit. A G dividatur in 9 partes æquales, quoniam lateri quadræ 9 mo-

moduli tributi ſunt. Primæ duæ partes ad A ſubdividantur in minores, uti hic in dimidias. Ad puncta hæc ducantur ex 40° rectæ occurrentes diagonali in H, K, L, quæ conſtituendis projecturis, & retractionibus ſervient, ideoque iisdem numeris notanda ſunt, ac partes in A G correſpondentes.

436. Illud vero hic probe notandum, partes AH, HK, KL, non eſſe projectiones perſpectivas ſemimodulorum, ſed eſſe eas ad ſemimodulos, ut eſt diagonalis quadrati ad latus ſuum, ſeu ut $\sqrt{2}$ ad 1. Dimidii moduli decreſcentes ſunt partes A*h*, *h k*, *k l*. Diviſiones vero lineæ A F deinceps *ſcalam projecturarum* vocabo.

437. II°. Ut dimenſio altitudinum expeditior ſit, producta diagonali F A, uſque dum occurrat margini inferiori in M, erigatur inde perpendicularis indefinita M T, in quam ex diviſionibus marginis inferioris transferantur omnes dimenſiones altitudinum, quæ in prima ſitus & magnitudinum conſtitutione (fig. 64) ſingulis partibus tributæ ſunt, in N, O, P, Q, R, S, T. Rectam M T in ſequentibus *ſcalam altitudinum* appellabo (fig. 74).

438. His ita conſtitutis, erigantur ex quatuor angulis projectionis quadræ perpendiculares indefinitæ A B, D I, F G, E C, (fig. 75), & jungatur punctum N ſcalæ altitudinum cum puncto 5° lineæ horizontis: interſectio cum A B abſcindit altitudinem perſpectivam anguli quadræ in B. Ex hoc eodem puncto B agatur recta ad 40°, quæ determinabit apicem I altitudinis D I anguli quadræ ex parte ſiniſtra conſpicui; item altera ad 50°, quæ anguli dextri altitudinem C præbet. Ducantur ex C ad 40°, & ex I ad 50° rectæ, habebitur earum interſectione in G altitudo anguli quadræ, qui angulo A opponitur. Quod ſi omnia accurate ex regularum præſcripto hactenus facta ſunt, interſectio modo dicta G non ſolum erit in perpendiculari F G, ſed etiam in diagonali per N & 5° tranſeunte: id quod examinis inſtar eſſe debet, tum ut errores ita deprehenſi corrigantur, tum ut deinceps evitentur.

439. Pro regula O N in (fig. 64) ſitus & magnitudinum conſtitutione prima deſignata, ducantur primum diagonales B G, I C (fig. 76); & quia hæc regula 0, 6 moduli retrahi debet, accipiatur in ſcala projecturarum pars A H = 0, 6. Dein erigatur ex H normalis, occurrens, diagonali G B in D, erit D angulus inferior regulæ, qui ſi jungatur cum 40° & 50°, interſectiones diagonalis I C exhibent ejusdem regulæ angulos K & F. Rectæ porro ex K ad 50°, & ex F ad 40° ductæ, ſe in ipſa diagonali B G ſecabunt, atque illic in E habebitur quartus angulus regulæ. Unde quadrilaterum D K E F baſin regulæ exhibet, qua quadræ incumbit. E quatuor repertis modo punctis erigantur perpendicula indefinita;

tum nectatur punctum O ſcalæ altitudinum, quod regulæ altitudinem deſignat, cum 5° recta O 5, quæ occurrens perpendiculari DV in V angulum ſuperiorem regulæ, qui oculo proximus, deſignat; in Y vero (ubi alteram perpendicularem ex E erectam ſecat) huic oppoſitum; rectæ denique ad V ex 40° & 50° ductæ determinant reliquos duos L & X. Et ſiquidem conſtructio fuerit exacta, rectæ ex L ad 50°, & ex X ad 40° ductæ ſe in Y interſecare debent, id, quod examinandæ operationi ſerviet. Atque hunc in modum projectio optica regulæ perfecta eſt.

440. Ut jam truncus ſtylobatæ ſuper his erigatur, fiant diagonales LX, VY (fig. 77); & quia ex prima magnitudinum conſtitutione 1, 2 moduli retrahi debet, in ſcala projecturarum ſumatur AC = 1, 2. Erigatur in C perpendicularis indefinita, occurrens diagonali VY in K, in quo erit angulus inferior trunci, ſi eum apophyge carere ſupponamus. Jungantur 40° & 50° cum K, ut in diagonali LX acquirantur B & D, anguli laterales; & ductis ex B ad 50°, & ex D ad 40° rectis obtinebitur etiam quartus I in diagonali VY, eritque quadrilaterum KBID projectio perſpectiva plani trunci, quo regulæ inſidet.

441. E quatuor angulis inventis perpendiculares indefinitæ excitentur KE, BG, DF, IH, & ut ſingularum altitudo debita abſcindatur, ducatur ex 5° ad Q ſcalæ altitudinum (in hoc enim punctum cadere altitudo trunci ſupponitur) recta 5° Q, quæ in E angulum anteriorem determinat. Ex E ducantur porro E 40°, & E 50°, quæ in G & F abſcindunt angulos laterales; rectæ denique ex G ad 50°, & ex F ad 40° ductæ interſectione ſua H in ipſa Q 5° dant angulum poſticum, oculo non conſpicuum.

442. Ut apophygis trunci deſcribatur, jungat recta punctum P ſcalæ altitudinum, quod aſſumtam altitudinem apophygis æquat, cum 5°, quæ in *k*, ubi perpendiculum CK productum ſecat, eandem optice determinat; hinc porro rectæ ad 40° & 50° ductæ, uti ſuperius in projectione regulæ & quadræ factum, apophygis altitudines in reliquis angulis dabunt. Denique deſcribantur curvæ per *b* & L, per *d* & X, per *k* & V tranſeuntes, quarum prima & poſtrema cavitatem parti ſiniſtræ obvertant, cum oculus ad dextram ſtylobatæ ſit conſtitutus.

443. Ventum jam eſt ad coronidem ſtylobatæ, cymatio Lesbio, altitudine RQ (fig. 64) & regula SR conſtantem. Itaque plano ſupremo trunci (fig. 78) rite delineato fiant diagonales GF, EH, paullum ultra truncum excurrentes, cum cymatium projecturam habeat. Planum porro inferius, quo cymatium trunco inſidet, ex prima magnitudinum & ſitus conſtitutione retrahi debet o, 9 modu-

moduli. Unde ex puncto B scalæ projecturarum erigatur perpendicularis B C, occurrens diagonali E H productæ in C; erit C angulus anterior hujus plani, ex quo facile reliqui in I & L diagonalis G F, & in K diagonalis E H productæ reperientur.

444. Et quoniam regulæ latera sunt in iisdem planis cum lateribus quadræ baseos stylobatæ, producantur indefinite perpendicula angulorum V, A, X quadræ, qui scilicet videri possunt. Ex puncto R scalæ altitudinum ducatur R 5°, quæ intersectione in P cum perpendiculo A P, abscindit angulum inferiorem regulæ; quod si altera quoque ex S ad 5° ducatur (est autem R S regulæ altitudo) supremus quoque angulus ejusdem in *p* habebitur. Ex *p* & P rectæ ad 40°, & 50° ductæ reliquos *n* N, *o* O præbent, ut alias factum.

445. Quia planum supremum cymatii intra regulam o, 3 moduli ex assumptis magnitudinibus retrahendum est, ducta diagonali N O (fig. 79.), atque erecta ex o, 3 scalæ projecturarum perpendiculari, quæ R 5° secat in *c*, habetur angulus supremus cymatii *c*; hinc vero rectæ ad 40°, & 50° ductæ, ubi diagonalem N O in *i* & *l* secant, alios quoque determinant. Describantur curvæ *i* I, *c* C, *l* L, eæ cymatii projectionem absolvent.

Superest modo plinthus baseos columnæ. Et cum eadem quantitate, ac truncus stybolatæ, retrahatur, producantur rectæ angulares trunci indefinite. Punctum altitudinis plinthi T in scala acceptum jungatur cum 5° recta T 5°, erit intersectio E cum producto angulo trunci, angulus supremus plinthi, qui si nectatur cum 40°, & 50°, etiam G & F reliquos conspicuos determinabit.

446. Hisce subjungamus observationes quasdam in præcedentes operationes.

I°. Si in prima magnitudinum & situs constitutione sit projectura quædam ultra angulum infimum basis, cui totum objectum insistit, excurrens, ea in scala projecturarum designetur divisione cis punctum A.

447. II°. Si margo supremus tabulæ eodem modo, ac infimus, divisus sit, ut N. 372 insinuatum est, facilis erit omnium perpendicularium occurrentium erectio, quippe quæ fiet, si regula ita ad punctum, ex quo perpendicularis excitanda est, applicetur, ut per easdem utriusque marginis divisiones transeat.

448. III°. In Perspectiva practica diagonalium insignis est usus, tum ut angulorum in polygonis situs ad examen revocetur, tum etiam ut reperiantur polygonorum centra. Sic in allato exemplo operationum bonitas examinari potuit hunc in modum, observando scilicet, an omnium diagonalium, quæ ductæ sunt, interse-

ctiones sint in eadem recta, ad lineam verticalem parallela, cum omnes debeant in axe stybolatæ, cujus projectio est linea perpendicularis, esse.

449. IV°. Intersectio diagonalium etiam adhiberi potest ad reperiendum in tabula punctum, in quod cadit perpendiculum ex apice alicujus pyramidis, turris campanariæ, alteriusve in cuspidem coeuntis, aut tentorii militaris &c demissum.

450. V°. In diagonalibus commodissime etiam projecturæ, & retractiones diversarum partium objecti determinantur; attamen hic usus, quem præcedente exemplo ostendimus, ad quadrata solum, & polygona regularia restringendus est; projecturæ enim & retractiones ad singula latera æquales quadrata aut polygona regularia concentrica constituunt, ideoque earum anguli sunt in diagonalibus per centra planorum, quibus insistunt, transeuntibus.

451. Quod si itaque hæc plana quadrata non sint, sed ut plerumque evenit, parallelogramma rectangula, velut ABCD (fig. 72), ubi AB, CD sunt $3\frac{1}{2}$ modulorum, & BC, AD $4\frac{1}{2}$ decrescentium; accipiantur in projectionibus laterum in se longiorum partes AE, BF; DG, CH optice æquales lateribus in se minoribus, in nostro exemplo $3\frac{1}{2}$ modulorum decrescentium, ut in plano ABCD describantur duorum quadratorum ABFE, DCHG projectiones, quarum diagonales BE, AF; GC, DH, uti superius, ad angulos projecturarum, & partium retractarum reperiendos adhiberi poterunt. Commodum quoque fuerit, si ex his diagonalibus aliqua dividatur, & *scalæ projecturarum* vices agat.

452. At si planum sit polygonum irregulare, tum loco rudioris illius partium adumbrationis, quæ veras magnitudines, ac situm solis notis numericis indicat, accurata, & geometrica constructio facienda est, projecturis & retractionibus ex veris dimensionibus constitutis, & id quidem ope scalæ exactæ, magnique partium numeri, ac tantæ magnitudinis, ut etiam minores partes rite accipi possint. Præterea binæ perpendiculares in hoc plano ducendæ sunt, quarum altera situm tabulæ, altera plani ejusdem verticalis habeat, ut ope circini singulorum punctorum ab his distantia accipi, & in scalam transferri possit, eorumque projectio perspectiva juxta Problema V vel XII fieri.

CAPUT

Caput IV.

Apparatus necessarius, quando magnus objectorum situ, & magnitudine datorum numerus optice delineandus est.

Frontem scenæ appello omnia ea objecta, quæ in tabula ceteris anteriora, & velut in fronte, integra exhibenda sunt.

453. I°. Cum magnus objectorum numerus est, quæ in tabula exhiberi debent, sive, quod eodem redit, quando objectum repræsentandum ingens est, v. g. ædes magnificæ, palatium quodpiam, vel hortus cum suis ambulacris &c. distantiis partium inter se, situ, ac magnitudine constituta, seu rudiori rerum delineandarum adumbrationi adscriptis numeris dimensionum, seu in tabellam ex ordine relatis, primo indagandum est, quantum a tabula frons scenæ remota esse debeat. Hoc ut rite fiat, sumenda est ex tabella magnitudinum parata objecti ceteris vicinioris, magisque eminentis altitudo, & sequens analogia facienda:

Ut altitudo tabulæ
Ad radium principalem;
Ita altitudo objecti
Ad distantiam ab oculo, in qua constituendum est objectum, ut integrum in tabula exhiberi possit.

Exempli causa: si supponamus, A B (fig. 65) esse objectum vicinissimum, simulque altissimum, ad 16 modulos assurgens; altitudinem tabulæ T R continere 5 modulos; radium principalem O T denique 10 modulis æqualem: erit R T : T O = B A : A O. Subductis calculis reperitur A O = 32 modulis, ideoque A T = 22 modulis. Igitur frons scenæ 22 modulis a plano tabulæ distare debet, ut objectum ei proximum, & ceteris altius integrum videri possit.

454. II°. Ulterius videndum, an ea sit tabulæ latitudo, ut totam frontis scenæ amplitudinem capiat. Quem in finem fiat proportio:

Ut distantia objecti ab oculo per præcedentem analogiam reperta
Ad radium principalem;
Ita est latitudo frontis scenæ
Ad latitudinem, quam tabula habere debet, ut illam capiat.

455. Esto A B (fig. 67) latitudo frontis scenæ = 48 modulis; O locus oculi ob objecto A B 32 modulis distantis = O C; D E latitudo tabulæ. Si tabula totam frontis latitudinem exhibet, radii ex oculo ad extrema utrinque latitudinis puncta ducti per ipsos margines tabulæ ad D, & E transeunt. Sunt autem triangula A O B, D O E ob parallelas A B, D E similia; itaque perpendiculares O C,

OF sunt magnitudines homologae; & hinc OC: OF = AB: DE. Instituto calculo invenitur DE = 15 modulis. Ergo latitudo tabulae 15 modulorum esse debet, ut in ea tota frontis scenae latitudo & altitudo repraesentari possit. At si v. g. tabula non esset, nisi 12 modulos lata, frons scenae longius removeri deberet, novaque distantia ex sequente analogia, quae prioris inversa est, reperiretur:

Ut Latitudo tabulae
Ad radium principalem;
Ita est latitudo frontis scenae
Ad distantiam ejusdem ab oculo, ut tota in tabula exhiberi possit.

In priore hypothesi invenietur 40 modulorum, ut adeo a tabula 30 modulis removeri deberet.

456. III°. Ut linea horizontalis, & verticalis tabulae determinetur, eligendum est punctum in fronte scenae, cui oculus spectatoris directe opponi debet; erit igitur certa quaedam ejus puncti distantia a latere alterutro hujus frontis, tum etiam altitudo supra planum geometricum: utraque si e tabella magnitudinum ab initio constitutarum sumatur, illa dabit distantiam lineae verticalis ab alterutro margine laterali tabulae; haec vero distantiam lineae horizontalis a margine inferiore. Hinc duae, quae sequuntur, fiant analogiae:

Ut distantia oculi a puncto in fronte scenae assumto
Ad radium principalem;
Ita est distantia ejusdem puncti ab alterutro latere frontis scenae
Ad distantiam lineae verticalis a margine tabulae ad eam partem sumto, ad quam acceptum est latus scenae.

Est enim CO : FO = CB : FE.

Dein . . . .

Ut distantia oculi a puncto in fronte scenae assumto
Ad altitudinem ejusdem puncti supra planum Geometricum;
Ita est radius principalis
Ad distantiam lineae horizontalis a margine inferiore tabulae.

Etenim si CE (fig. 66) repraesentet planum geometricum, CA altitudinem puncti in fronte scenae assumti, DF tabulam, patet esse OA : AC = OT : DT.

457. Quod si altitudo oculi supra planum geometricum alia commodior visa fuerit, quam puncti in fronte scenae assumti, ita ut hoc punctum solummodo ad situm lineae verticalis determinandum adhibeatur, postrema analogia hunc in modum ex iisdem triangulis AOC, ODT constituenda erit.

Ut distantia oculi a verticali ad planum geometricum, quae per punctum in fronte scenae assumptum transit,

Ad

Ad altitudinem oculi supra planum geometricum;
Ita est radius principalis
Ad distantiam lineæ horizontalis a margine inferiore tabulæ.

458. IV°. Si frons scenæ AB (fig. 69) non sit parallela plano tabulæ, sed quantitate data BAL inclinata; uti si frons ædificii oblique oculo objicienda sit, quæ totam tabulæ latitudinem exæquet; calculi præparatorii non nihil plus difficultatis habent: quæ tamen evitari potest, diversis dimensionibus tabulæ assumtis, dum tentando eæ reperiantur, quæ proposito faciant satis; si scilicet prius quatuor extrema frontis scenæ puncta optice designentur, & ex trapezio inde orto tabulæ altitudo, & latitudo constituatur. Quod si lubeat eas calculo directe invenire, is sequente ratione ineundus est.

459. Ubi punctum F, per quod planum verticale transire debeat, constitutum est (fig. 69), & seu ex calculo trigonometrico, seu ex constructione geometrica scalæ accuratæ subsidio magnitudo linearum AL, FM, AH, FH tenetur, sit $OP = r$, $DE = t$, $PE = x$: est nempe PE distantia lineæ verticalis a tabulæ margine E, qua mox subjiciendo calculo reperta, cetera facile invenientur. Sit præterea $BL = b$, $FM = HL = d$, $AH = f$. Ex triangulis BGL, OPE similibus habetur $OP : PE = BL : LG$, sive $r : x = b : \frac{bx}{r} = LG$. Hinc $HG = d - \frac{bx}{r}$. Dein ob similitudinem triangulorum HGO, PEO, est $PE : OP = HG : HO$, vel $x : r = d - \frac{bx}{r} : HO = \frac{dr}{x} - b$. Denique quia similia sunt triangula AHO, DPO, est $DP : PO = AH : HO$, aut $t - x : r = f : HO = \frac{fr}{t-x}$. Ex duplici valore de HO fiet hæc æquatio $\frac{dr}{x} - b = \frac{fr}{t-x}$, & facta reductione $xx - \frac{drx - btx - frx}{b} = -\frac{drt}{b}$; aut si brevitatis gratia ponatur $\frac{dr + bt + fr}{b} = a$, erit $xx - ax = -\frac{drt}{b}$. Unde $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{drt}{b}\right)} = PE$. Ex PE datur etiam PD; inde $PD : OP = HA : HO$; est vero $PF = HO + HF - OP$: igitur habetur quoque distantia puncti visus tabulæ P a puncto F in fronte scenæ, per quod planum verticale transire debet.

460. V°. Circa situm, & altitudinem oculi illud hic advertendum, in tabulis, quæ ornandis cubiculis destinantur, aliisque id genus picturis, altitudinem oculi commode 7 vel 8 pedum supra planum geometricum assumi, nisi quando magnus objectorum numerus

merus in eadem tabella repræsentandus est, v. g. integer hortus. Tunc enim major tribuenda est oculo altitudo, ne partes remotiores nimium contrahi debeant, & confuse appareant. Id genus delineationes opticas Galli ad *visum volucris* factas dicunt, quod tanta assumatur oculi altitudo, quasi ex sublimi cum avibus objectum intueri liceret.

461. Non igitur altitudo oculi ad communem hominis staturam exigenda est, ut 5 vel $5\frac{1}{2}$ pedum sit, nisi tabula ex magna distantia spectari debeat, ac intuentibus illudere, ut planum in ea depictum, cum solo, in quo consistunt, in directum jacere, ac ultra tabulam excurrere arbitrentur. Hujusmodi sunt tabulæ, quæ in fine ambulacri vel horti constitutæ, eorum limites longe ultra protensos exhibent. In theatrorum ornatu oculi locus prope medium amphitheatri sumitur, atque ad altitudinem trium, quatuorve pedum supra libellam illius, ut suggestum theatri directe excurrere, & plano perspectivo continuum videatur.

462. Quod universim hac in re dici potest, illud est, talem semper oculi altitudinem eligendam esse, ut quam distinctissime videantur objecta, quorum projectio tabulæ maximam pulchritudinem conciliat. Hoc autem non aliter determinari potest, quam si prius tota scena diversis modis adumbretur rudius, ut oculo diversimode collocato apparitura est. Etenim certissimum est *ideo delineationem fieri ex legibus Perspectivæ, ut imagines pulchræ sint; at vero non ideo omnes imagines esse pulchras, quod earum delineatio ad leges exacta sit.* Est hæc sors omnium quidem artium, maxime tamen earum, quarum principia ex arbitratu nostro non pendent.

463. VI°. Longitudo radii principalis distantiæ objectorum a tabula proportionata esse debet, ne rerum delineandarum partes aut contrahantur nimium, aut a figura sua naturali diffideant. Et si quidem tabula nec nimium procul spectari debeat, nec uni affigi loco, sequens teneri potest regula: *radius principalis nec minor esto dimidia, nec longior integra diagonali tabulæ, si objecta præcipua integra exhibenda sunt.*

464. Nam experientia nos docet, uno obtutu, & oculo immoto, non posse objectum videri integrum, si angulus a radiis ab objecti extremis ad oculum ductis comprehensus sit obtusus, nec satis distincte partes ejus cerni posse, si idem 60 gradibus minor sit. Hinc vero facile patet, quod si oculus F (fig. 68) a medio tabulæ D distet quantitate DF æquali diagonali BC, radii ex oculo ad angulos tabulæ B, & C ducti, FB & FC, excedant diagonalem BC (cum hypotenusa FC major sit catheto FD = BC); atque ideo crura trianguli BFC paullo longiora sunt, quam in triangulo æquilatero; igitur angulus

lus ad oculum minor eſt 60 gradibus. (Reperitur facili calculo 53°, 8′).

465. At ſi oculus E diſtet dimidia diagonali BC = ED, triangula EBD, ECD ſunt rectangula, & iſoſcelia; igitur anguli BED, CED ſunt ſinguli 45 graduum, & totus BEC 90 graduum.

466. In majoribus projectionibus, ut ſunt picturæ theatrales, hortenſes, ambulacrorum &c, quæ procul ſpectandæ ſunt, nec ſubtiliore elaborandæ penicillo, nec etiam objecta integra exhibere debent, diſtantia oculi ex ſitu loci determinanda eſt.

Caput V.

De Perſpectiva Umbrarum.

467. Regulis umbras optice exhibendi ars Pictoria nequaquam carere poteſt, maxime quando imagines referre debent corpora a ſole, aliove vicino lumine colluſtrata, ut umbrarum nigriorum limites non poſſint non in ſpectatoris oculos incurrere.

468. Punctum lucidum (ſive a quo corpus opacum illuſtratum umbram in partem directe oppoſitam projicit) poteſt eſſe vel trans tabulam, vel in ejusdem plano, vel cis iſtud.

469. Quando punctum lucidum eſt trans tabulam, fieri poteſt, ut vel ſit ante corpus opacum, vel poſt iſtud; ſi primum, umbra ita exhibenda eſt, ut intelligatur recedere a tabula, ideoque ejus projectio verſus lineam horizontalem dirigetur; ſi hoc, ſitque ſimul lucidum opaco altius, umbra verſus ſpectatorem cadet, & ejus delineatio verſus marginem inferiorem tabulæ verget; at ſi punctum luminoſum ſit depreſſius corpore illuminato, hujus umbra quidem rurſus ita exhibenda eſt, ut appareat verſus ſpectatorem projici, attamen in plano tabulæ verſus marginem ſuperiorem delineanda eſt.

470. Si punctum lucidum ſit cis tabulam, aut inter oculum, & tabulam exiſtere intelligitur, aut a tergo ſpectatoris. In utroque caſu umbræ recedunt a tabula, & projectio earum versus lineam horizontalem dirigitur.

471. Si punctum lucidum ſit Sol aut Luna, hoc ſupponi nequit, niſi vel ſit trans tabulam poſt objecta, vel in plano tabulæ, vel cis tabulam a tergo ſpectatoris: neque enim fieri poteſt, ut ſit trans tabulam, & ante corpus delineandum, aut intra tabulam & oculum, niſi ſimul ſit in ipſo zenith alicujus puncti inter tabulam & corpus opacum, vel inter oculum & tabulam ſiti; at quia diſtan-

tia horum ſiderum fere immenſa eſt, hi caſus locum non habent, niſi quando ſimul ſunt in zenith corporum delineandorum, tabulæ, & oculi, ideoque in plano tabulæ.

472. Ex his apparet, umbras corporum a ſole vel luna illuminatorum facilius determinari, quam quæ ex vicina alia luce, v. g. lampadis, vel cerei ardentis, oriuntur.

ARTICULUS I.

De proprietatibus umbrarum, quarum ratio in Perſpectiva habetur.

473. Quoniam proprietates umbrarum generales jam Parte I demonſtravimus, ſatis eſt, ſi modo eas hic afferamus, quæ ad Perſpectivam attinent.

474. THEOREMA I. *Umbræ corporum a ſole oriente vel occidente illuminatorum in planum horizontale projectæ; ſeu univerſim umbræ corporum, quando ſol aut punctum lucidum eſt in eodem plano, cui illa inſiſtunt, indefinitæ ſunt.*

Nam longitudines umbrarum ſunt (37) ut cotangentes altitudinum corporis lucidi ſupra planum illuminatum; igitur quando hæc altitudo nulla eſt, hoc eſt, quando lucidum eſt in plano, in quo ſupponitur corpus opacum, cotangens altitudinis eſt infinita.

475. THEOREMA II. *Umbræ corporum ex luce ſolari intercepta ſunt ejusdem longitudinis, ac corpora, ſole elevato ad* 45°.

Umbræ ſunt longitudinis corporum dimidiæ, partes tertiæ, quartæ &c, ut altitudo ſolis fuerit 63°, 26′, vel 71°, 34′, aut 75°, 58′ &c. Vel vero ſunt duplæ, triplæ, quadruplæ &c ſole elevato ad 26°, 34′, ad 18°, 26′, ad 14°, 2′ &c, quæ omnia manifeſta ſunt ex tabulis tangentium.

476. THEOREMA III. *Umbra rectæ objectivæ cadens in planum quodcunque, eſt etiam optice recta.*

Nam punctum lucidum eſt vertex, & radii per extrema rectæ objectivæ tranſeuntes, ſunt latera trianguli, cujus baſis eſt recta objectiva: umbra porro hujus rectæ eſt planum trianguli ultra baſin productum: atqui hoc planum nequit per alterum planum occurrens ſecari, niſi linea recta (Elem. 629.): & hæc ſectio eſt projectio perſpectiva umbræ a linea objectiva in planum occurrens triangulo cadentis; igitur &c.

477. COROLL. *Datis itaque duobus punctis, per quæ umbra a linea recta projecta tranſit, datur ſitus umbræ.* Et viciſſim *ut inveniatur ſitus umbræ*

bræ in planum quodpiam cadentis, reperienda ſunt duo puncta illius plani, per quæ umbra tranſit.

478. THEOREMA IV. *Umbra corporis opaci a puncto lucido illuminati eſt truncus pyramidis, quem complet pyramis verticem punctum lucidum, & baſin partem illuminatam corporis opaci habens. Extenditur indefinite in plagam oppoſitam puncto lucido, donec alterius corporis ſuperficie intercipiatur; & ſpatium, quod in hac ſuperficie occupat, eſt umbra projecta a priore corpore illuminato.*

Theorematis evidentia demonſtratione non eget.

479. COROLL. I. *Umbra corporis a puncto lucido illuminati eo latior eſt, quo lucidum illuminato propius, & ſuperficies umbram excipiens ab opaco remotior eſt.*

480. COROLL. II. *Umbra corporis illuminati a lucido infinite diſtante, ut a ſole vel luna, eſt priſma indefinite longum, cujus baſis altera eſt ſuperficies illuminata corporis, altera ſuperficiei umbram excipientis illud ſpatium, quod in eadem umbra occupat.* Hoc enim in caſu radii a lucido venientes ſunt inter ſe paralleli.

481. COROLL. III. *Si ad penumbram non attendatur, umbræ linearum rectarum exceptæ plano iis parallelo, ſunt rectæ, & lineis, a quibus projiciuntur, æquales.* Duo enim radii per extrema ejusmodi lineæ tranſeuntes ſunt inter ſe paralleli, ideoque cum linea & ejus umbra parallelogrammum conſtituunt. Ex hoc vero deducitur *primo, umbras corporum a ſole illuminatorum habere eandem latitudinem cum objectis ſuis directe ſoli expoſitis. Secundo: Projectiones perſpectivas umbrarum ſuis rectis objectivis parallelarum debere* (363) *ad eadem puncta accidentalia concurrere, ad quæ convergunt projectiones ipſarum linearum lumen intercipientium.*

482. COROLL. IV. Perimeter umbræ nil aliud eſt, quam projectio quædam Perſpectiva, pro qua locus oculi eſt punctum lucidum, objectum perimeter ſuperficiei illuminatæ, tabula illa ſuperficies, quæ umbram excipit.

483. THEOREMA V. *Umbra a linea verticali in planum quodvis projecta, ſi producatur, tranſit per illud punctum plani, in quod cadit perpendiculum a puncto lucido demiſſum.*

Sit (fig. 70 & 71) L punctum lucidum; P vel *p* punctum in plano ſeu inclinato, ſeu ad libellam poſito, infra aut ſupra lucidum, in quod cadit perpendiculum; verticales in hoc plano poſitæ ſint AB, vel CD; dico earum umbras FB, ED productas per P vel *p* tranſire. Cum enim rectæ AB vel CD ſint verticales, plana quoque triangulorum umbræ FAB, EDC erunt verticalia; atqui hæc ſi producantur, per L tranſire debent, ideoque ſeſe in verticali LP interſecant: ergo etiam latera FB, ED producta tranſeunt per P vel *p*.

484. COROLLARIUM I. *Si lucidum L ſit ſol vel luna, puncti, in quod cadit perpendiculum in planum Geometricum inde demiſſum, projectio eſt in linea horizontali.* Non enim, niſi ad diſtantiam infinitam a tabula, perpendicularis ex ſole ad planum horizontale demiſſum huic plano occurrere poteſt.

485. COROLLARIUM II. *Si plura lucida eandem lineam verticalem illuminant, tot fiunt umbræ, quot ſunt lucida, quæ ſingulæ, ſi producantur in plano, in quo excipiuntur, tranſeunt per puncta, in quæ cadunt perpendicula a lucidis oppoſitis demiſſa.*

ARTICULUS II.

De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt in eodem plano cum tabula.

486. I°. Dum ſol in plano tabulæ & ſimul in horizonte verſatur, uti dum oritur vel occidit, omnes corporum umbræ in planum Geometricum projectæ, ob debilitatem lucis, ſunt dilutiores, ſimulque infinitæ (474). Quare earum projectiones opticæ lineæ horizontali tabulæ parallelæ protenduntur; & ſiquidem occurrat ſuperficies quædam ſupra horizontem erecta, in ea ad altitudinem corporibus lumen intercipientibus æqualem aſſurgunt. Cetera ex figura hic annexa facile intelliguntur. Vide fig. 80.

487. II°. Quando ſol angulo dato ſupra horizontem elevatus eſt, ſitus umbræ determinatur parallela ad lineam horizontalem ex pede corporis illuminati ducta, v. g. (fig. 81) ex *a*; dein ad apicem ſupremum *c* conſtruatur cum perpendiculo *c a* angulus æqualis complemento altitudinis ſolis; recta *c b* terminabit umbram *a b*, angulo *c b a* altitudini ſoli æquali; niſi forte obſtaculum opponatur, velut ſolidum A, vel murus *hm.* Hoc ſi fiat, umbra ex *d* perpendiculariter aſcendet in ſolidi plano *de* (planum enim trianguli umbræ *cab* verticale a plano occurrentis ſolidi itidem verticali non poteſt aliter, quam linea perpendiculari ſecari); inde in ſuperiore plano ſolidi parallele ad horizontem procurret ex *e* in *f*; tum rurſus in *g* priorem ſitum reſumet usque ad *i.* Hinc in muro verticali *hm*, usque dum in *k* pertingat ad lineam *c b*, aſſurget. Umbra ſolidi A eodem modo definitur, quem attulimus pro corpore *c a*, dum nullum obſtaculum occurrit.

488. OBSERVA. Quando altitudo ſolis arbitraria aſſumi poteſt, opus non eſt angulo ad *c*, ſed definitur longitudo umbræ ex ratione, quam ad corporum altitudinem habere ſupponi poteſt.

ARTICULUS III.

De umbris corporum, quando sol vel luna est post planum tabulæ.

489. Si sol oriens vel occidens sit in ipso horizonte, scire oportet (aut si arbitrarium est, assumere) quantum planum verticale per oculum & centrum solis transiens a plano verticali tabulæ declinet, hoc est, quonam divisionis lineæ horizontalis puncto centrum solis sit constituendum. (Id vero punctum *azimuthum solis* vocare licet). Hoc ubi in linea horizontali, etiam producta, si necesse sit, habetur, ipse sol delineari potest dimidio disco supra lineam horizontalem eminens, 24 vel 25 minutis ex illis divisionibus utrinque a centro pro radio sumtis: apparet enim sol major in ortu suo, vel occasu, quam dum supra horizontem elevatus est.

490. Punctum lineæ horizontalis, in quo est centrum solis, est punctum accidentale umbrarum a lineis verticalibus projectarum (483). Umbræ vero istæ debiles sunt, & versus marginem inferiorem tabulæ indefinite extenduntur, nisi quando illis planum aliquod verticale, aut aliud inclinatum, v. g. murus quispiam, aut corpus quodvis opponitur.

491. Sit exempli causa azimuthum solis occidentis 40°. Umbra corporis A (fig. 83) terminatur utrinque linea recta ad punctum 40° tendente, ac in plagam huic oppositam indefinite producta. Umbra item cylindri B comprehenditur duabus rectis versus 40° convergentibus, verum ubi ad gradum infimum obstaculi pertingit, verticaliter per *ei* ascendit; tum in plano superiore horizonti parallelo directione *io* ad 40° vergente extenditur; ex *o* rursus usque in *l* perpendiculariter erigitur; ex *l* in *u* situm versus 40° iterum acquirit; tandem ex *u* in *r* in plano verticali assurgit, ibique terminatur, linea *ru* optice altitudini cylindri æquali.

492. II°. Si sol sit supra horizontem, sumendum est ejus azimuthum in linea horizontali, ut habeatur punctum accidentale umbrarum a lineis verticalibus projectarum. Tum vero seu ex data, seu ex assumta (si arbitrio nostro permittitur) solis altitudine ratio longitudinis umbrarum ad altitudinem corporum determinanda est, quæ eadem est (474), ac sinus totius ad cotangentem anguli altitudinis solis. Uti si sol ponatur 20° supra horizontem, & versus sinistram a plano verticali declinet 40°, reperitur cotangens 20° ad sinum totum, ut 2, 75 ad 1, seu longitudo umbræ in plano horizontali æqualis $2\frac{3}{4}$ altitudinis corporis. Esto itaque AC (fig. 82) corpus verticaliter erectum: ducatur ex ejus

 basi

basi A recta A B per punctum Z 40 graduum transiens, fiatque perspective æqualis $2\frac{1}{4}$ A C: si nullum objiceretur impedimentum, umbra foret A B. At quia isthic interponitur prisma *pk*, umbra ex A ad O producta, ex basi prismatis perpendiculariter per O E attollitur: dein directione E I ad 40° servata superius prismatis planum emensa rursus in F comparet trans umbram a prismate projectam, atque ad B usque, situ eodem procurrit, quem primo habuit.

493. Ex figura hac intelligitur, umbram prismatis determinari, ductis primo *p* G, Q N, R M ex puncto accidentali 40°, & indefinitis; tum facta una earum, v. g. Q N, $2\frac{1}{4}$ altitudinis Q T optice æquali, & ducta M N ad punctum visus S, quod nempe latus prismatis *k* T ad idem dirigatur (481); tandem facta N G ad lineam horizontalem parallela, cum latus T D situm eundem habeat.

494. OBSERVA I. Si quis locum solis in tabula, producta, si necesse sit, exhibeat, velut in M, terminus umbræ B corporis A C obtinetur, si regula ad M & C applicata secetur recta per 40° & pedem corporis transiens Z B in B. Eodem modo punctum N umbræ solidi *p k* reperitur.

495. OBSERVA II. Hæc methodus commodissima est, quando altitudo solis nostro arbitrio relinquitur; at si hæc determinata sit, quæri prius debet M Z modo superius (411) exposito, & demonstrato.

ARTICULUS IV.

De umbris, quando sol est a tergo spectatoris.

496. Cum sol a tergo spectatoris est, umbræ eodem modo determinari possunt, ac in superiore articulo, si concipiatur esse in puncto diametraliter opposito infra horizontem. Unde notari debet gradus azimuthi solis in linea horizontali in parte opposita illi, in qua reipsa versatur respectu plani verticalis. Tum si res poscat, inito calculo eruitur, seu, si nihil determinetur, assumitur ratio longitudinis umbræ ad altitudinem corporum; indeque longitudo umbrarum optice ex scala decrescente sumitur, situ earum a pede corporum lumen intercipientium semper versus punctum azimuthi directo.

497. Potest quoque locus solis in tabula exhiberi, altitudine arbitraria, si nihil præscribatur, aut Geometrice determinata, si data sit, ut limites umbrarum reperiantur. Sit exempli causa sol a ter-

a tergo ſpectatoris ad partem ſiniſtram 40° a plano verticali, & 20° ſupra horizontem: oporteat invenire umbram perticæ verticaliter erectæ A C (fig. 84). Ex A ducatur ad Z (40° verſus dextram in linea horizontali) recta AZ. In ZM, ad horizontalem SZ normali, accipiatur locus M centro ſolis oppoſitus, ita ut ZM ſit projectio perſpectiva arcus cæleſtis verticalis 20 graduum: jungantur M & C: erit terminus umbræ in B.

498. Etenim umbra ex luce ſolari a quocunque puncto intercepta, ſi nullum interponeretur obſtaculum, directe projiceretur in punctum ſoli diametraliter oppoſitum in cælo: ergo punctum hoc ſoli oppoſitum, punctum plani umbram intercipientis, & punctum, in quo exiſtit ſol, ſunt in eadem recta.

ARTICULUS V.

De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens.

499. I°. *Quando lucidum eſt poſt tabulæ planum.*

Ut umbræ expedite inveniantur, in ipſa tabula, producta, ſi opus eſt, exhibeatur lucidum ex regulis perſpectivæ, una cum projectione puncti in plano Geometrico, in quod perpendiculum a lucido demiſſum cadit, quod *pedem lucidi* deinceps vocabimus: eſt enim hoc punctum accidentale omnium umbrarum, quæ ex intercepta luce hujus corporis oriuntur. Ceterum methodus umbras hujusmodi exhibendi eadem omnino eſt, ac Art. III deſcripta; illud modo advertendum, quod ſi lucidum ſit humilius, quam corpus opacum, umbra hujus in lacunar (ſi quod in tabula repræſentetur) projecta dirigatur verſus punctum, in quod verticalis ex pede lucidi erecta incidit.

500. II°. *Quando lucidum eſt in plano tabulæ.*

Rurſus lucidum in tabula deſignandum, quod facile admodum eſt; quoniam enim nullam a tabula diſtantiam habet, ejus projectio tantundem a linea verticali, & horizontali diſtat, quantum ipſum a plano horizontali & verticali. Pes porro lucidi erit in ipſo inferiore margine tabulæ, ideoque umbræ eodem prorſus modo, ac prius, determinantur.

501. III°. *Quando lucidum eſt intra oculum, & planum tabulæ.*

Eadem hic quoque adhibenda methodus, lucido ejusque pede in tabula deſignatis. Quare in analogia ſolutionis generalis (351) ponendum eſt: *ut radius principalis minus diſtantia puncti lucidi a tabula* &c loco *plus diſtantia* &c. Quod ſi enim ſumatur planum A S D I

(fig.

(fig. 46) pro tabula, & *asdi* pro plano tabulæ parallelo, in cujus puncto *d* sit lucidum, liquet, A O esse radium principalem; A *a* distantiam lucidi a tabula; *as*, seu *id*, ejusdem distantiam a plano horizontali; *ai* sive *sd* denique ejus distantiam a plano verticali: unde erit O*a* (vel OA — *a*A) : OA = *ai* (vel *sd*) : AI (vel SD) = *as* (vel *id*): AS (vel DI). Observandum verò, lucidum nec debere esse multum supra planum horizontale, nec multum a plano verticali remotum, nec etiam nimis vicinum plano tabulæ parallelo, quod per oculum transit; alias illius projectio longe extra tabulæ margines erit: & pedis quidem lucidi projectio semper infra marginem infimum tabulæ cadit.

502. OBSERVA. Quoniam lux hunc in modum incidens non parum decoris imaginibus adfert, si arbitraria sit lucidi collocatio, ea assumatur tum ab horizontali, tum a verticali plano distantia, ut ejus projectio paullo extra alterutrum marginem lateralem tabulæ, ac non nihil supra lineam horizontalem cadat.

503. *Quando lucidum est a tergo spectatoris.*

Situs hic lucidi commodissimus quidem est, ut objecta aliquantum remota distincte videantur: verum determinatio umbrarum difficillimá evadit, quod neque lucidi, neque ejus pedis projectio in tabula fieri possit, ideoque non habeatur punctum accidentale concursus umbrarum. Quare alia quævis lucidi collocatio eligenda. Ne quid tamen hac in materia desideretur, regulas pro umbrarum determinatione subdimus.

504. I°. Itaque quærenda est per calculum distantia puncti visus ab illo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra cujusvis objecti verticalis dirigitur. Si igitur punctum illuminatum & punctum lucidum sint ad eandem partem plani verticalis, inferatur: *ut summa distantiarum puncti illuminati & lucidi a plano tabulæ, est ad differentiam distantiarum eorundem punctorum a plano verticali; ita est radius principalis ad distantiam quæsitam*, quæ versus eandem partem in linea horizontali accipienda est, ad quam est punctum illuminatum, si hujus distantia a plano verticali major sit, quam distantia lucidi ab eodem; at si minor sit, ad partem oppositam.

505. Ex hoc patet, quod si punctum illuminatum, & punctum lucidum habeant eandem distantiam a plano verticali, sintque ad eandem ejus partem, situs umbrarum dirigatur ad punctum visus.

506. Verum si punctum illuminatum, & punctum lucidum sint ad diversas partes plani verticalis, fiat sequens analogia: *ut summa distantiarum horum punctorum a plano tabulæ, est ad summam distantiarum eorundem a plano verticali; ita radius principalis est ad distantiam puncti visus ab illo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra dirigitur.* Et hæc quidem di-

diſtantia ſemper ex ea parte ſumitur, ad quam eſt punctum illuminatum.

507. Calculo modo expoſito id egimus, ut inveniretur inclinatio baſis trianguli umbræ ad planum verticale. Nam ſit L (fig. 85) pes puncti lucidi in plano geometrico; GE ſit ſitus plani verticalis; IK tabulæ; B punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum e puncto illuminato demiſſum. Sit LD plano verticali parallela; & jungatur BL; patet, BL eſſe directionem umbræ in plano geometrico, ad planum verticale angulo DLB inclinatam. Jam vero in triangulo DLB eſt DL (ſeu DF+FL): BD (vel EL—GB) = R: *tang* DLB; & quia diviſiones lineæ horizontalis ſunt tangentes, radio principali ſumto pro ſinu toto (370): habetur DF+FL ad EL—GB, ut radius principalis ad diſtantiam puncti viſus ab eo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra tendere debet. Quoniam autem B propius eſt plano verticali, quam L, ſitus umbræ inclinatus ad planum verticale vergit in partem oppoſitam puncti illuminati. Idem ratiocinium facile punctis illuminatis A & C pro caſibus reliquis applicatur.

508. II°. Calculanda eſt longitudo umbræ in plano geometrico inde a pede corporis illuminati accepta, ut ejusdem perſpectiva projectio fiat. En vero methodum: diſtantia puncti viſus ab altero puncto lineæ horizontalis præcedente calculo reperta transferatur ex puncto viſus in lineam verticalem, nec refert, quam in partem hoc fiat. Menſuretur, quantum punctum lineæ verticalis, in quod translata cadit, diſtet a gradu 45to lineæ horizontalis, & inferatur: *ut factum ex radio principali in differentiam altitudinum puncti illuminati & puncti lucidi ſupra planum geometricum, eſt ad factum diſtantiæ ultimo repertæ in ſummam diſtantiarum puncti illuminati & puncti lucidi a plano tabulæ; ita eſt altitudo puncti illuminati ſupra planum geometricum ad diſtantiam umbræ a pede hujus puncti in plano geometrico acceptam.*

509. Supponit hæc analogia, punctum lucidum eſſe altius illuminato; ſi ſit infra illuminatum, reperietur diſtantia umbræ accepta in plano parallelo ad planum geometricum, velut in lacunari, a puncto, in quo huic plano occurrit verticalis per punctum illuminatum tranſiens.

510. Pro demonſtratione allatæ analogiæ, advertendum eſt, quod ſi in lineam verticalem transferatur recta æqualis tangenti anguli inclinationis lineæ LB, atque ejus extremum jungatur cum

gradu 45to lineæ horizontalis, oriatur triangulum ſimile triangulo BLD. Unde habetur (Elem. 556) : ut radius principalis (qui dicatur r) ad hypotenuſam hujus trianguli novi (quæ d vocetur); ita eſt in triangulo BLD latus LD (ſive FL+FD) ad BL: igitur $BL = \frac{(LF+FD)\times d}{r}$.

511. Exhibeat porro LN (fig. 86) planum geometricum; LH altitudinem puncti lucidi H; BM ſit altitudo puncti illuminati M; ducatur MO parallela ad LN, erit HO differentia altitudinum puncti illuminati, & puncti lucidi; & ſi recta HM producatur in N, eſt BN diſtantia umbræ N a pede B puncti illuminati. Eſt vero ob triangula HOM, MBN ſimilia, MB : BN = HO (ſeu HL—MB) : OM (vel LB); quare $BL = \frac{(HL-MB)\times BN}{MB}$. Si jam fiat æquatio ex duplici valore de BL, deducetur analogia: $r\times(HL-MB) : d\times(LF+FD) = MB : BN$. Q. E. D.

Quod ſi ſitus figuræ inverſus exhibeatur, ita ut LN repræſentet planum aliquod plano geometrico parallelum, H punctum lucidum illuminato M depreſſius, obtinebitur idem punctum umbræ N, manetque adeo idem calculus.

512. OBSERVA I. Si idem objectum a pluribus lucidis diverſimode collocatis illuminetur, ſingulæ umbræ ex luce ſingulorum lucidorum intercepta eodem modo calculandæ ſunt, ac ſi quodvis lucidum ſolum eſſet. Umbræ porro ejusmodi prope pedem corporis illuminati inter ſe confunduntur, fitque ea pars tanto nigrior, quanto umbrarum major eſt numerus. Inde autem ſingulæ fiunt dilutiores, quo magis inter ſe ſeparantur, quo a pede longius recedunt, quo ſuperficies eas excipiens ab alio lucido vivacius illuſtratur. Hæc omnia facile intelligentur, ſi umbræ a corpore a pluribus candelis diverſum ſitum obtinentibus colluſtrato projectæ delineentur, ut neceſſe non ſit ſingula minutim diſcutere.

513. OBSERVA II. Si duæ umbræ, quarum utraque in ſe admodum diluta, & vix perceptibilis, ſeſe interſecant alicubi, id ſpatium jam longe nigrius eſt, ut umbra facile diſtinguatur; & ſi plures adhuc umbræ illic ſe ſecarent, ſane multo magis nigreſceret.

ARTI-

Articulus VI.

Varia Problemata de Umbris.

514. Problema I. *Determinare umbram veram corporis a penumbra discretam.*

Resolutio. Facta projectione perspectiva corporis luminosi ED secundum omnes ejus dimensiones, determinetur ut supra (494) umbra unius lateris corporis opaci ex radiis e centro venientibus interceptis AG; tum etiam umbræ ex luce ab extremis limbis emissa, & ab eodem latere intercepta, AF, & AG. Eodem modo quærantur limites f, g, h, umbrarum ab altero opaci latere ab projectarum, & ducatur fF, in qua sumantur puncta I & i ita, ut FI sit perspective æqualis cum FG, & $if = fg$. Junctis AI, ai, erit trapezium AaiI umbra vera: AahH vero exhibet limites penumbræ.

515. Observa. Si corpus lucidum non sit sphæra, velut si sumatur fax ardens, cujus flammæ latitudo sit ad altitudinem, ut p ad q; sumendum est FI ad FG, & fi ad fg, ut p ad q.

516. Problema II. *Determinare umbram rectæ* AB (fig. 87) *ad solum inclinatæ, quando positione & magnitudine datur.*

Resolutio. Quæratur trigonometrice vel graphice punctum D plani geometrici, in quod cadit perpendiculum a supremo puncto B lineæ inclinatæ demissum, ut quantum a plano verticali, & tabulæ distet, sciatur. Tum jungantur B & D, & quæratur hujus perpendiculi BD umbra DE (499). Ducatur ex A recta AE; erit hæc umbra lineæ AB. Quod si intercipiatur plano aliquo verticali FG, liquet, umbram fore AIK, puncto nempe K existente termino umbræ a perpendiculo BD projectæ.

517. Ut trigonometrice reperiatur punctum D, in triangulo BAD ad D rectangulo, notum est AB, & angulus inclinationis BAD; igitur inveniri potest AD. Si porro ducatur AN parallela plano verticali, & ad hanc ex puncto D perpendicularis DN, in triangulo ADN datur AD (ex priore triangulo repertum), & angulus NAD, ob datam declinationem lineæ AB a plano verticali: quare reperitur AN & ND, quibus habitis scitur positio puncti D, respectu puncti A positione dati.

518. Graphice res, sic peragitur. Ad A *d*, (fig. 88) parallelam plano tabulæ, constituatur angulus *d* A B æqualis inclinationi datæ lineæ objectivæ, cui etiam sumatur A B æqualis. Demittatur perpendiculum B *d*, & erigatur A N ad A *d* normalis, quæ erit parallela plano verticali. Fiat N A F æqualis declinationi datæ lineæ objectivæ a plano verticali, & accipiatur in A F recta A D = A *d*, ducaturque D N ad A N perpendicularis: rectæ D N, A N præbebunt in scala discrimen situs puncti D inter punctum datum A.

519. OBSERVA. Si extremum B rectæ inclinatæ A B sit supra lucidum C elevatum (fig. 90), ut punctum E (fig. 87) nequeat in plano geometrico haberi, accipiendum aliud quodvis ejusdem lineæ punctum L (fig. 90) infra lucidum C, indeque demissi perpendiculi L M umbra M O determinanda. Ducta ex A per O indefinita A O erit umbra quæsita, nuspiam terminata, nisi incidat in aliquod planum supra geometricum elevatum.

520. RESOLUTIO ALTERA. *Quando datur rectæ inclinatæ projectio perspectiva in tabula.* Sit ejusmodi projectio A B (fig. 91). Ex duobus quibusvis ejus punctis A, D demittantur perpendicula A C, D E in projectionem plani geometrici, & ducantur ex pede lucidi P per C & E indefinitæ P F, P G. Concipiatur planum ad horizontem perpendiculare (parallelum, si lubet, plano verticali, vel tabulæ, modo ne nimium ad rectas P F, P G sit obliquum), cujus intersectio cum plano Geometrico repræsentetur optice per F K. Ex F, G, ubi rectæ P F, P G occurrunt intersectioni F K, erigantur perpendiculares indefinitæ F H, G I; & ex puncto lucidi L ducantur per A & D rectæ L A H, L D I, quæ in H & I plani assumti determinant umbras punctorum A & D: jungantur H & I recta, quæ secet F K in O: erit O in directione umbræ, cujus adeo situs est B O Q.

521. PROBLEMA III. *Determinare directionem umbræ a linea recta inclinata* A B *in plana lucido altiora projectæ.*

RESOLUTIO. Ex pede P lucidi L (fig. 96) ducatur per C, in quod cadit perpendicularis ab extremo B rectæ A B demissa, recta P C M, occurrens intersectionibus planorum perpendicularium graduum cum plano terræ, in punctis H, I, K, M, e quibus erigantur perpendiculares indefinitæ H N, I O, K Q, M R. Ducatur etiam ex puncto lucidi L per B recta L R, quæ

exhi-

exhibebit umbras puncti B in singula plana verticalia graduum producta cadentes, scilicet N, O, Q, R. Quæratur per problema præcedens situs umbræ A*m* in plano terræ, quæ occurrit intersectionibus planorum verticalium (productis etiam) in *h*, *i*, *k*, *m*. Ducantur *h*N, *i*O, *k*Q, *m*R, quæ determinant situm umbræ in planis iisdem verticalibus graduum. Et si etiam umbræ ipsorum graduum S T, V X, Y Z declinentur, facile erit rectæ A B totam umbram A*hnostux*R, qua videri potest, exhibere.

522. Problema IV. *Invenire punctum, ad quod umbræ linearum verticalium in planum inclinatum incidentes dirigi debent.*

Resolutio. Ex pede lucidi P (fig. 92) ducatur (388) ad intersectionem plani inclinati cum plano terræ perpendicularis; aut si planum inclinatum A B C non pertingat usque ad planum terræ, ducatur ex Q tantundem supra terram elevato, quantum latus C B, ad idem C B perpendiculum Q R, cujus quantitas modo mox exponendo quæratur. Tum fiat: ut sinus totus est ad tangentem anguli inclinationis plani, in quod umbræ cadunt, cum plano terræ; ita est Q R ad Q T; erit T punctum accidentale omnium umbrarum projectarum a lineis verticalibus ex luce L intercepta: etenim in hoc puncto planum inclinatum A B C productum secat perpendicularem Q L ex lucidi puncto demissam.

523. Ut jam graphice inveniatur Q T, collocetur in plano figuræ hunc in finem separatim construendæ (vide fig. 93) punctum Q (cujus eadem supra planum terræ altitudo, ac lateris C B) ac recta B C, quæ idem latus plani exhibeat, ita ut figura hæc in plano exprimat verum situm tam lateris B C, quam puncti Q, respectu plani verticalis F G, & plani tabulæ G H. Demittatur ex Q perpendicularis Q R ad B C, & ducatur ad eandem B C parallela Q V. Fiat B R S æqualis angulo inclinationis plani dati cum plano terræ, & producatur S R, donec occurrat parallelæ Q V in T; tum accipiatur mensura de Q T in scala, & describatur optice in tabula.

524. Scholium. Ex dictis apparet, quod determinatis punctis T & *t* (fig. 95), in quibus plana inclinata A B C, A C D, si producantur, secant perpendicularem L T ex puncto lucidi L demissam, facile sit ductum umbræ N E F G H I K a verticali M N projectæ exhibere, ut figura indicat.

525. RESOLUTIO altera, *quando umbra fit ex intercepta luce solis.* Producatur latus plani inclinati D C (fig. 94) usque ad lineam horizontalem in I. Ex I ducatur per planum inclinatum quævis recta I L, ut pars K L sit in eo optice parallela cum latere D C. In plano terræ (vel generalius, in plano ad libellam posito, in quo est latus D C) quæratur punctum A, in quod cadit perpendiculum ab alterutro extremo K vel L demissum; & ducatur per I recta indefinita I N secans perpendicularem K A; item altera ex F, azimutho solis, transiens per quodvis punctum, v. g. D, lateris D C, & occurrens priori I N in O. Erigatur ex O perpendicularis, usque dum rectam I L secet in Q, jungantur Q & D recta, quæ producta concurrat in T cum perpendiculo e sole S demisso: erit T punctum concursus umbrarum a lineis verticalibus in planum inclinatum E D C projectarum.

Etenim manifestum est, triangulum D Q O rectangulum ad O, & cujus angulus Q D O æqualis est inclinationi plani D C E, esse in plano verticali O Q S F per solem S, & perpendiculum ex eo demissum S T, transeunte: igitur producta Q D determinat punctum T, in quo planum inclinatum D C E occurrit eidem perpendiculo S T.

526. OBSERVA. Non hic agimus de umbris in superficies corporum alias, quam planas, projectis; quemadmodum nec de ejusmodi projectionibus perspectivis tractavimus, quæ in alia, quam plana superficie delineari possent, uti in cylindrica, conica, sphærica &c, cum rarum admodum sit, ut id necessitas exigat, & res a brevitate nobis proposita sit aliena. Quod si tamen evitari id genus delineatio nequeat, principiorum, quæ attulimus, accurata notitia, & exercitatione firmata, Geometriæ quidam usus, loci, superficierum, corporum delineandorum conditiones, semper peculiares suppeditabunt regulas, quibus id præstari possit.

AUCTA-

AUCTARIUM.

THEORIA MICROMETRI OBJECTIVI.

* *
*

CAROLO BENVENUTI Soc. JESU.
ROGERIUS JOSEPHUS BOSCOVICH ejusd. Soc. S. P. D.

In meo ex urbe discessu Martio mense postulasti a me brevem aliquam theoriam præclarissimi instrumenti, quod objectivum micrometrum appellant, quod quidem in Anglia accuratissime elaboratum, ac telescopio catadioptrico sane egregio aptatum Pezenas noster, celeberrimus Massiliensis Mathematicus Regius, pro Barberinis Principibus, cultioris litteraturæ amantissimis, ad nos Romam transmiserat, una cum fusiore dissertatione sua impressa, qua theoriam omnem instrumenti, & usum est persecutus, quam ego quidem, in ipso nimirum discessu meo advectam, uti nosti, videre omnino non potui, uti nec Transactionum Philosophicarum locum Tomo 48 pertinente ad annum 1753, in quo de instrumento agitur, quibus nimirum Romæ cum summo nostrorum studiorum damno carebamus.

Ex ipso itinere theoriam, quam ex instrumenti semel visi consideratione erueram, non valde illam quidem complicatam, sed nec omnino simplicem, ad te transmisi, qua alia longe simplicior, & vero etiam elegantior, ac perbrevis mihi nuper in mentem venit, quanquam aliis nunc ego quidem molestioribus sane, & a meorum studiorum ratione, maxima ex parte, alienissimis, & contentiosis hic curis distineor, ac penitus a contemplationibus Mathematicis avertor. Sed occasionem mihi præbuit ea iterum de re meditandi præclarissimus Societatis itidem nostræ Astronomus P. Liesganig, hujus domesticæ Viennensis speculæ præfectus, in qua cum alia instrumenta sane multa partim de novo curat, partim corrigit, atque, ut dicimus, rectificat, tum in primis secto-

rem pro verticalibus obſervandis ſtellis, meo in *Expeditione Litteraria* deſcripto ſimilem, ſed multo præſtantiorem, adjectis aliis, aliis multo ſimpliciore ratione præſtitis, per hoſce dies abſolvit, ac hujus ipſius generis objectivum micrometrum eodem tempore confici curat, Newtoniano aptandum teleſcopio, egregio ſane, quo utitur ad obſervationes pleraſque.

Ejusmodi theoriam igitur ita, ut ſe mihi ſponte obtulit (eam enim nusquam alibi mihi adhuc videre licuit), ad te transmitto, in qua ipſam rei ſummam perſequor tantummodo, rationem vero aptandi inſtrumentum ipſum teleſcopiis, quæ multiplex eſſe poteſt, & eſt admodum arbitraria, ac inveſtigationem primi ejus inventoris, quæ ad uſum nequaquam pertinet, prorſus omitto. Quoniam vero eandem a me petiit tibi ſat cognitus P. Scherffer, qui noſtros hic in Mathematicis diſciplinis inſtituit, apud quos hæc ſtudia tam Viennæ & domi noſtræ, & per noſtros in publica Academia, & in Nobiliſſimo Thereſiano Collegio, quam Tyrnaviæ, Græcii, ac per univerſam hanc Auſtriacam Provinciam, fervent nunc plurimum maximo cum ſucceſſu; quique poſteaquam Aſtronomiam Caillii, ſcriptoris diligentiſſimi, e Gallico in Latinum translatam in uſum ſtudioſæ juventutis hic edidit, ac ejusdem Opticam Latine pariter redditam nunc edit; ut nimirum utiliſſimi Optici inſtrumenti theoriam perbrevem eidem Opticæ adjungat, in eorum gratiam, qui ceteris fontibus, ex quibus ejus notitiam haurire poſſent, deſtituuntur in hiſce locis; concedendam omnino cenſui, ſi tu, cujus judicium noſti ſane, quanti ego faciam, non improbes, & hanc ipſam epiſtolam ad te datam permittas imprimi ſimul, ſine qua eandem theoriam prodire non ſinam, ne occaſionem hanc elabi mihi patiar, publicam aliquam exhibendi mei animi ſignificationem erga homines, quorum & diligentiæ, & doctrinæ ſpecimina in dies habeo quam plurima ob oculos, & quorum incredibilem in me humanitatem experior, cui parem ego quidem gratiam nec referre unquam potero, nec habere. Vale.

Dabam Viennæ 1. Aug.
1757.

De

DE MICROMETRO OBJECTIVO.

Sint in fig. 1 (Tab. XIII) binæ ſemi-lentes L′L, ll', derivatæ e ſectione lentis facta per axem ſuum, & conſtitutæ in ſummo teleſcopio quocunque, quarum ipſam ſectionem per axem refert hæc figura; & fig. 2 ſectionem perpendicularem axi, vel ipſam utramvis ſuperficiem curvam. Sint autem earum centra Q, *q*, & foci radiorum parallelorum rectæ A D ſint M, *m*, ac poſſint promoveri altera reſpectu alterius motu parallelo, & determinari diſtantia centrorum Q, *q*, quæ erit æqualis diſtantiæ quorumlibet punctorum thecæ, cui ſingulæ includuntur, quæ puncta congruant congruentibus Q, *q*, & ſimul cum ſemilentibus moveantur.

Quoniam radiorum H Q, H′L′, parallelorum A D, focus eſt M reſpectu primæ ſemilentis, ſi ducatur M*q*I, cui ſit parallelus radius I′*l*′, ſatis patet, omnium radiorum hujusmodi parallelorum I*q*, incidentium in ſecundam lentem, focum debere eſſe ad ſenſum itidem in M, cum radius I*q*M tranſire debeat ad ſenſum irrefractus, & diſtantia a lente foci radiorum, parum inclinatorum ad axem, in data quavis directione debeat eſſe ad ſenſum eadem, ac radiorum axi parallelorum.

Hinc binæ quidem fient in M, *m* imagines objectorum ſingulorum in magna diſtantia poſitorum ultra L′l′, ſed exiſtente Q*q* intervallo, quo lens altera ultra alteram eſt promota, coincident imagines binorum punctorum objecti, quæ jaceant in directione M H & M I, ſive quæ habeant diſtantiam opticam definitam ab angulo QM*q*, & jaceant in directione Q*q*.

Si jam addantur aliæ quotcunque lentes, aut ſpecula, quæ radios quacunque ratione detorqueant, ſemper radii paralleli HQ, & radii paralleli I*q*, qui nimirum convergebant omnes ad idem punctum M, ſimul paralleli evadent, vel ſimul ad eadem puncta convergent, vel ab iisdem divergent; & ubi demum in oculi fundo imago fiet, conjungentur itidem in eadem imagine radii venientes directione H Q M per primam ſemi-lentem cum radiis venientibus directione I*q*M per ſecundam. Quam ob rem ſi innoteſcat angulus QM*q* per diſtantiam Q*q*, & hujusmodi inſtrumentum aptetur teleſcopio cuicunque, ac ſecunda imago primi puncti objecti congruat cum prima ſecundi; diſtantia Q*q* exhibebit angulum viſualem, quo illa bina puncta a ſe invicem diſtant, & proinde inſtrumentum ipſum ſubibit vices micrometri.

Id fiet, ſi vel citra M*m* collocetur lens convexa, vel ultra lens concava, & fiat vel teleſcopium dioptricum ſimplex commu-

ne, vel Galilæanum; vel prætera infra L′ l′ fit objectiva alia lens foci cujusvis cum toto reliquo telefcopio dioptrico: fed in hoc poftremo cafu focus hujus alterius lentis objectivæ accedet ad ipfam propius, cum nimirum radii inter fe paralleli ad fenfum profecti ex eodem puncto objecti jam per ipfas femi-lentes convergant ad M, adeoque ocularis lens objectivæ debebit admoveri. Sic fi centro C fit fpeculum cavum N′O′, quod rectis M L′, M Q, M C, D C, Mq, Ml', occurrat in N′, N, P, B, O, O′, tam radii H′L′N′, H Q N, quam IqO, I′ l' O′ abibunt ad idem punctum F, quod tamen erit infra punctum G, bifariam fecans radium C P. Ac fi inde vel circa F adhibeatur fpeculum planum in angulo 45 graduum, quod ad latus deflectat radios ad efformandum telefcopium Newtonianum, five ultra F fpeculum cavum eodem axe ad Gregorianum; five citra F fpeculum convexum ad recentius telefcopium catadioptricum Gregoriano fimile, fed objecta invertens; femper intra oculum duplicabuntur objecti imagines, & imagines punctorum in ea pofitione, & diftantia pofitorum congruent.

Porro facile eft, data diftantia foci Q M radiorum parallelorum lentis bifectæ ab ipfa, & data diftantia Qq, invenire angulum Q Mq, nimirum diftantiam vifualem punctorum congruentium. Eft enim M Q ad Qq, five diftantia illa foci ad intervallum diftractionis femilentium, ut radius ad tangentem, vel finum, ejus anguli. Cum nimirum angulus M Qq fit accurate, & MqQ quam proxime rectus. Pro lente pedum 40 infertur, angulum unius gradus exhiberi a pollicibus 8 $\frac{378}{1000}$, unde fit, ut fingula fecunda requirant plus quam $\frac{2}{1000}$ digiti, five proxime $\frac{1}{36}$ lineæ, quæ eft admodum fenfibilis.

Adhibitis autem diverfis lentibus, quo minor fuerit convexitas, ut nimirum focus longius debeat recedere, eo major femi-lentium diftractio requiretur ad eundem angulum exhibendum; & vice verfa in magis convexis major angulus refpondet diftractioni eidem. Hinc ut micrometrum fenfibilitatem habeat fatis magnam, adhiberi debent lentes admodum parum convexæ, & lens objectiva pedum 40 eft admodum ad rem idonea.

Facile patet, fcalam valoris diftantiæ vifualis punctorum congruentium objecti pro intervallo diftractionis femi-lentium fore eandem, cuicunque telefcopio aptetur idem micrometrum earundem binarum femilentium, & five pro myopibus admoveatur lens ocularis objectivæ, vel fpeculo plano, aut fpeculum minus majori, five pro presbytis removeatur. Pendet enim a ratione ejusdem QM ad eandem Qq.

At

At ſi teleſcopium adhibeatur pro objectis non ita remotis, tum vero focus M recedit a lente Q. Quare creſcit QM, & angulus ad M decreſcit. Hinc idem diſtractionis intervallum indicat minorem diſtantiam viſualem punctorum congruentium, atque id in ratione reciproca diſtantiæ foci radiorum venientium ab objecto. Si diſtantia objecti a lente objectiva ſit $= d$, radius curvaturæ lentis biſectæ $= r$, diſtantia foci reſpondentis ei objecto $= x$, ratio ſinus incidentiæ ex aere in vitrum ad ſinum refractionis $= p : q$, ex formula generali (181) facto $e = 0$, $R = r$, erit $x = \frac{q\,d\,r}{2(p-q)d - qr}$. Quare menſura diſtantiæ viſualis exhibita a data diſtractione pro objecto habente diſtantiam $= d$, ad menſuram pro objecto remotiſſimo (in quo evaneſcente r reſpectu d evadit $x = \frac{q\,r}{2(p-q)}$) erit ut $\frac{q\,r}{2(p-q)}$ ad $\frac{q\,d\,r}{2(p-q)d-qr}$, ſive ut $2\,(p-q)\,d - q\,r$ ad $2\,(p-q)\,d$. Invenitur autem r ex ipſo foco facile inveniendo per obſervationem, datis p, q, d, x, cum debeat eſſe ex formula ſuperiore $r = \frac{2(p-q)dx}{q\,(d+x)}$. Sunt autem in vitris quam proxime $p = 31$, $q = 20$, adeoque $r = \frac{11\,dx}{10\,(d+x)}$, & ratio illa ſuperior, ut $11\,d - 10\,r$ ad $11\,d$.

Si per ejuſmodi micrometrum aptatum cuivis teleſcopio determinetur diſtractio debita, ut imagines duorum punctorum dati objecti, collocati ad perpendiculum in data diſtantia a ſemilentibus congruant, facile computabitur angulus reſpondens iis binis punctis, faciendo: *ut diſtantia data objecti a ſemilentibus ad diſtantiam veram illorum punctorum objecti; ita radius ad ſinum vel tangentem ejus anguli.* Hinc pro quavis alia diſtantia objecti, etiam pro immenſa, invenietur angulus ex ſuperiore formula & proportione.

Ut res illuſtretur exemplo, ſit objectivum vitrum bifariam ſectum ejuſmodi, ut focum radiorum parallelorum habeat in diſtantia pedum 40. Adhibita formula $r = \frac{11\,dx}{10(d+x)}$, quæ pro radiis parallelis evadit $\frac{11\,x}{10}$, ob d infinitam, & facto $x = 40$, erit $r = 44$. Diſtet objectum aſſumtum pro anguli determinatione a lente ipſa pedibus 1000, & inveniatur quædam determinata diſtractio reſpondens minutis 30, reducetur ea menſura ad uſum Aſtronomicum ope rationis $11\,d - 10\,r$ ad $11\,d$, ſive poſitis pro d & r numeris 1000 & 44,

ope rationis 10560 ad 11000 nimirum facto: ut 10560 ao 11000, ita 30′ (= 1800″) ad 1875″; illa eadem semi-lentium distractio pro objectis remotissimis, nimirum pro omni Astronomia, subtendet 1875″, accedentibus 75″ ad priorem illam mensuram. Unde patet, ubi scala per ejusmodi observationes definitur, habendam maxime in hisce instrumentis rationem distantiae objecti, ut ea determinatio ad Astronomiam traduci possit.

Quoniam autem in objectis non ita multum distantibus mutatio distantiae objecti ab illa lente objectiva mutat distantiam foci praecedentis lentem ocularem, vel speculum minus, & haec mutatio datur per illam ex Dioptricis, & Catoptricis focorum formulis, facile est etiam pro ejusmodi mutatione lentis ocularis, vel speculi minoris scalam valorum computare adhibendam pro distantiis minoribus, quae tamen in maximis, adeoque in omni Astronomia, constans erit, atque id pro quovis oculorum genere.

Si aptetur ejusmodi micrometrum cum lente bisecta foci dati telescopio catadioptrico datae curvaturae, facile determinabitur, quantum debeat admoveri ipsi speculo speculum planum obliquum cum lente oculari, vel speculum minus, sive concavum, sive convexum. Id intervallum erit quam proxime aequale FG, nimirum aequale accessui sui foci ad speculum, inducto a convergentia radiorum, quam praestat lens objectivi micrometri: quod quidem ex Catoptricis formulis facile invenitur. Nam si radius sphaericitatis speculi sit $= r$, distantia puncti radiantis $= d$, erit distantia foci a lente (133) $= \frac{dr}{2d - r}$. Si autem hic dicatur $BD = a$, $BG = b$, erit ob convergentiam radiorum $d = -a$, eritque $r = 2b$, adeoque $BF = \frac{-2ab}{-2b - 2a} = \frac{ab}{a + b}$. Quare accessus ille GF erit $= a - \frac{ab}{a + b} = \frac{aa}{a + b}$. Nimirum si collocetur lens bisecta prope focum speculi cavi N′O′, ut sit $a + b$ proxime aequalis distantiae QM foci radiorum parallelorum lentis ipsius bisectae, erit ille accessus proxime tertius continue proportionalis post distantiam foci radiorum parallelorum ipsius lentis bisectae, & speculi.

Pro telescopio Newtoniano, cujus speculum distet a foco pedibus $3\frac{1}{2}$, distantia micrometri a speculo sit pedum 4, distantia foci lentis bisectae ab ipsa pedum 40, erit ille accessus $\frac{3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}}{40} = \frac{49}{160}$, sive digitorum $\frac{49 \times 12}{160} = 3\frac{2}{3}$. In aliis telescopiis catadioptricis ob $a + b$

pro-

proxime conſtantem, erit ut quadratum r, ſive proxime ut quadratum longitudinis teleſcopii, & accuratius ut quadratum radii curvaturæ ſpeculi majoris.

Quoniam lens objectiva non colligit radios omnes accurate in M, ſed alios propius, ob diverſam refrangibilitatem, alios remotius; terminatio in teleſcopio erit minus accurata, quam eſſet ſine ejusmodi micrometro: verum diſcrimen erit exiguum, quia ingens etiam mutatio diſtantiæ foci MG ingentis, exiguam mutationem inducit in GF. Cum enim ſit ipſa GF tertia poſt MG & PG, erit GF ad ſui mutationem, ut MG ad mutationem ſui.

In caſu propoſito ſeries focorum pertinentium ad radios heterogeneos in M, quæ eſt pars $\frac{1}{27}$ totius QM, eſt pedem $\frac{40}{27}$, ſeu proxime $1\frac{1}{2}$; & cum fuerit FG digitorum fere 4, erit ſuperior ratio mutationum ut 40×12 ad 4, ſive ut 120 ad 1. Reducetur igitur ejus ſeriei longitudo ad $\frac{1\frac{1}{2}}{120}$, ſive ad $\frac{3}{240}$, ad $\frac{1}{80}$ digiti, vel ad $\frac{3}{20}$ lineæ, ſpatium perquam exiguum.

Eo inſtrumento ita collocato, ut circa axem teleſcopii libere moveri poſſit, facile erit, aſſumere diametros apparentes in quavis directione. Collocata ſectione ſemilentium in directione quæſita, ſatis erit, ipſas diſtrahere ita, ut binæ imagines aſtri ſe contingant, & habebitur diameter apparens, ut patet, congruentibus ejus extremis punctis, quorum imagines pertinent ad dimidias ſemilentes.

Si eodem nihil mutato teleſcopio myopes, & presbytæ utantur, alteri videri poterit major apparens diameter, alteri minor, ob inæqualem terminationem, quæ per radios ſpurios imaginem auget. Id incommodum evitatur plurimum, ſi quisque teleſcopium ita diſponat, ut terminatio ſibi ſit, quantum fieri poteſt, exacta.

Si alterius oculi plures radios violaceos, alterius plures rubeos ad retinam transmittunt, poterit alteri QM eſſe brevior, alteri longior. Si id fiat etiam triente intervalli occupati a ſerie focorum, nimirum in caſu propoſito ſemipede, mutabitur angulus ad M octogeſima ſui parte, nimirum ſcala diſtantiæ viſualis mutabitur in dimidio gradu per ſecunda $\frac{1800}{80} = 22\frac{1}{2}$. Quamobrem exiguum etiam in eo diſcrimen pariet diſcrimen aliquot ſecundorum. Hinc unusquisque ſibi ſua obſervatione ſcalam debet efformare, vel ſi alter ſemel ſibi efformavit, debet alter vi-

dere, quod discrimen determinationis sibi obveniat in una observatione quacunque ab illius determinatione, & manente eadem oculorum constitutione, semper omnes reliquæ determinationes erunt in ratione data, adeoque facile admodum ex illius scala inveniet suam.

Idem discrimen habebitur, si aspiciatur eo instrumento jam objectum violaceum, jam rubeum. Quoniam rubeorum radiorum focus est remotior, eadem distractio semi-lentium minorem in iis subtendet angulum. Hinc cavendum, ubi scala per observationem objecti terrestris definitur, ut objectum accipiatur album potius, quam ullius alterius coloris. Præterea si objectum cæleste sit admodum rubeum, ut solet esse luna, vel sol prope horizontem, obtinebitur hoc instrumento diameter vera major, cum ea distantia, quæ pro luce integra exhibet angulum quemdam, exhibeat minorem pro radiis rubeis.

Idem incommodum haberi potest in diametro solis determinanda hoc instrumento per vitra, quæ solem admodum rubicundum exhibeant; cum adhibeantur ii radii, quorum focus ab objectiva lente recedit plurimum, reliquis interceptis; quamobrem vel adhibenda sunt vitra viridia, vel combinatio quæcunque vitrorum, quæ album potius solem exhibeat, quod quidem probe notandum videtur omnino, cum aliter facile admodum sit in errores incidere non contemnendos.

F I N I S.

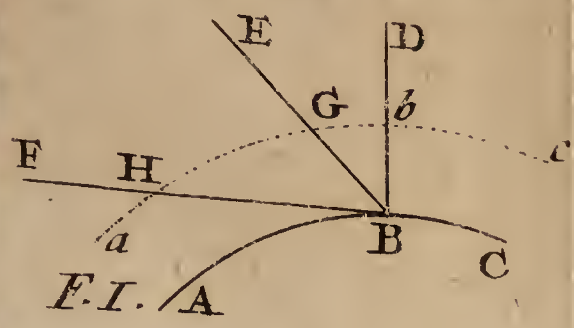


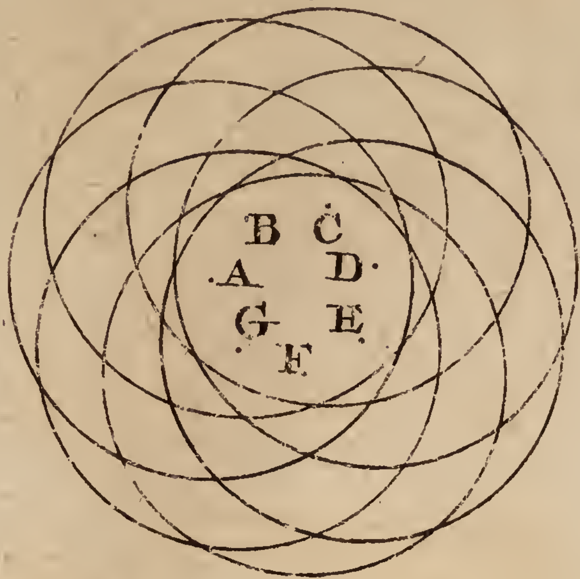
ERRA.

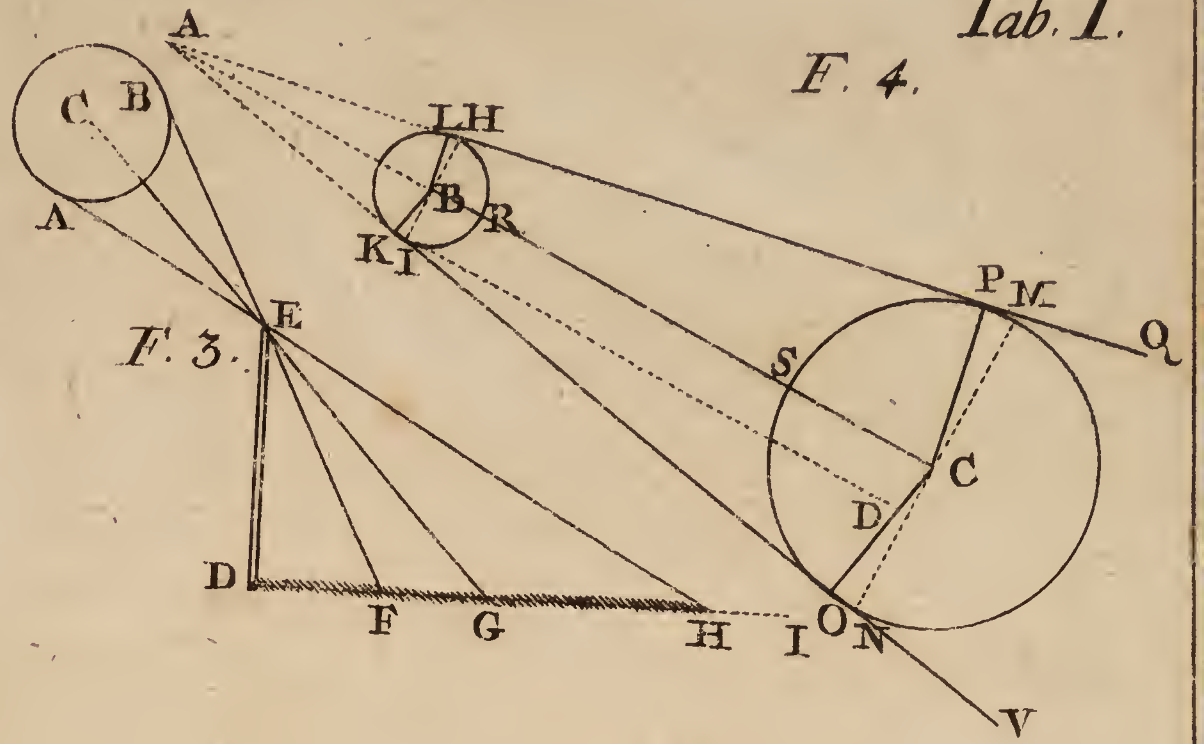
ERRATA CORRIGE

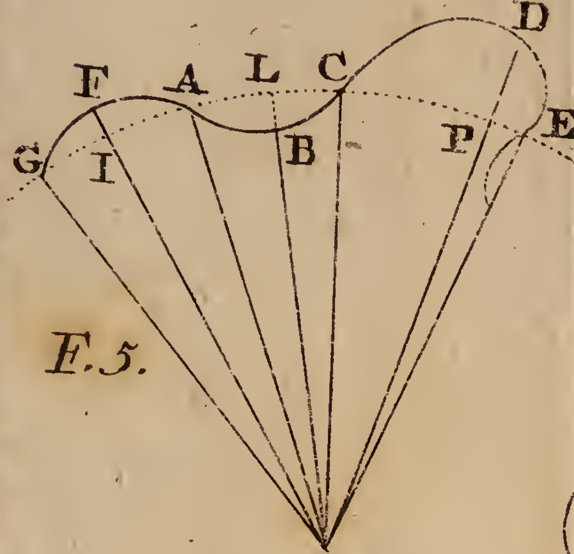
Pag.	Lin.	Errata	Corrige
1	22	ſimile - - - -	ſimilis
3	34	pyramydis - - -	pyramidis
6	4 a fine	dimanentes - - -	dimanantes
47	11	$+eqqR$ - - -	$+eqqRr$
49	ultim.	MC - - - -	MO
53	13	non eſt - - - -	eſt
	22	eam - - - -	eum
	25	expenſio - - -	expanſio
59	19	auctior - - -	acutior
	25	O *q* - - - -	Q *q*
80	27	tangentia - - -	tegentia
81	28	*pars* - - - -	*pars videatur*
119	16	dictis - - - -	ductis
132	26	ſoli - - - -	ſolis

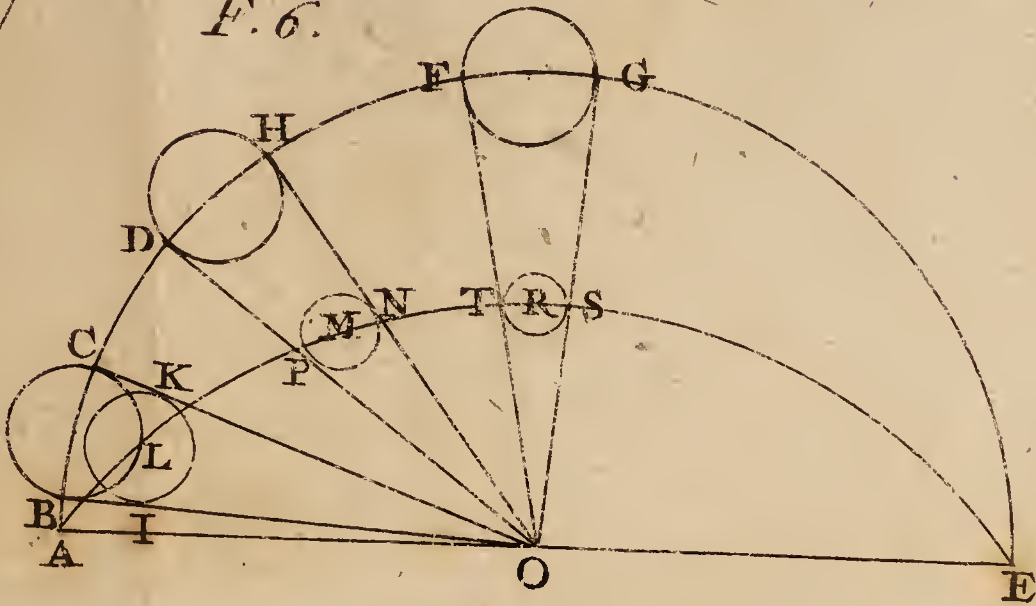
Tab. I.

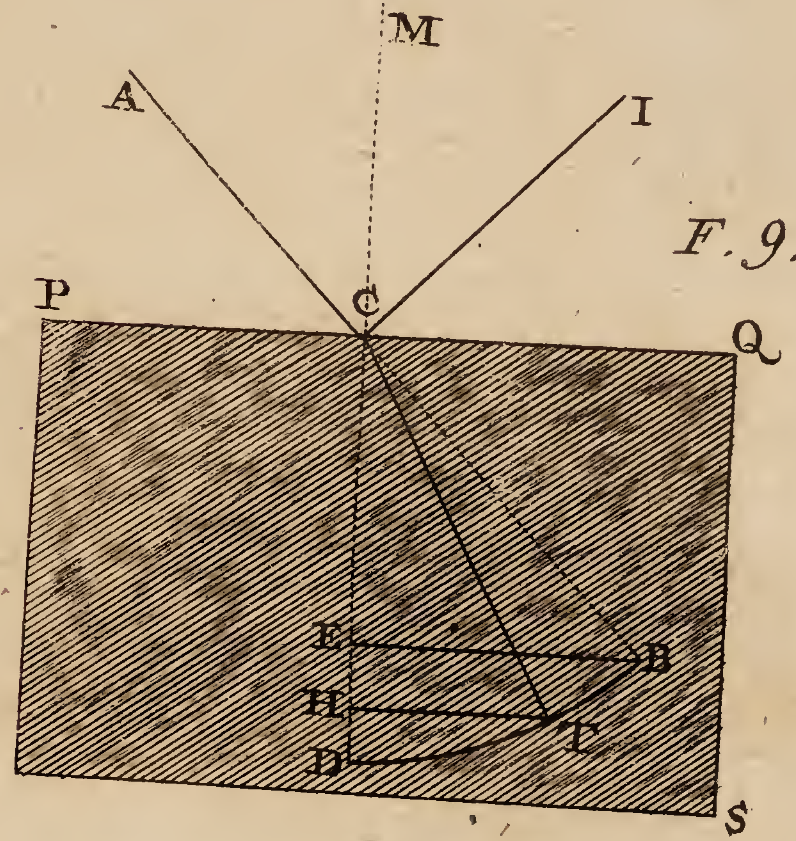




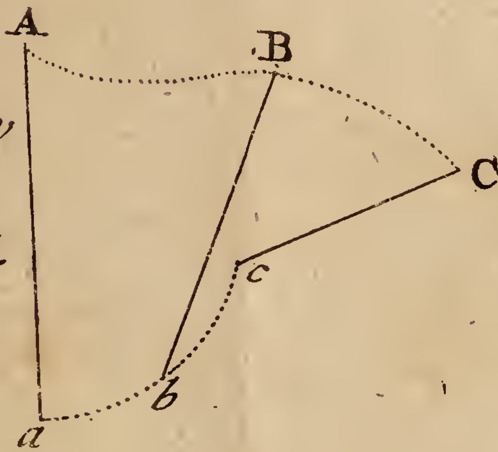




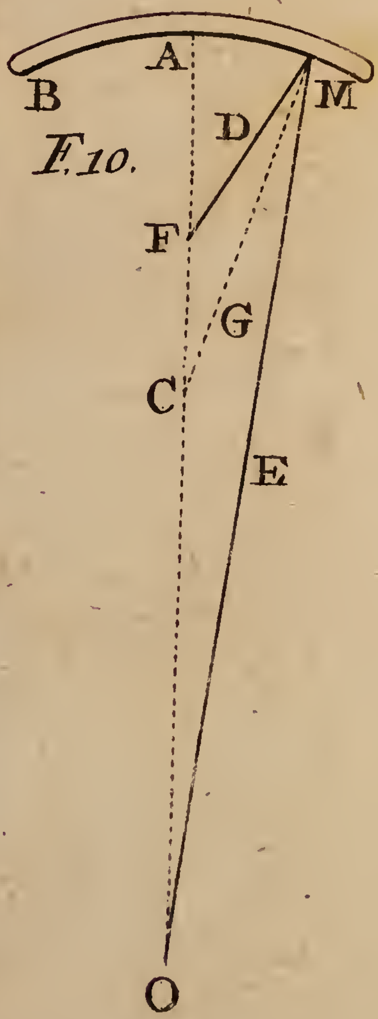


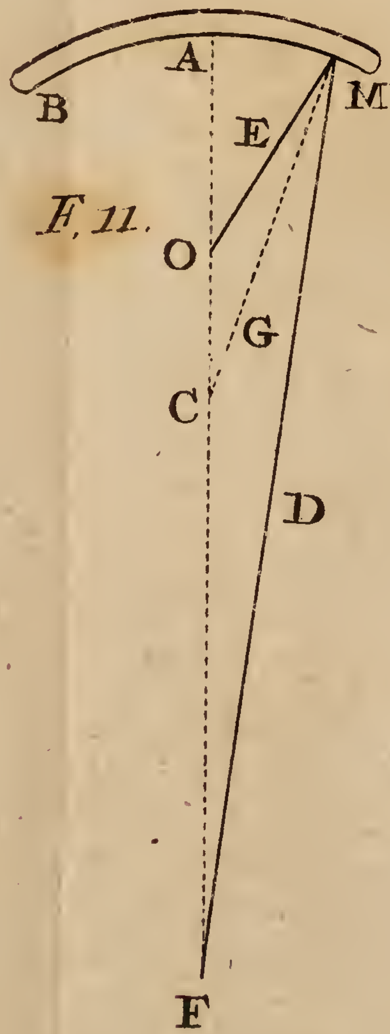


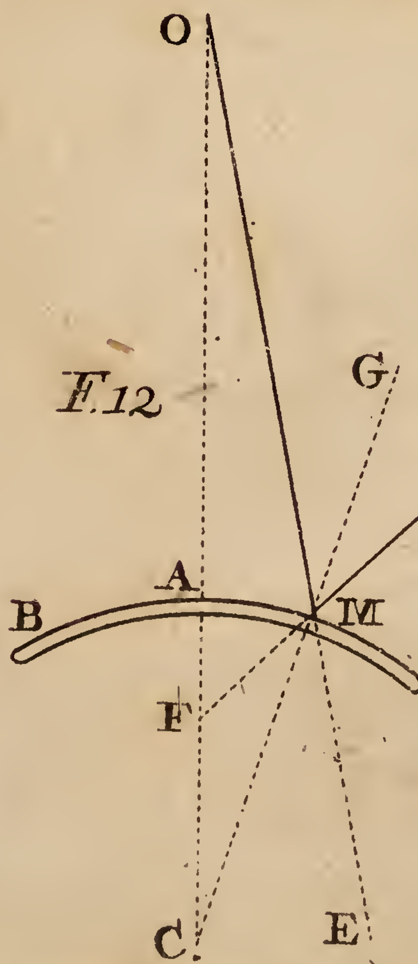


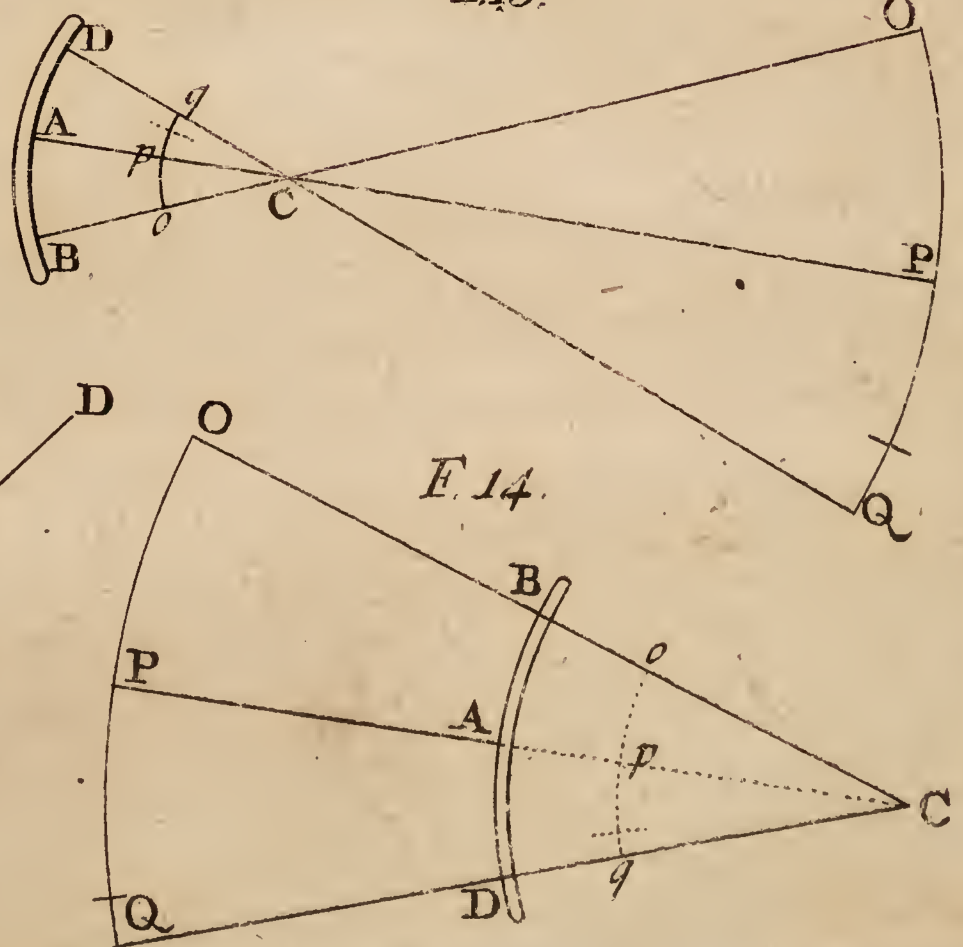


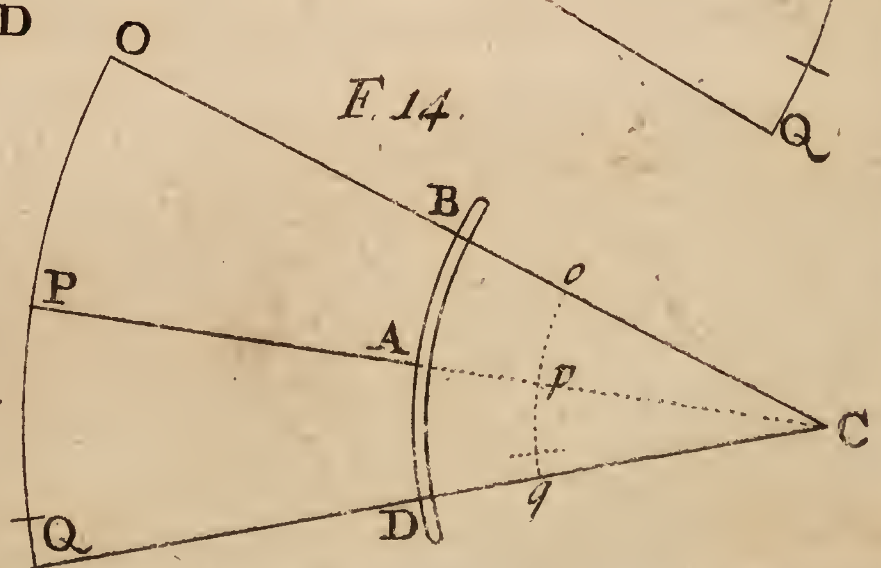
F. 8.







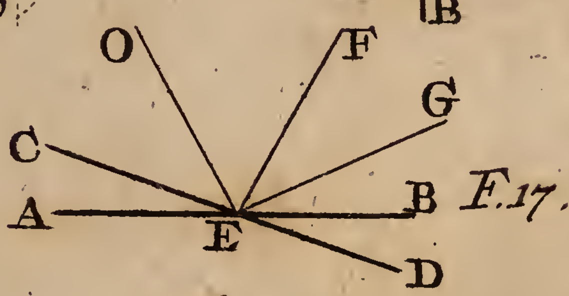


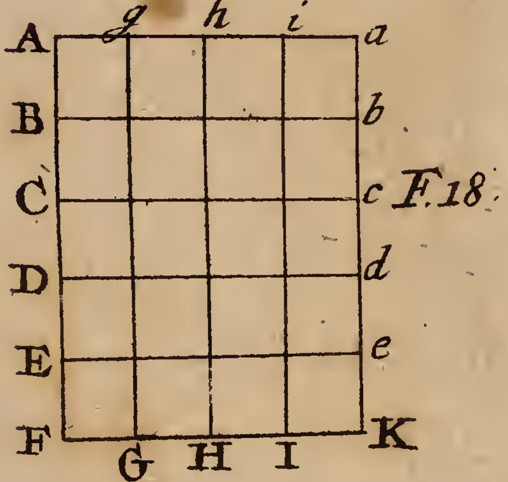


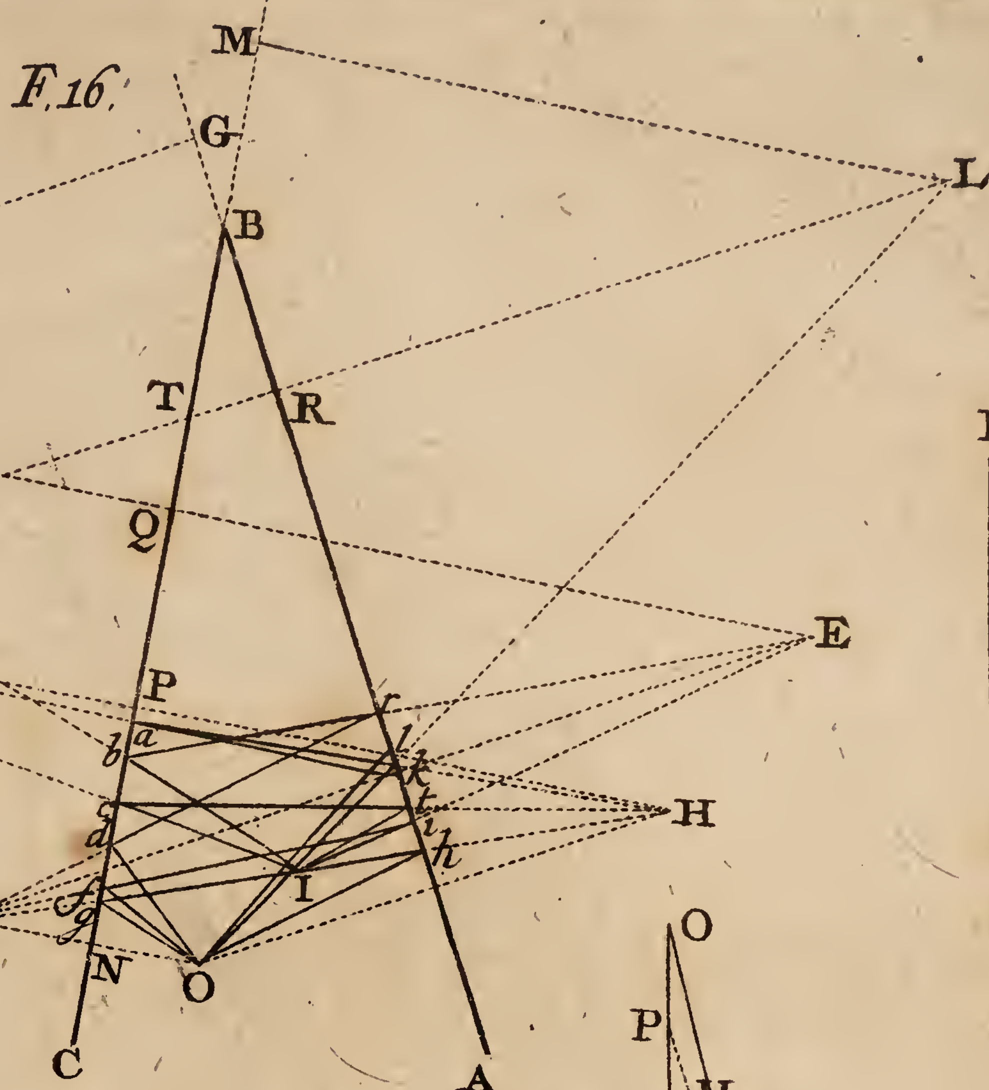
Mansfeld f.

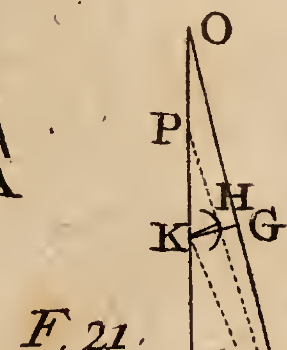
Tab. II.

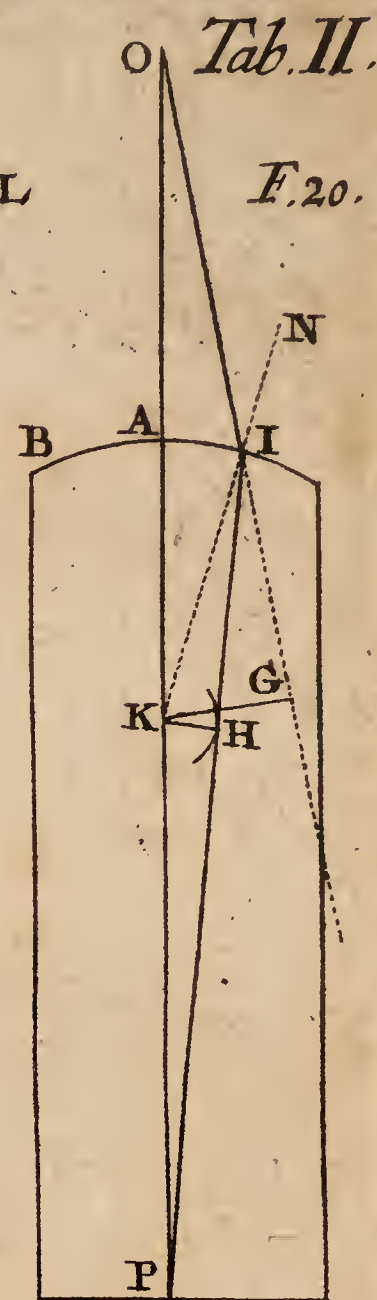


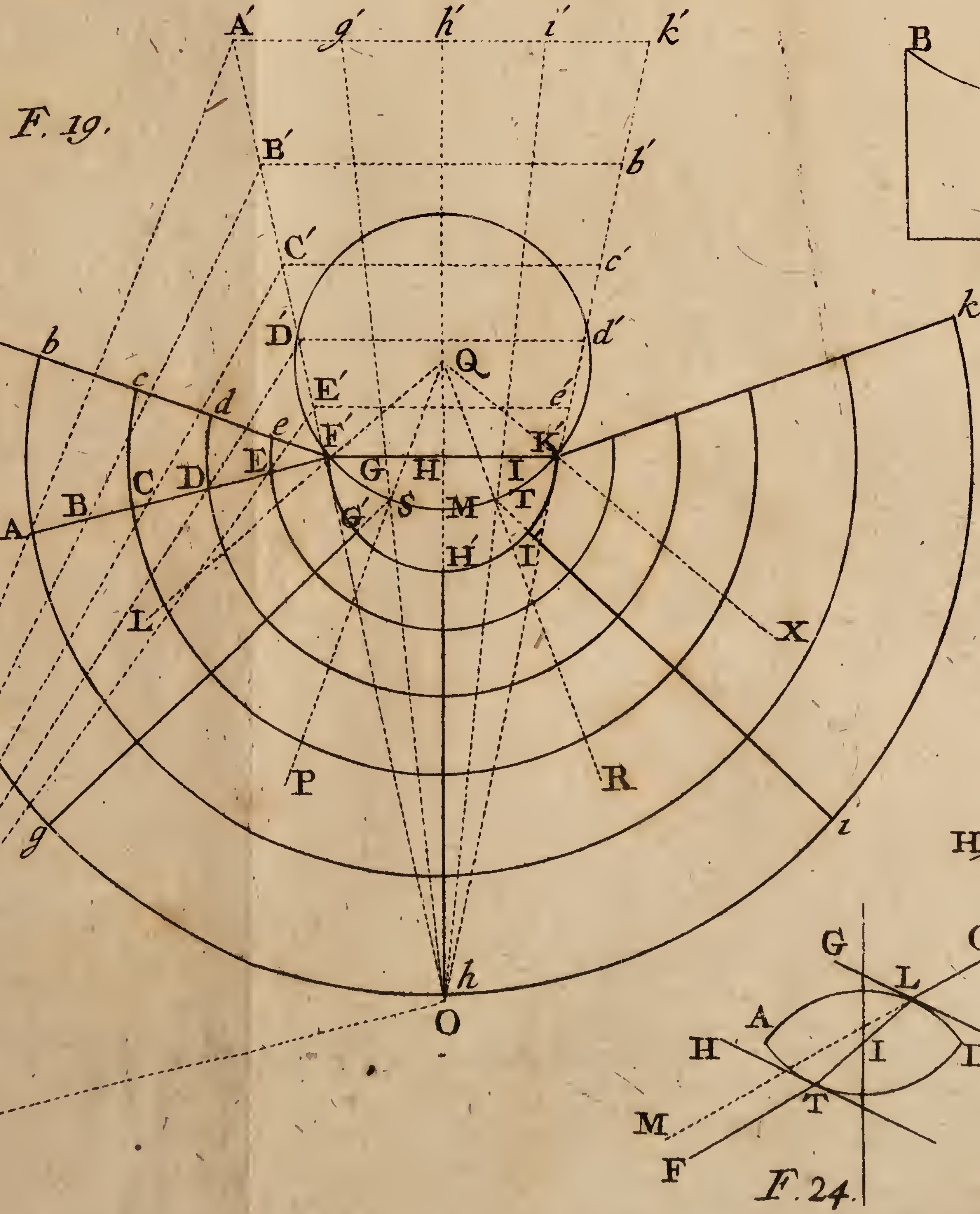


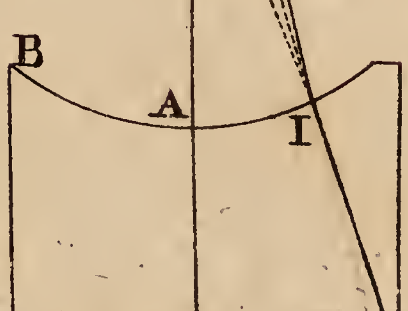


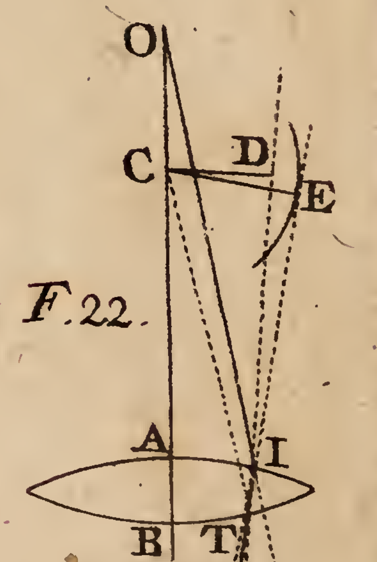


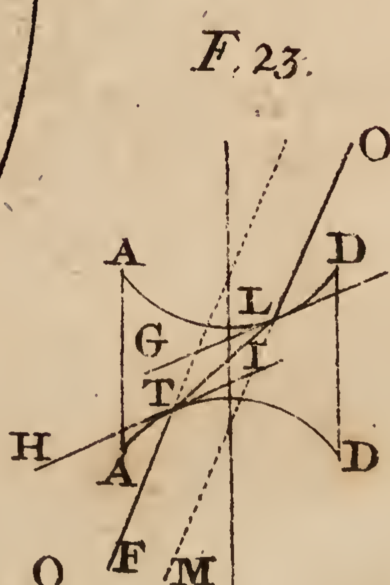


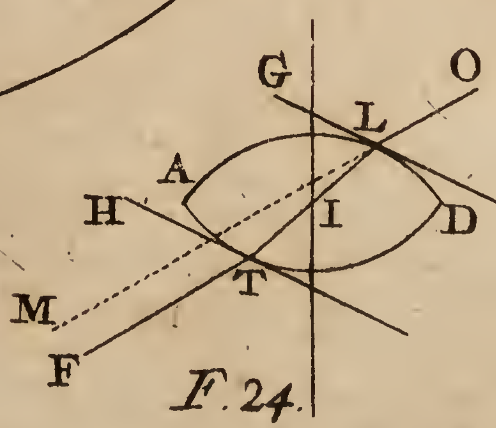


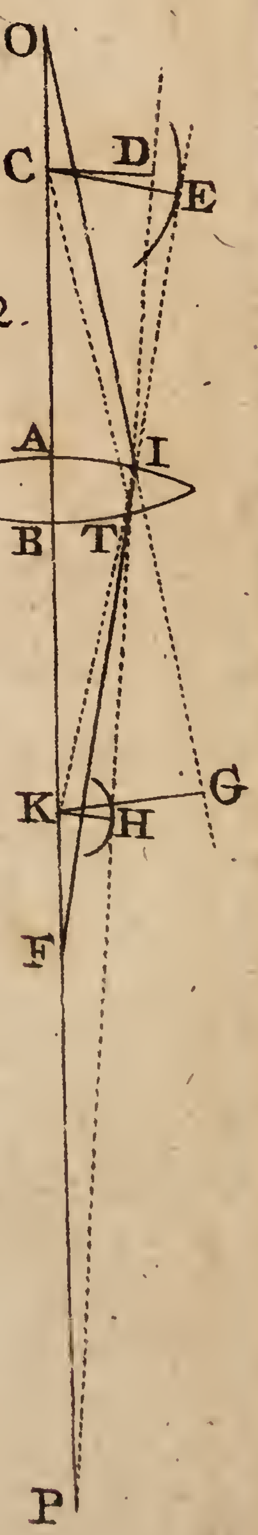






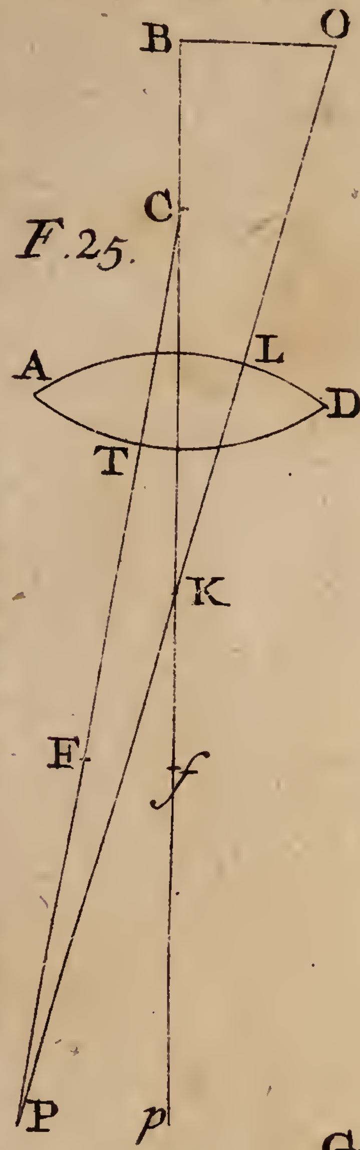


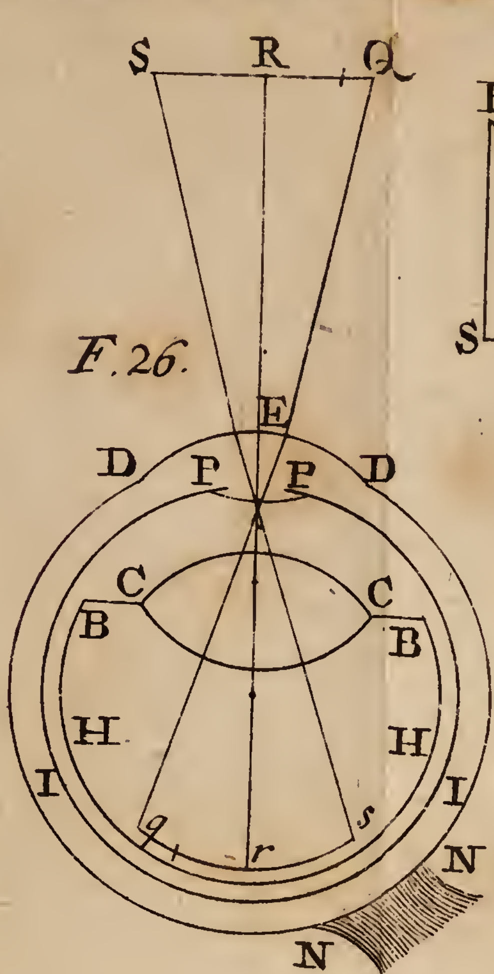


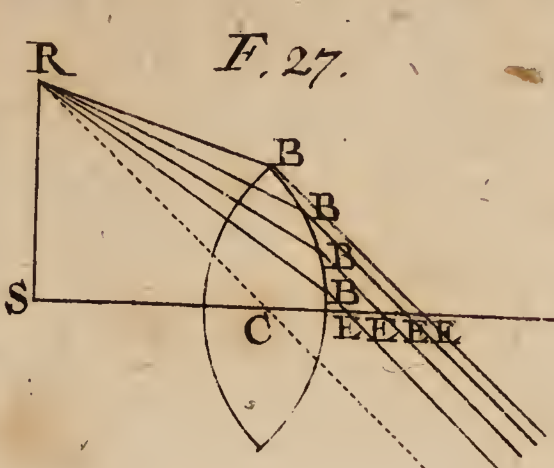


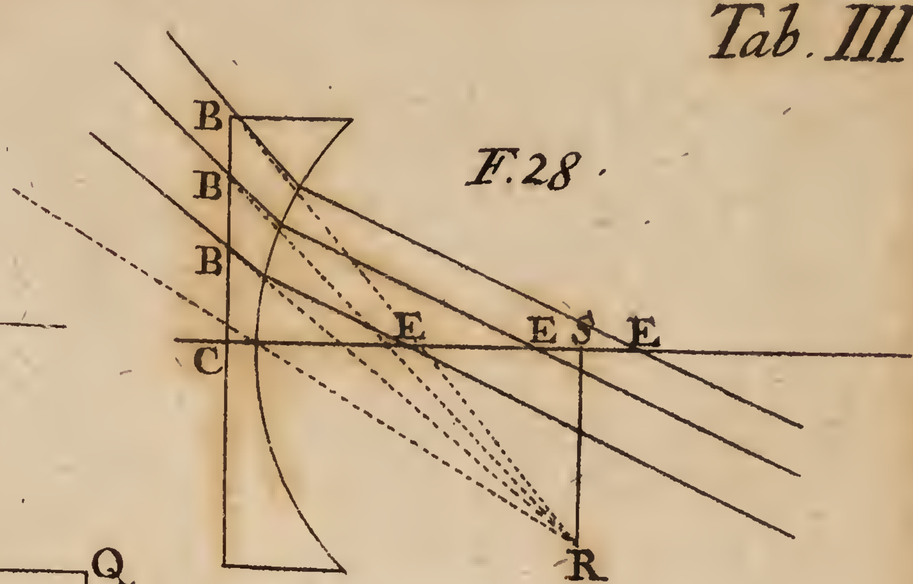
F.15.

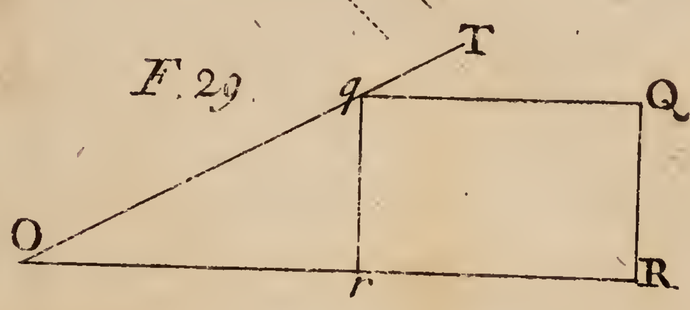
Tab. III.

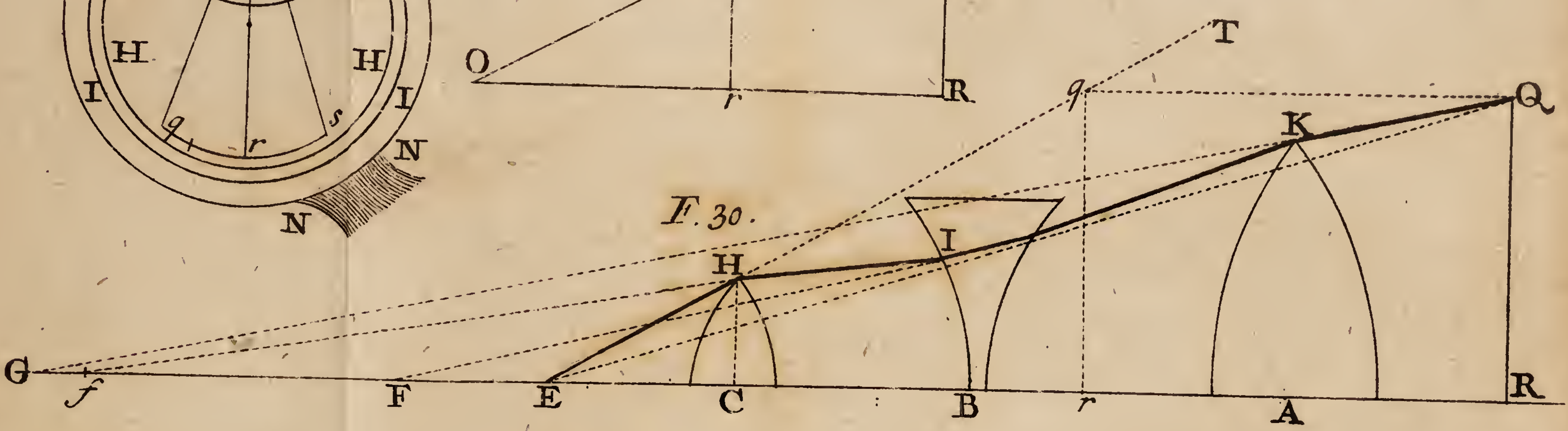

F. 25.
B
O
C
A
L
D
T
K
F
f
P
p

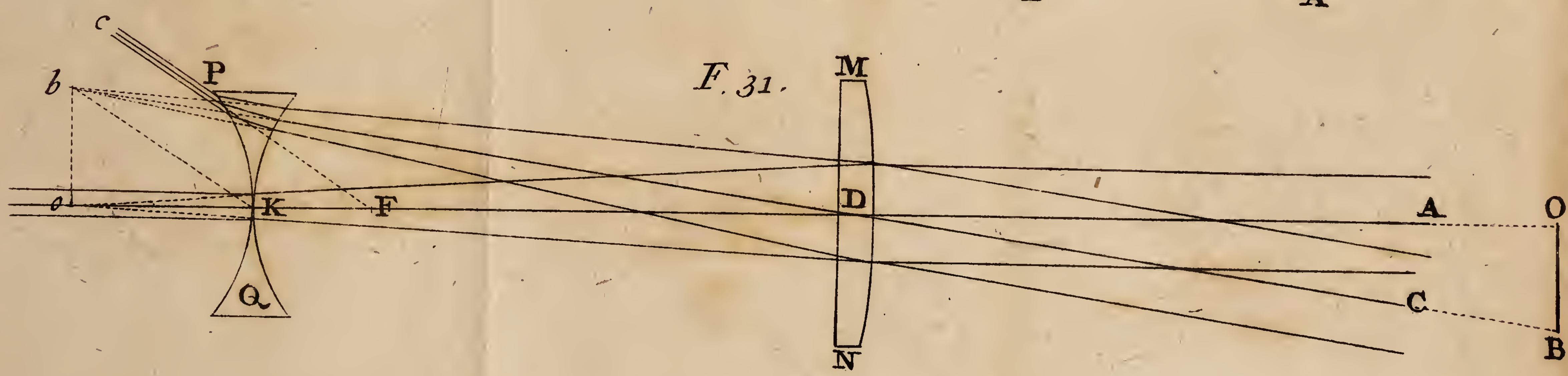

F. 26.
S
R
Q
E
D
P
P
D
C
C
B
B
H
H
I
I
q
r
s
N
N

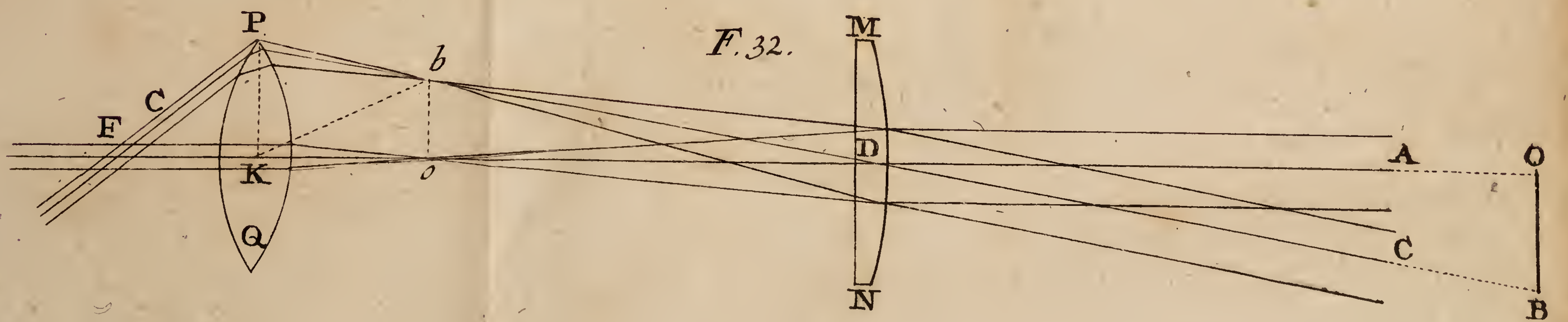

F. 27.
R
B
S
C

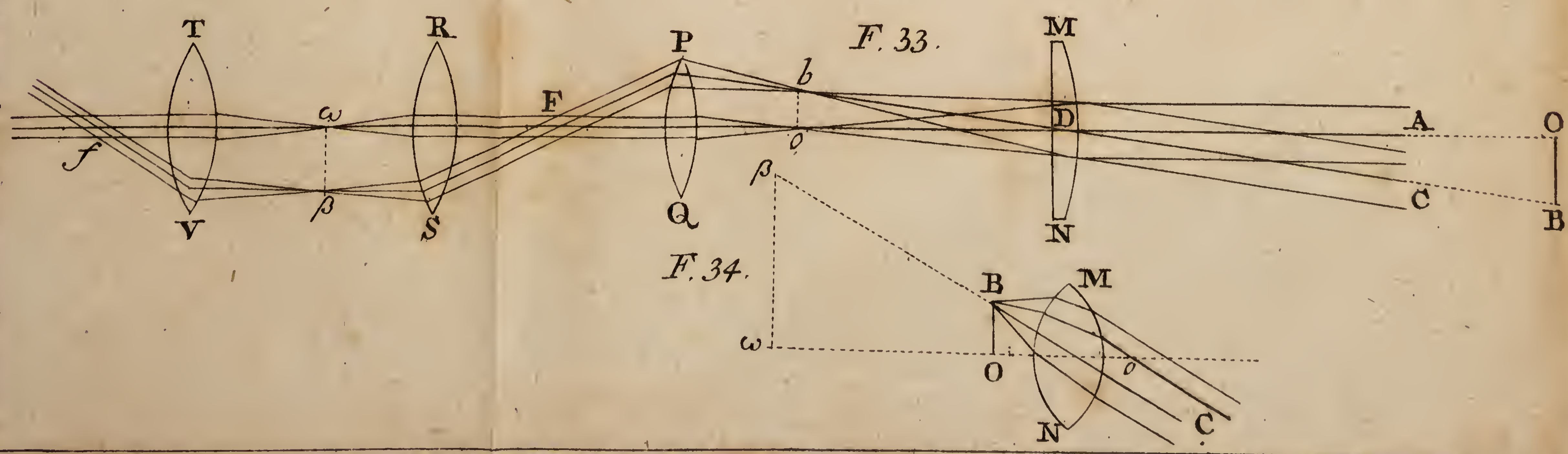

F. 28.
B
B
B
C
E
E
E
R

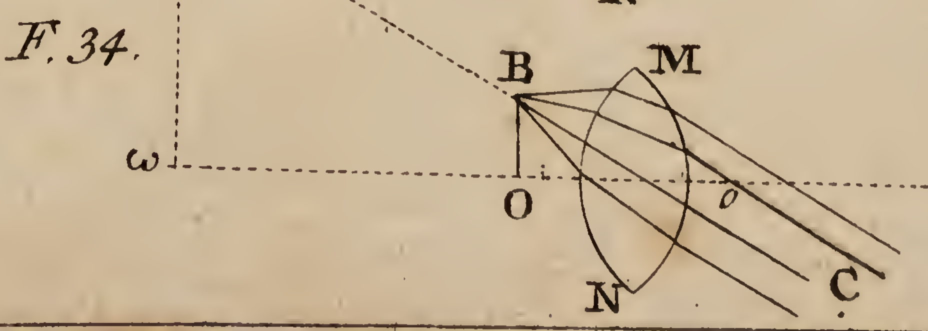

F. 29.
T
q
Q
O
r
R


F. 30.
T
q
K
Q
I
H
G
f
F
E
C
B
r
A
R


F. 31.
c
b
P
M
K
F
D
A
O
Q
C
B
N

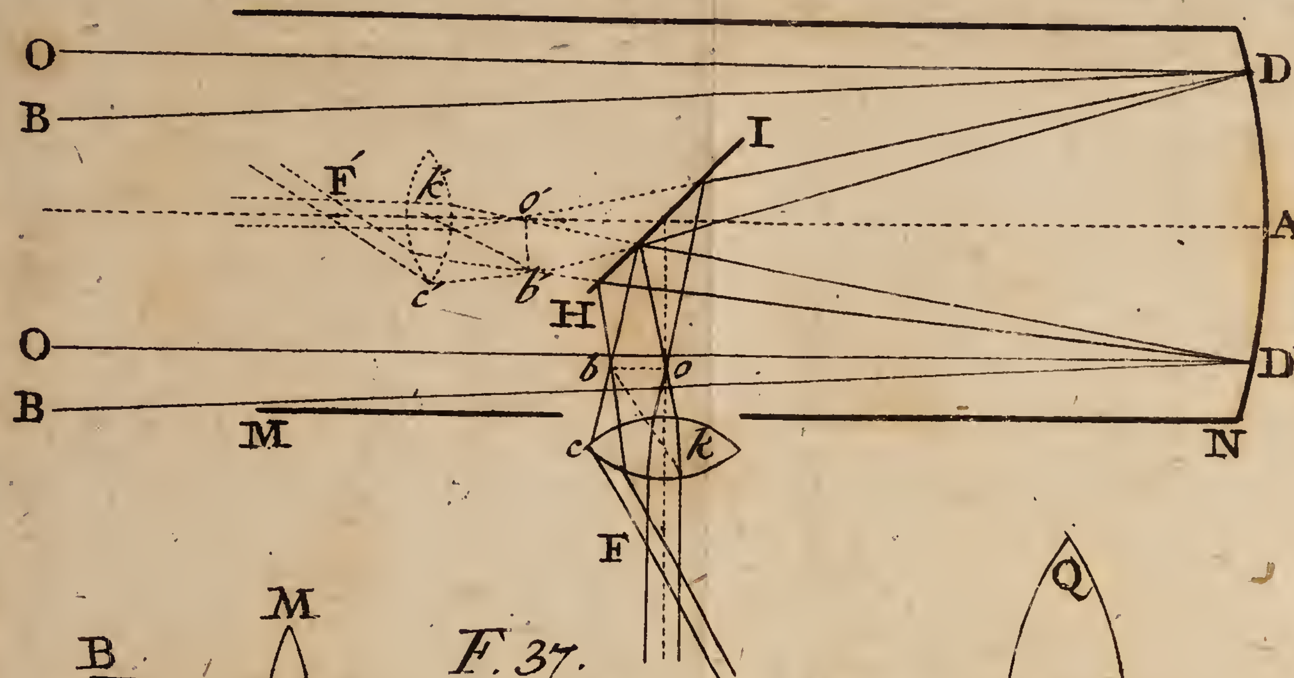

F. 32.
P
b
M
F
C
K
D
A
O
Q
C
B
N

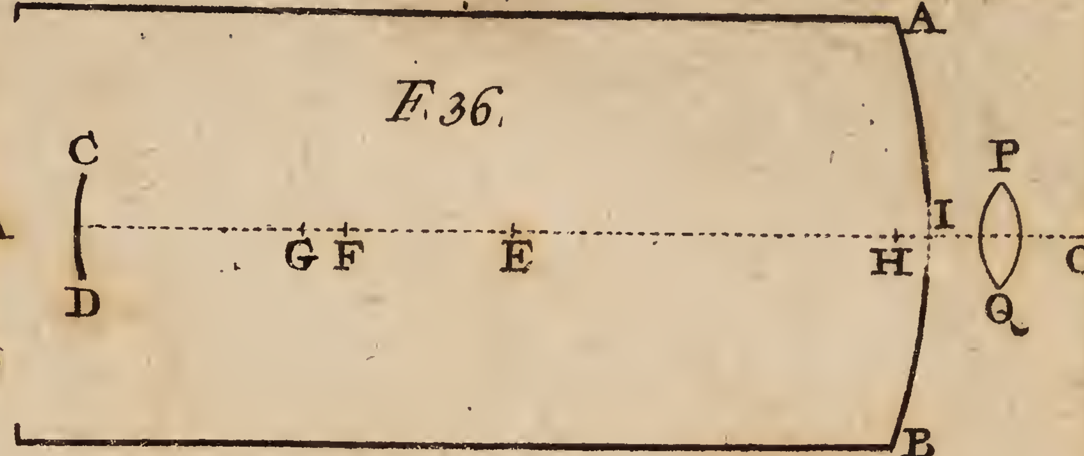

F. 33.
T
R
P
b
M
ω
F
D
A
O
f
V
β
S
Q
C
B
N

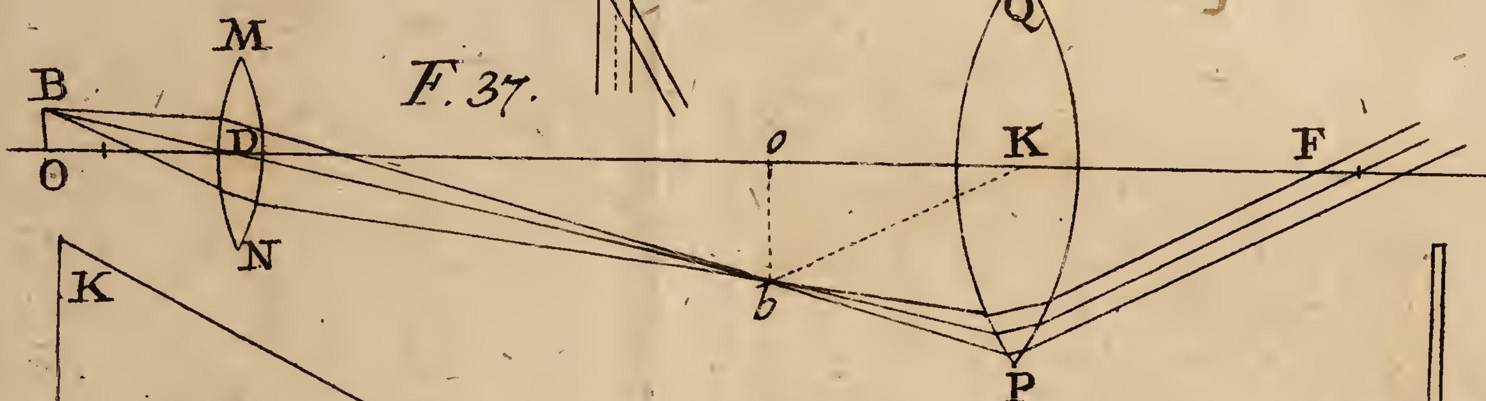

F. 34.
β
B
M
ω
O
N
C

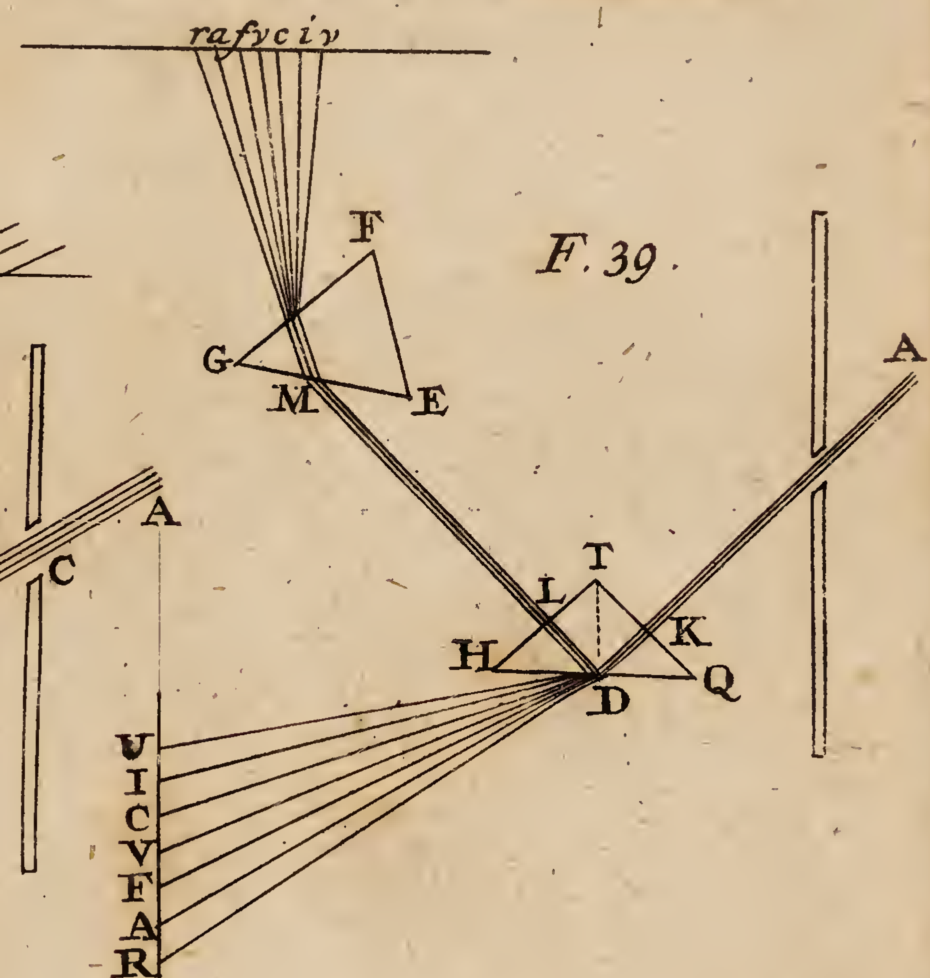
p: 67. § 251.

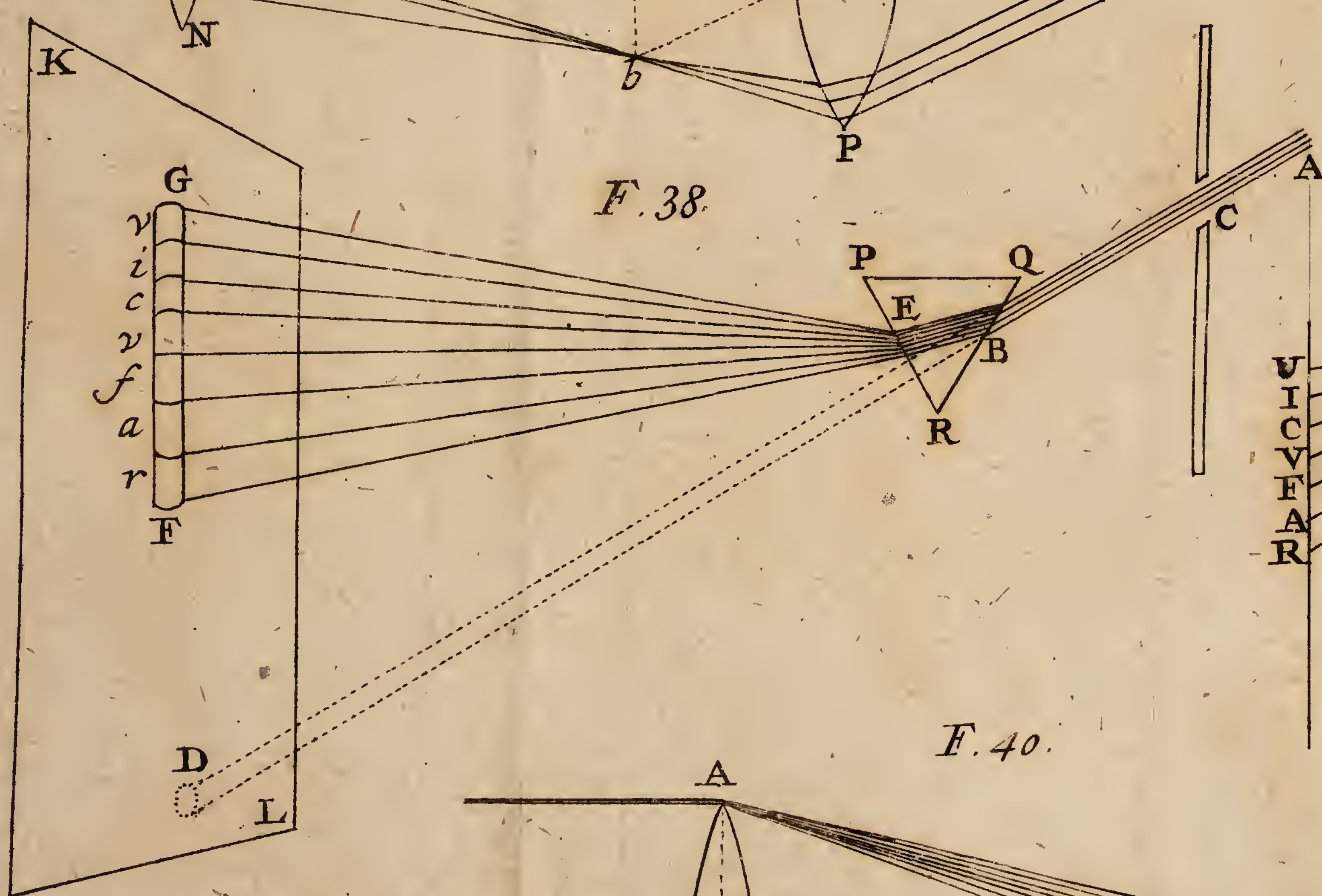
Tab. IV.

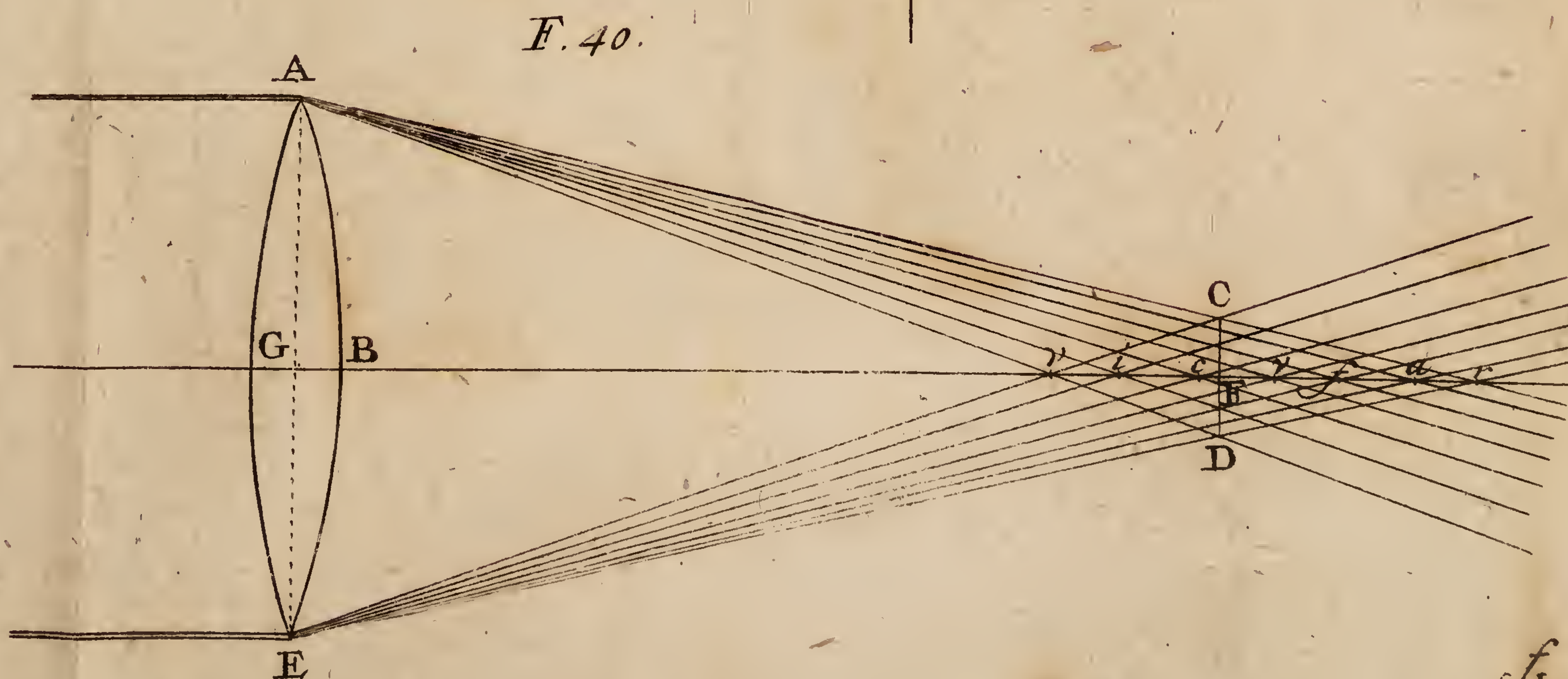


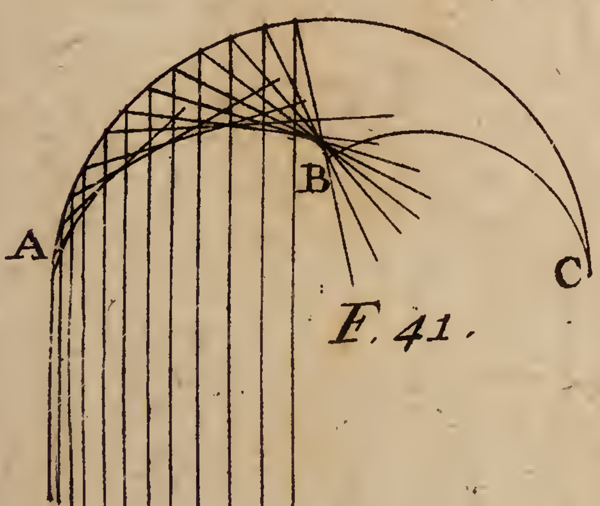


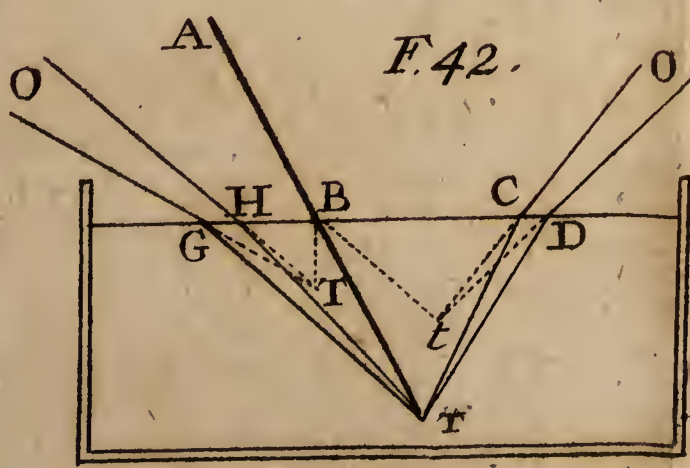


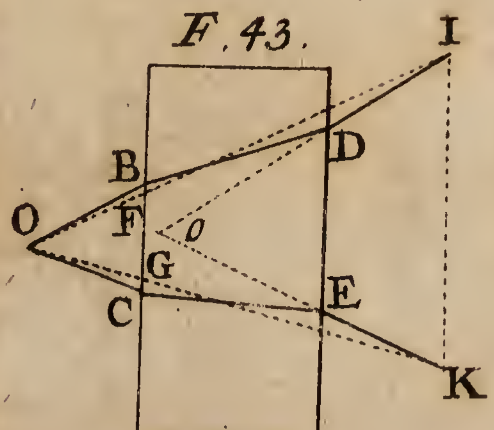


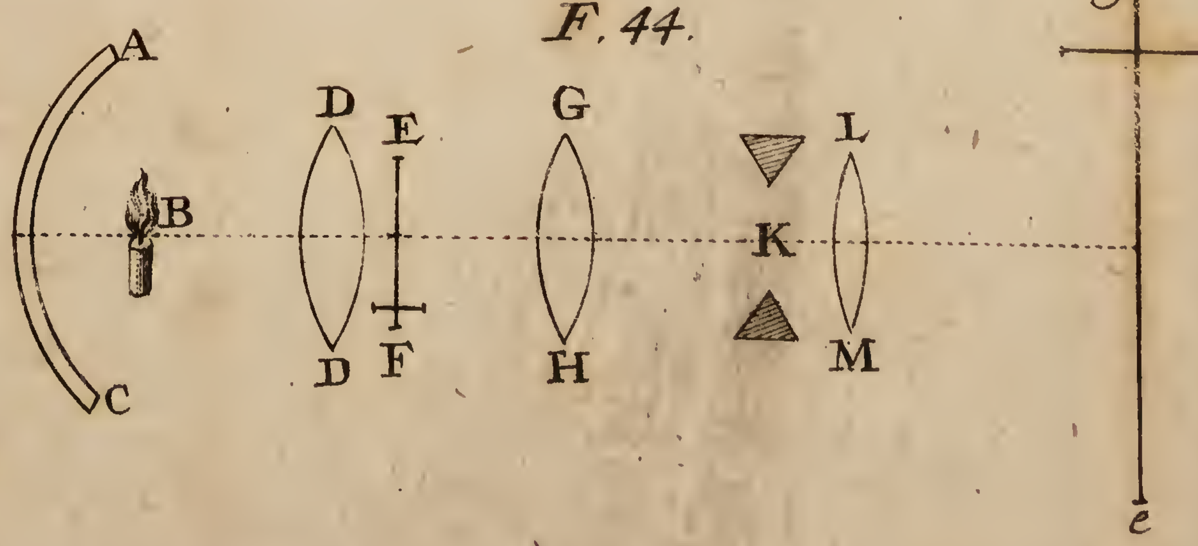




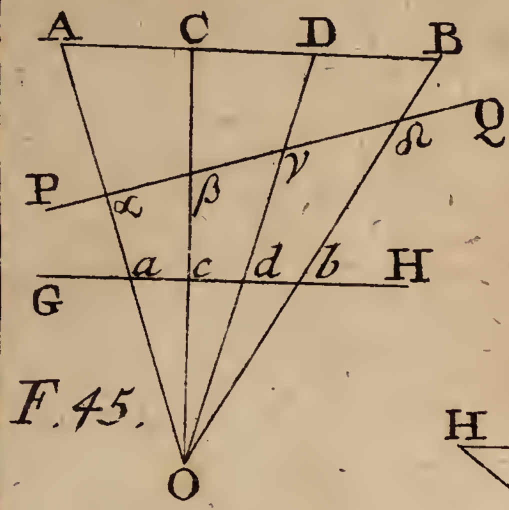


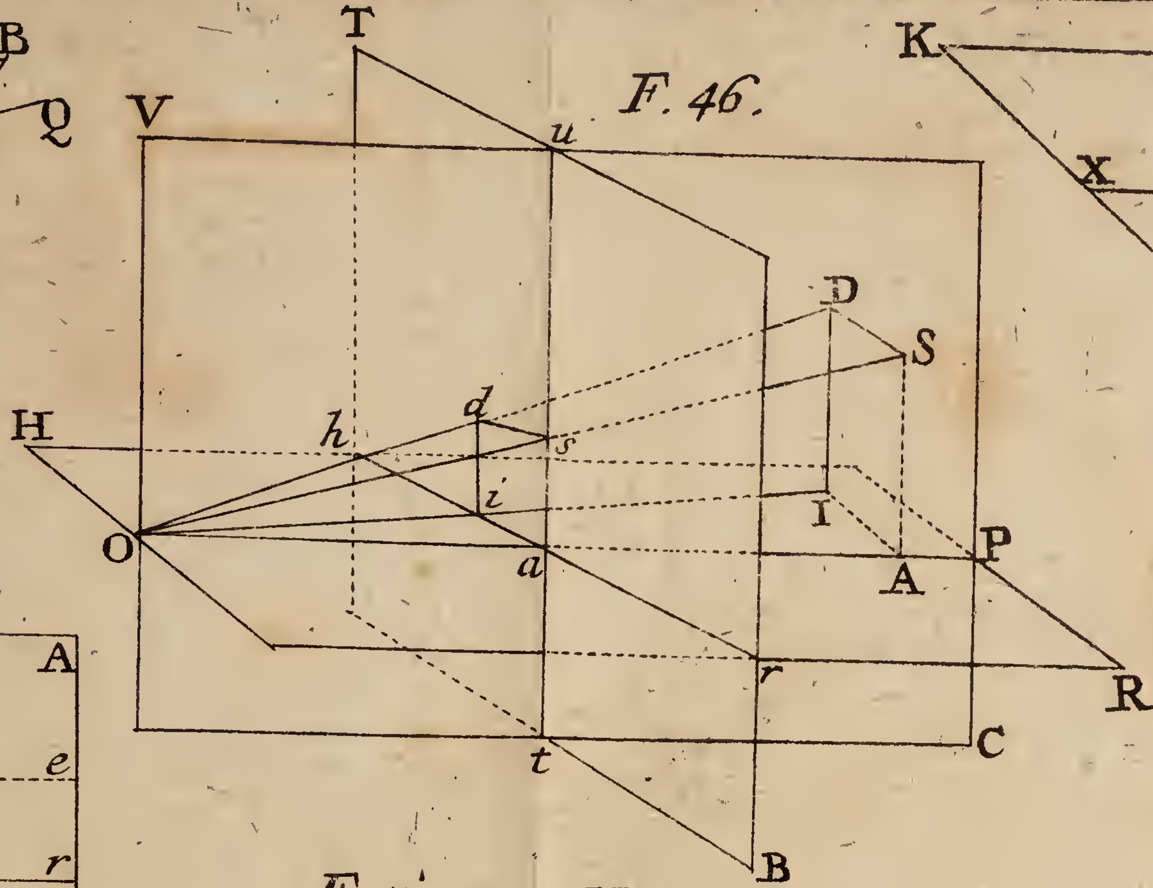


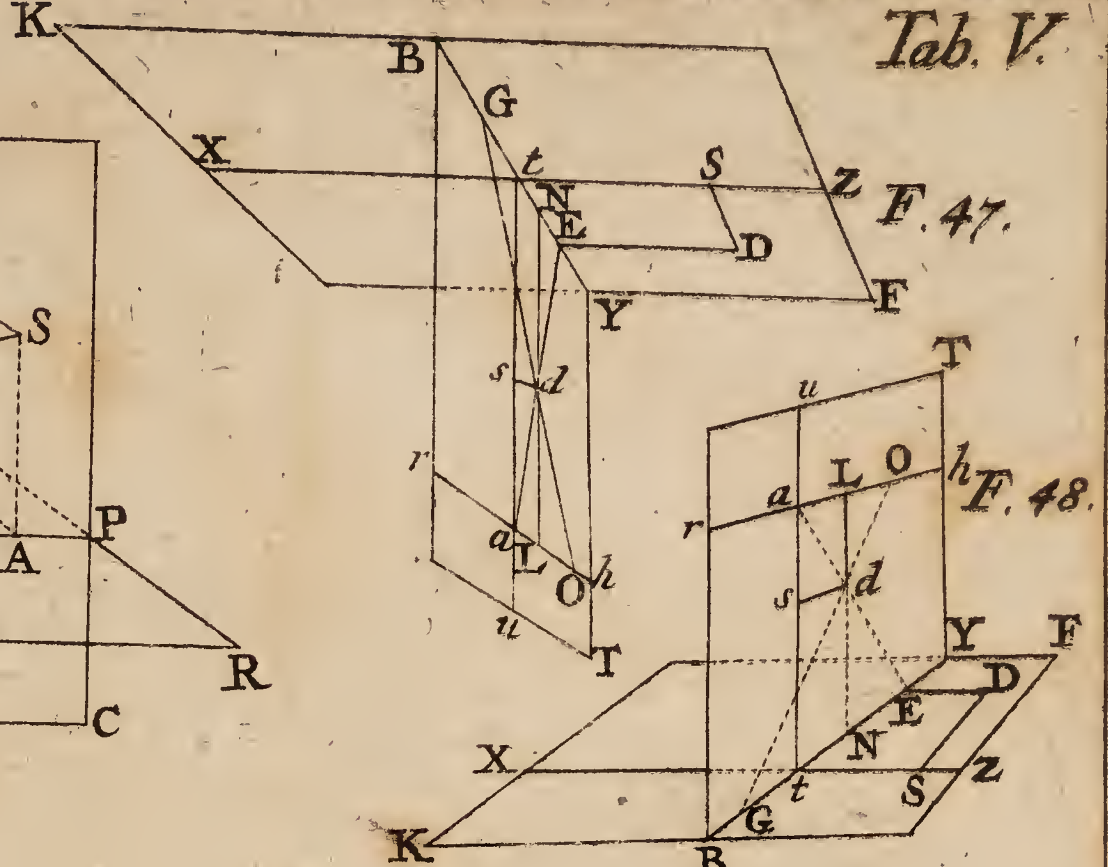


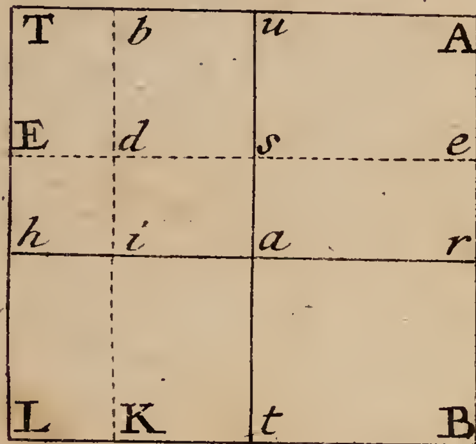


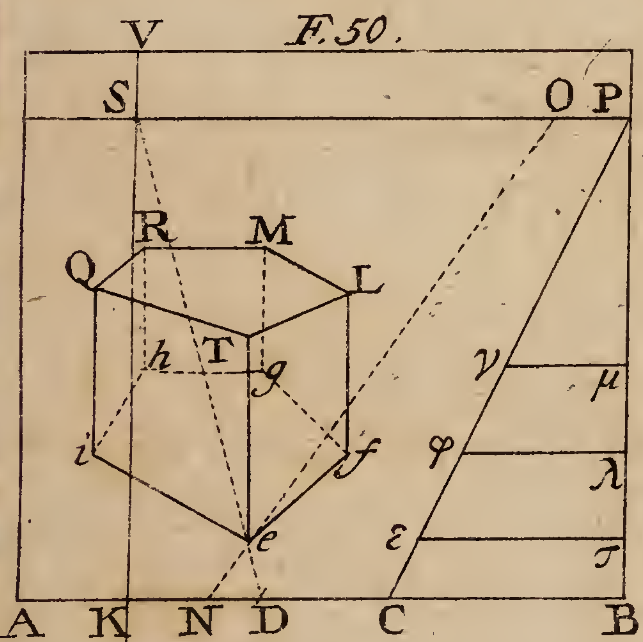
Tab. V.

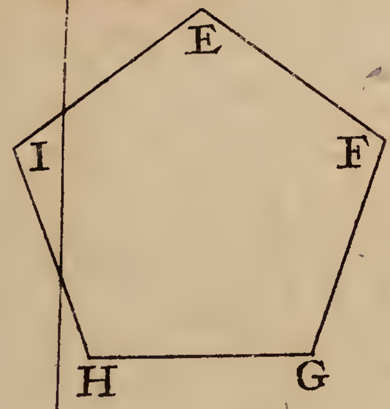

A C D B
Q
P α β γ δ
G a c d b H
F. 45.
O

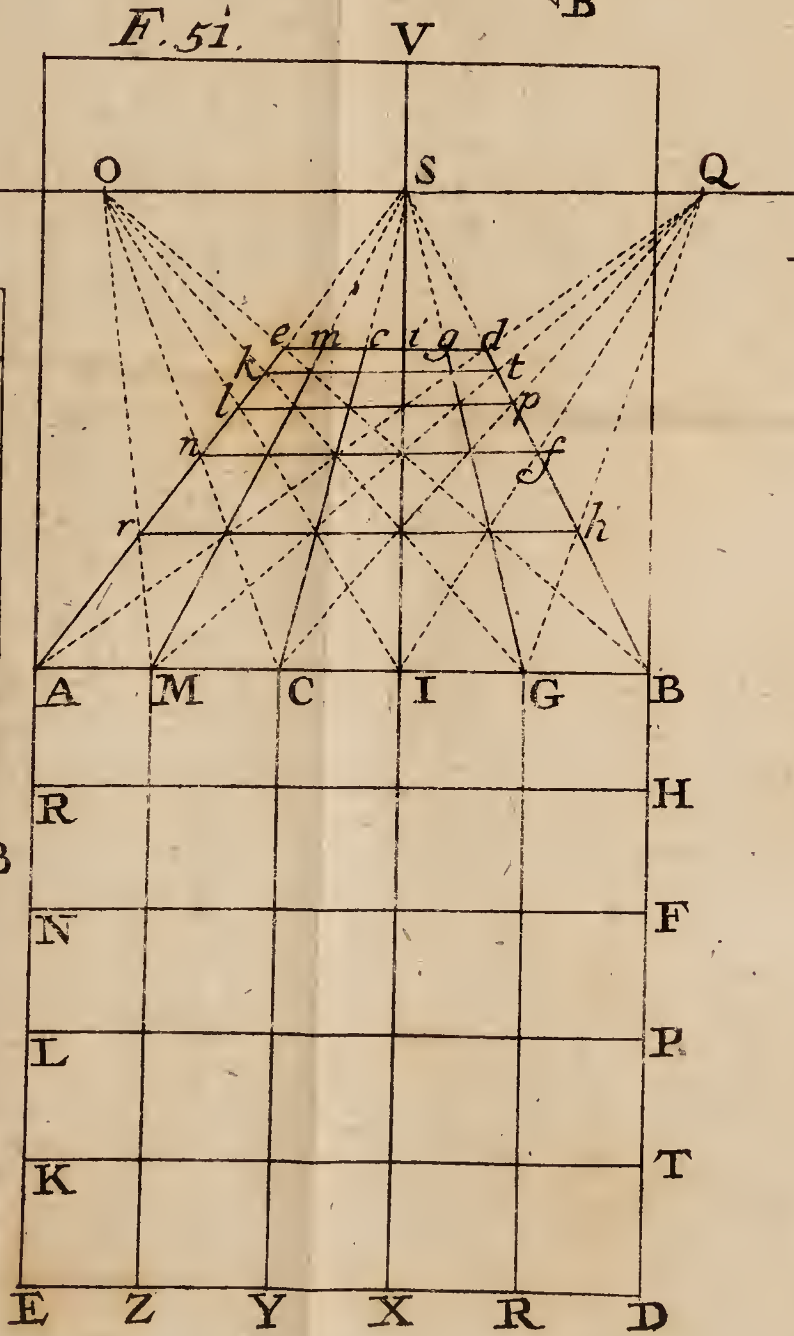

T
V
F. 46.
u
H
D
S
h d s
i I
O a A P
r R
t C
B

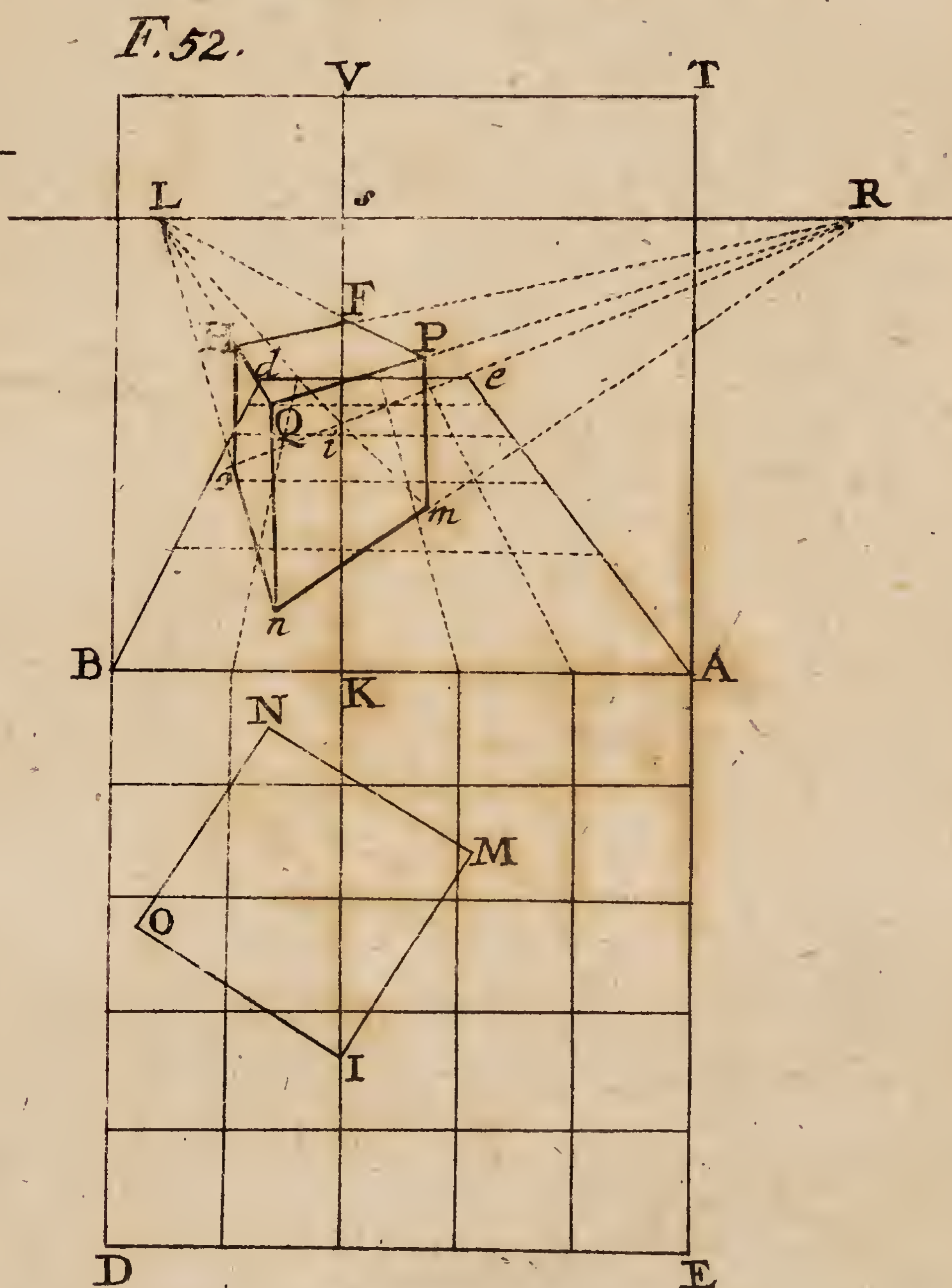

K
B G
X t S Z F. 47.
N D
E
Y F
s d
r
a L O h
u T
u T
r a L O h F. 48.
s d
Y F
X E D
N
K G t S Z
B

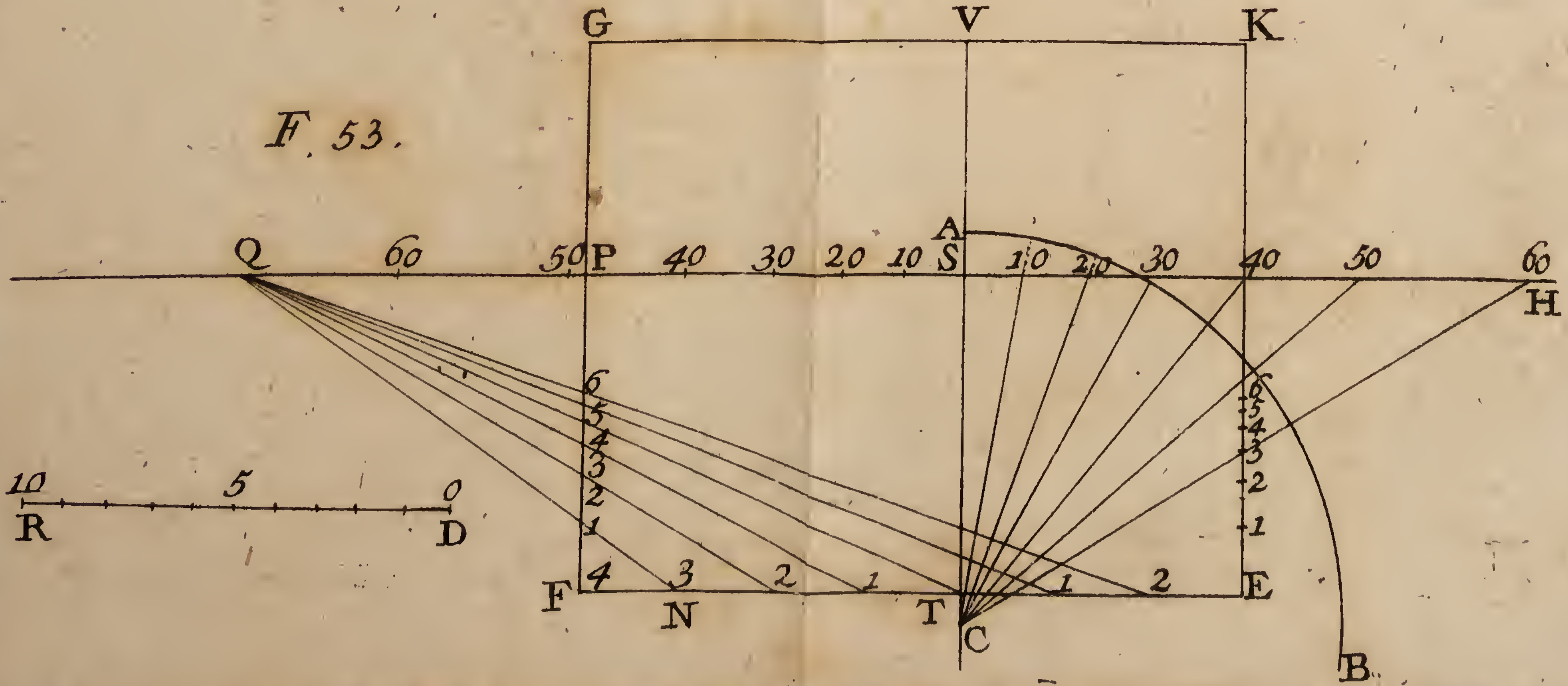

F. 49.
T b u A
E d s e
h i a r
L K t B

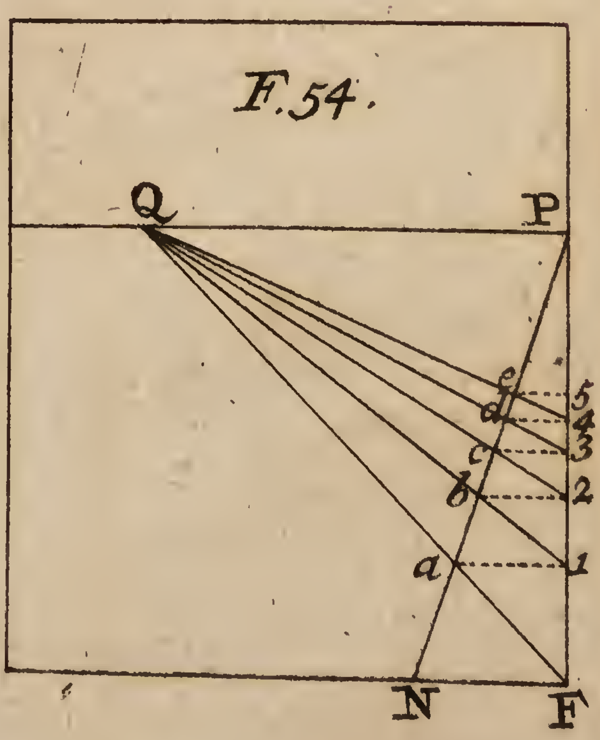

V F. 50.
S O P
R M
Q L
h T g
ν μ
i f
φ λ
e
ε σ
A K N D C B

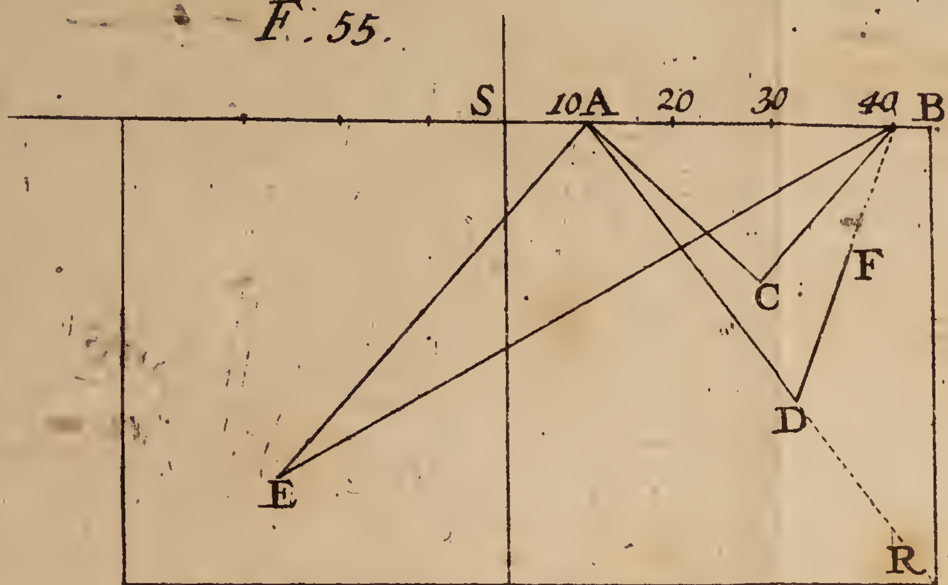

E
I F
H G

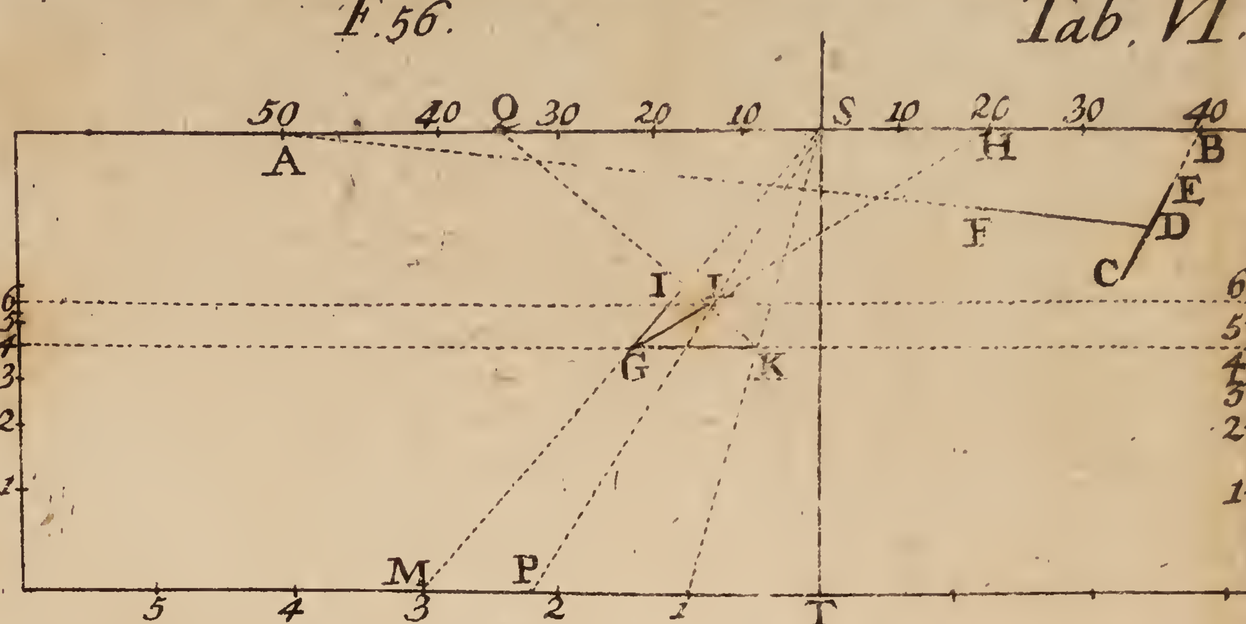

F. 51. V
O S Q
e m c i g d
k t
l p
n f
r h
A M C I G B
R H
N F
L P
K T
E Z Y X R D

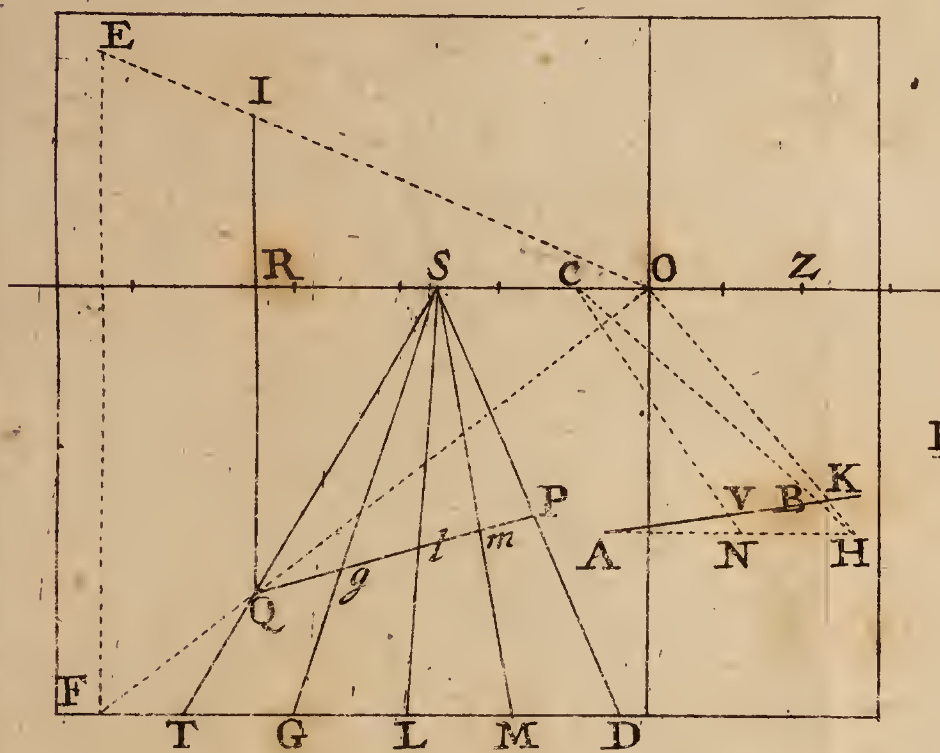

F. 52.
V T
L s R
F
P
d e
Q i
m
n
B K A
N
M
O
I
D E

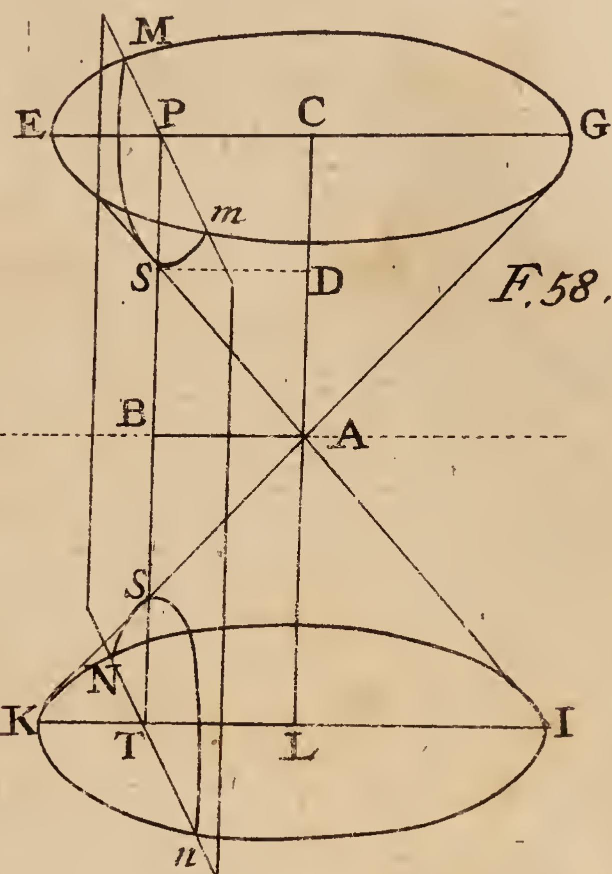

G V K
F. 53.
A
Q 60 50 P 40 30 20 10 S 10 20 30 40 50 60
H
10 5 0
R D
F 4 3 2 1 1 2 E
N T
C
B

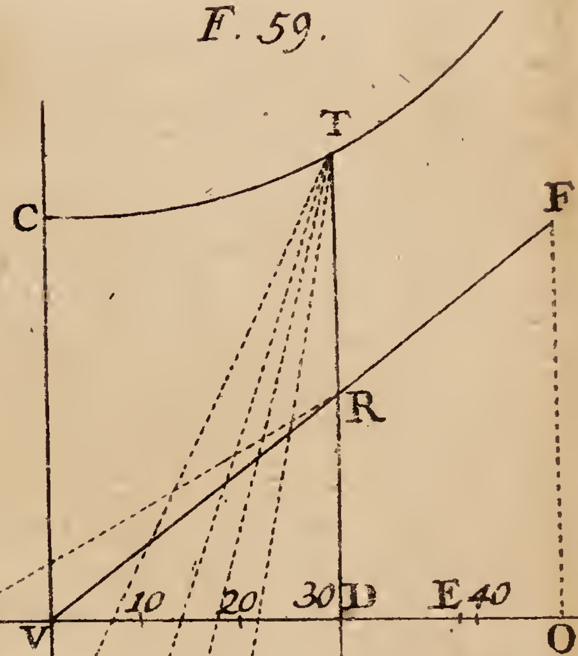

F. 54.
Q P
e 5
d 4
c 3
b 2
a 1
N F

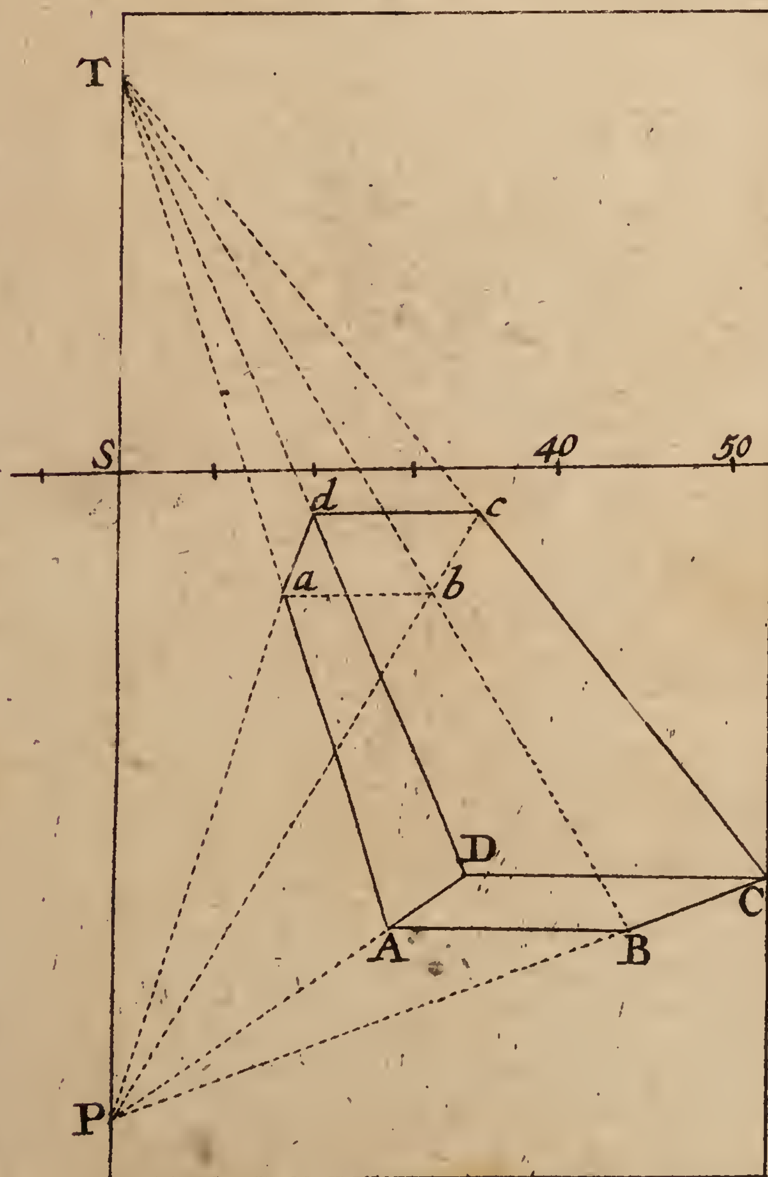

F. 55.
S
10 A
20
30
40 B
C
F
D
E
R

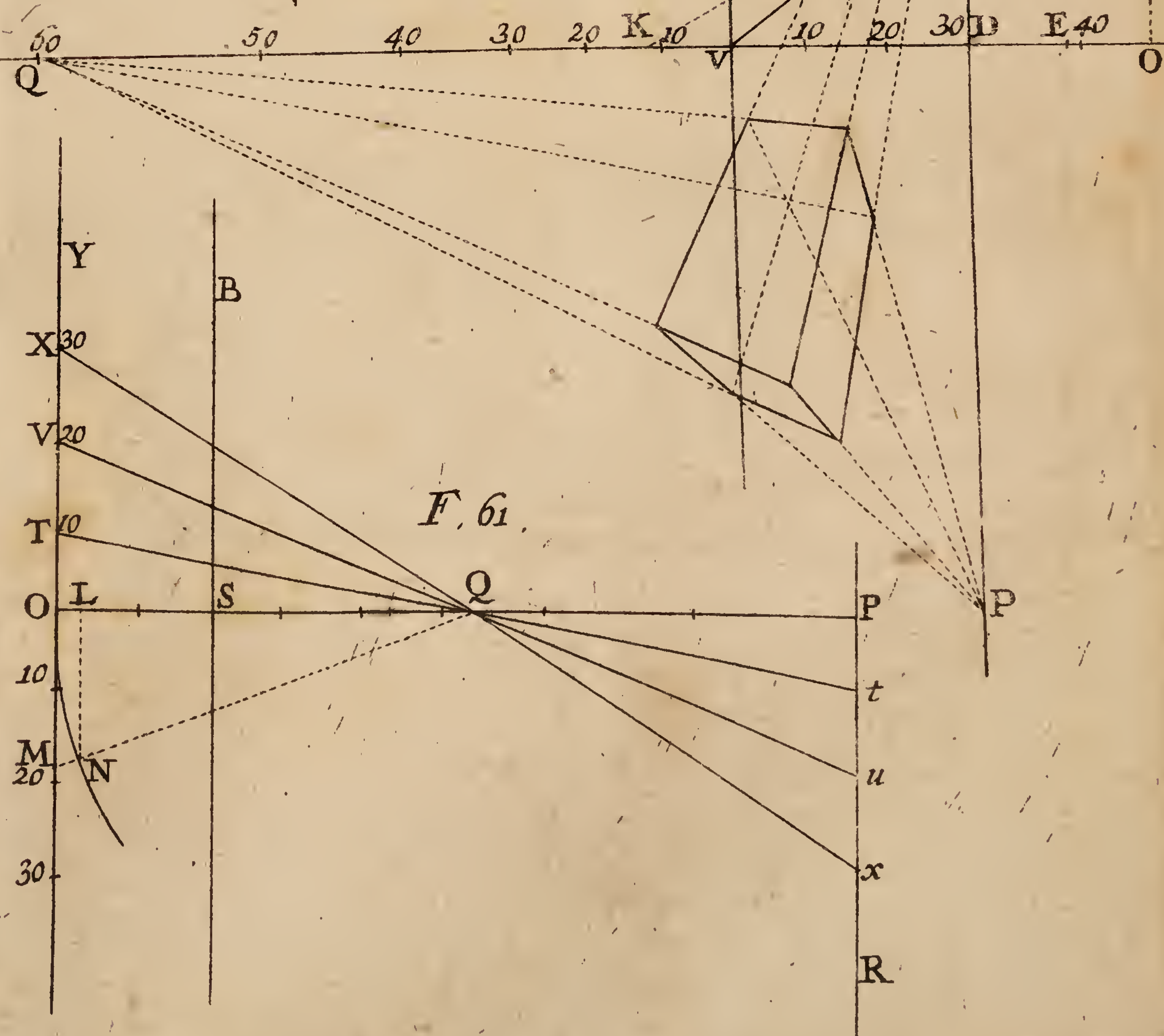

F. 56.
50
40
Q 30
20
10
S
10
20
30
40
A
H
B
E
F
D
C
I
L
G
K
M
P
T
5
4
3
2
1

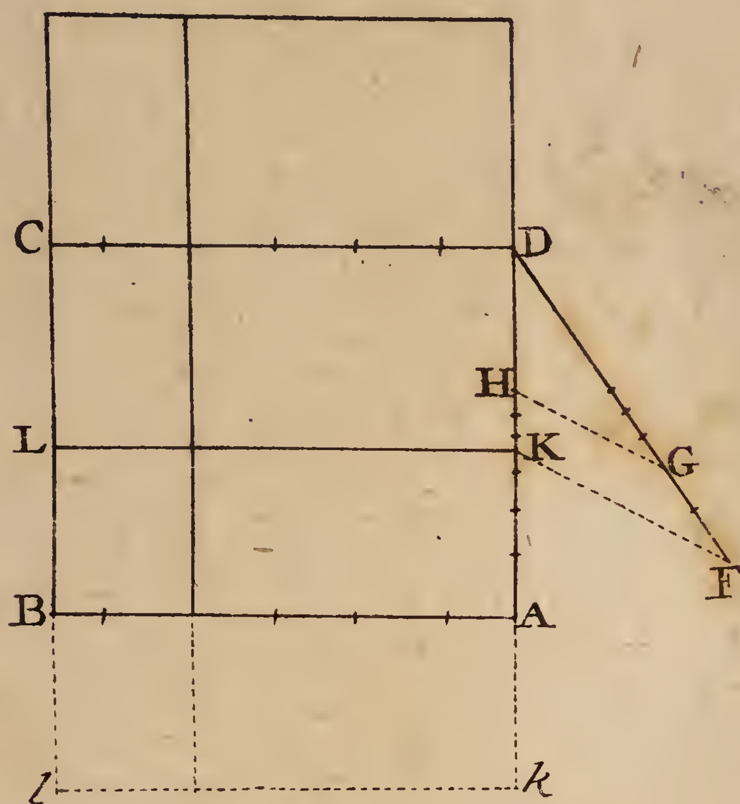

F. 57.
E
I
R
S
C
O
Z
P
V
B
K
A
N
H
Q
g
l
m
F
T
G
L
M
D

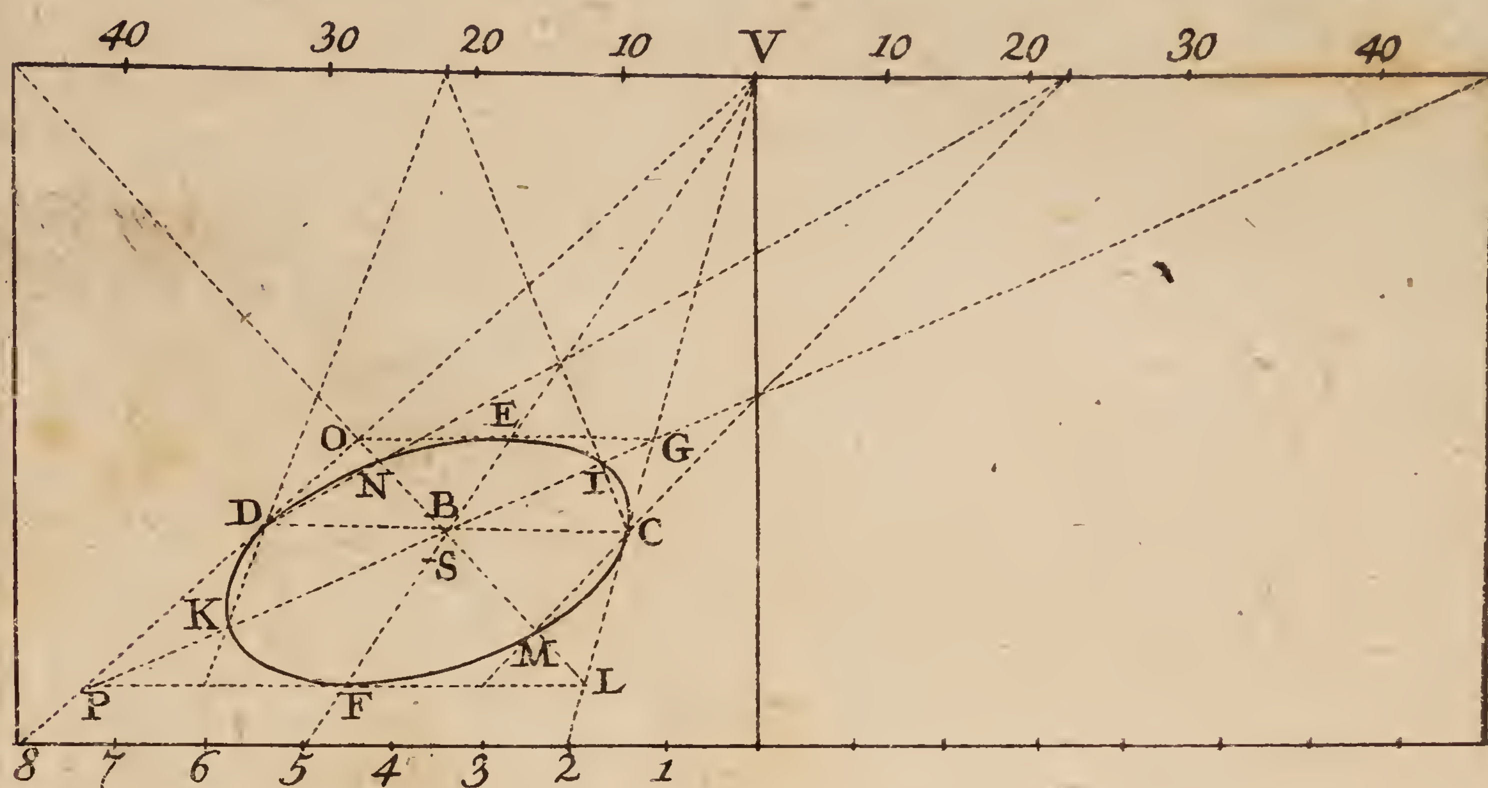

M
E
P
C
G
m
S
D
F. 58.
H
B
A
S
N
K
T
L
I
n

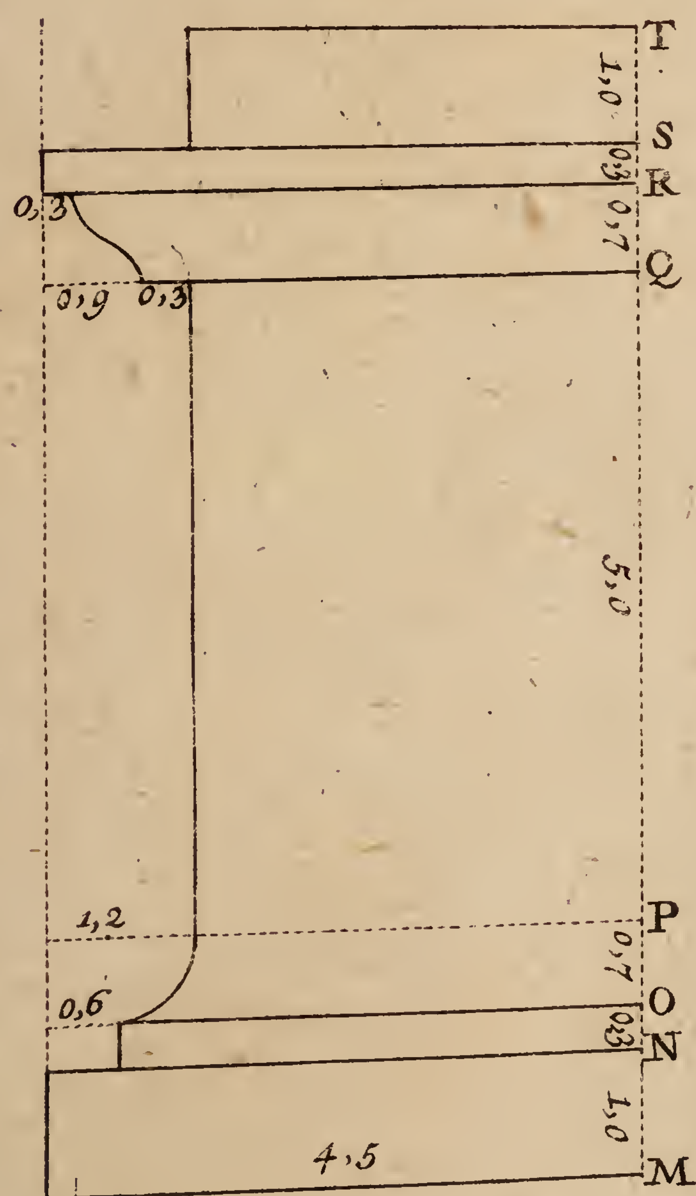

F. 59.
T
C
F
R

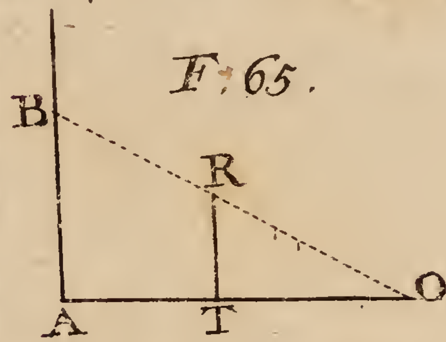

F. 60.
T
S
40
50
d
c
a
b
D
C
A
B
P

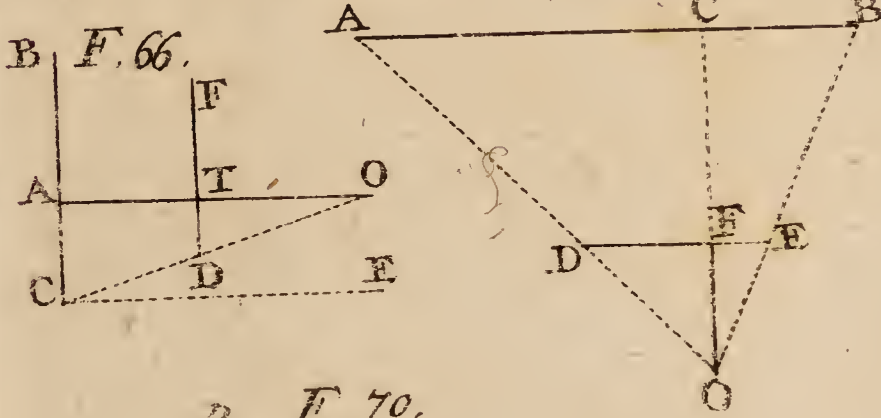

60
50
40
30
20
K
10
V
10
20
30 D
E 40
O
Q
Y
B
X 30
V 20
T 10
O
L
S
Q
P
F. 61.
t
u
x
10
M
20
N
30
R
P

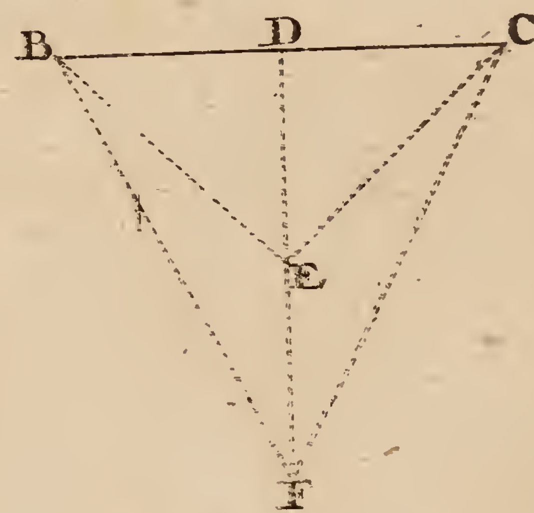

F. 62.
C
D
H
L
K
G
B
A
F
l
k

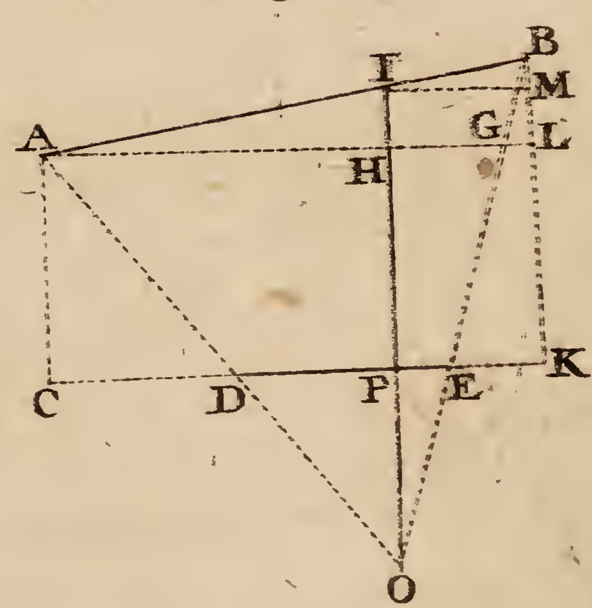

F. 63.
40
30
20
10
V
10
20
30
40
O
E
G
N
I
D
B
C
S
K
M
L
P
F
8
7
6
5
4
3
2
1

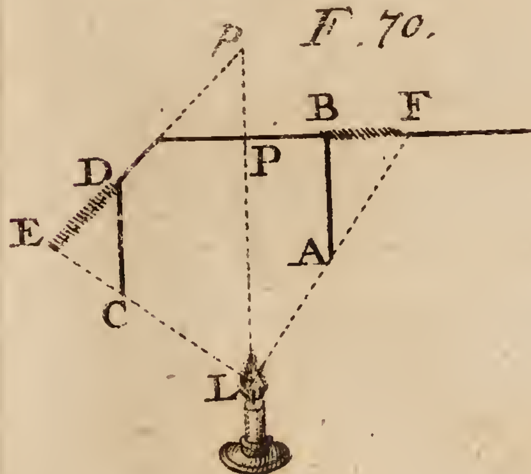

F. 64.
T
1,0
S
0,3
R
0,3
0,7
Q
0,9
0,3
5,0
1,2
P
0,7
0,6
O
0,3
N
1,0
4,5
M

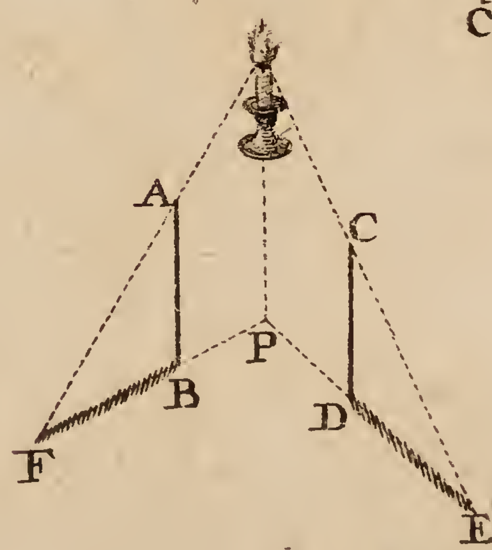

F. 65.
B
R
A
T
O

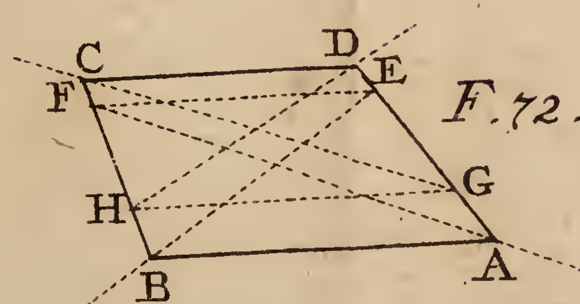

B
F. 66.
F
A
T
O
C
D
E
F. 67.
A
C
B
D
F
E
O


F. 68.
B
D
C
E
F

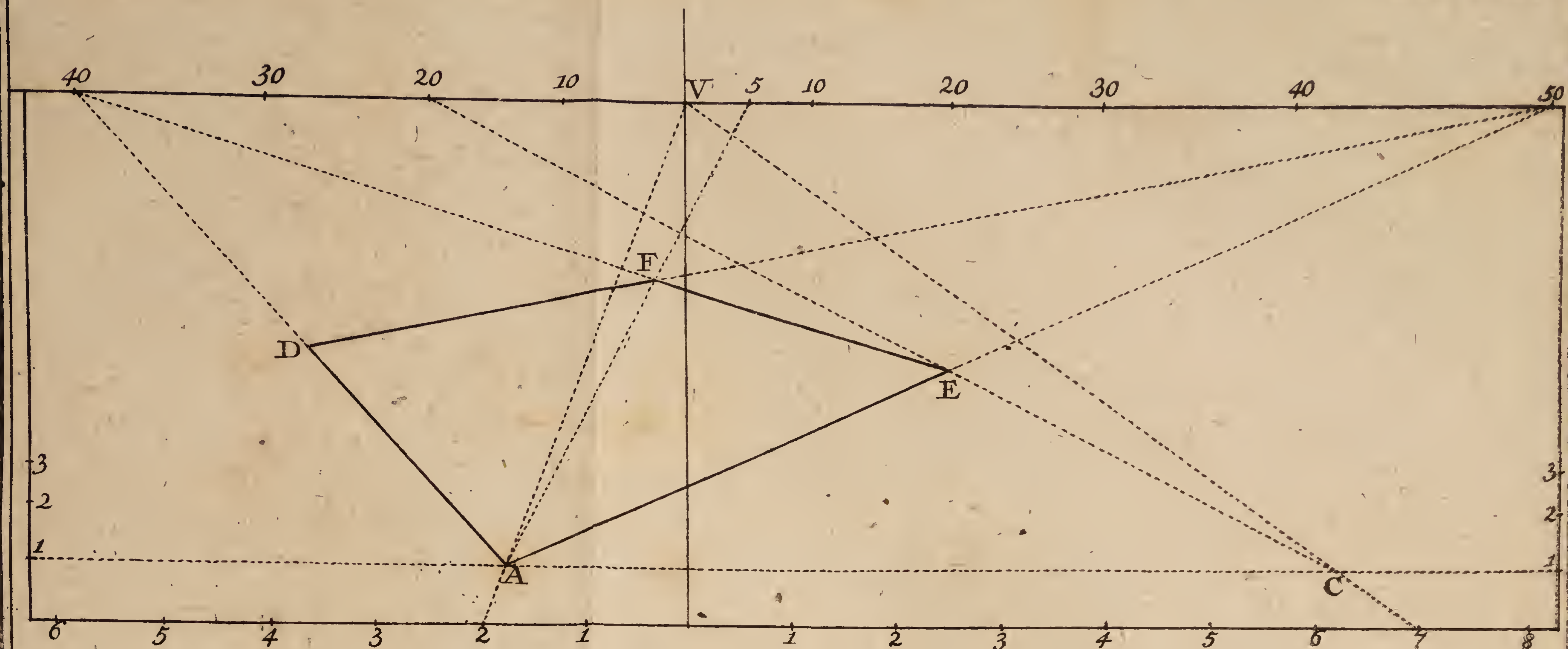

F. 69.
I
B
M
A
G
L
H
C
D
P
E
K
O

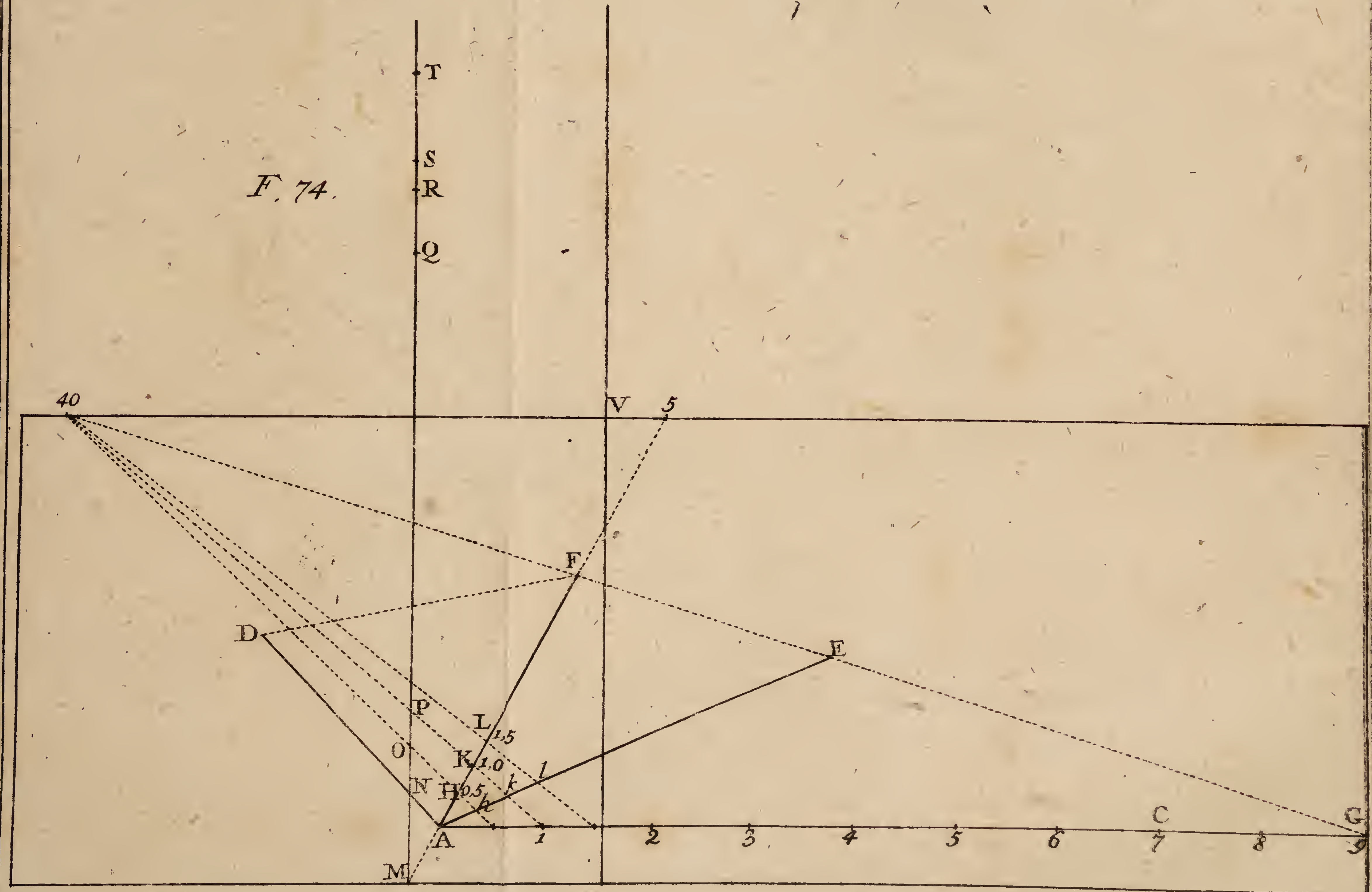

F. 70.
B
F
D
P
E
A
C
L


F. 71.
A
C
P
B
D
F
E

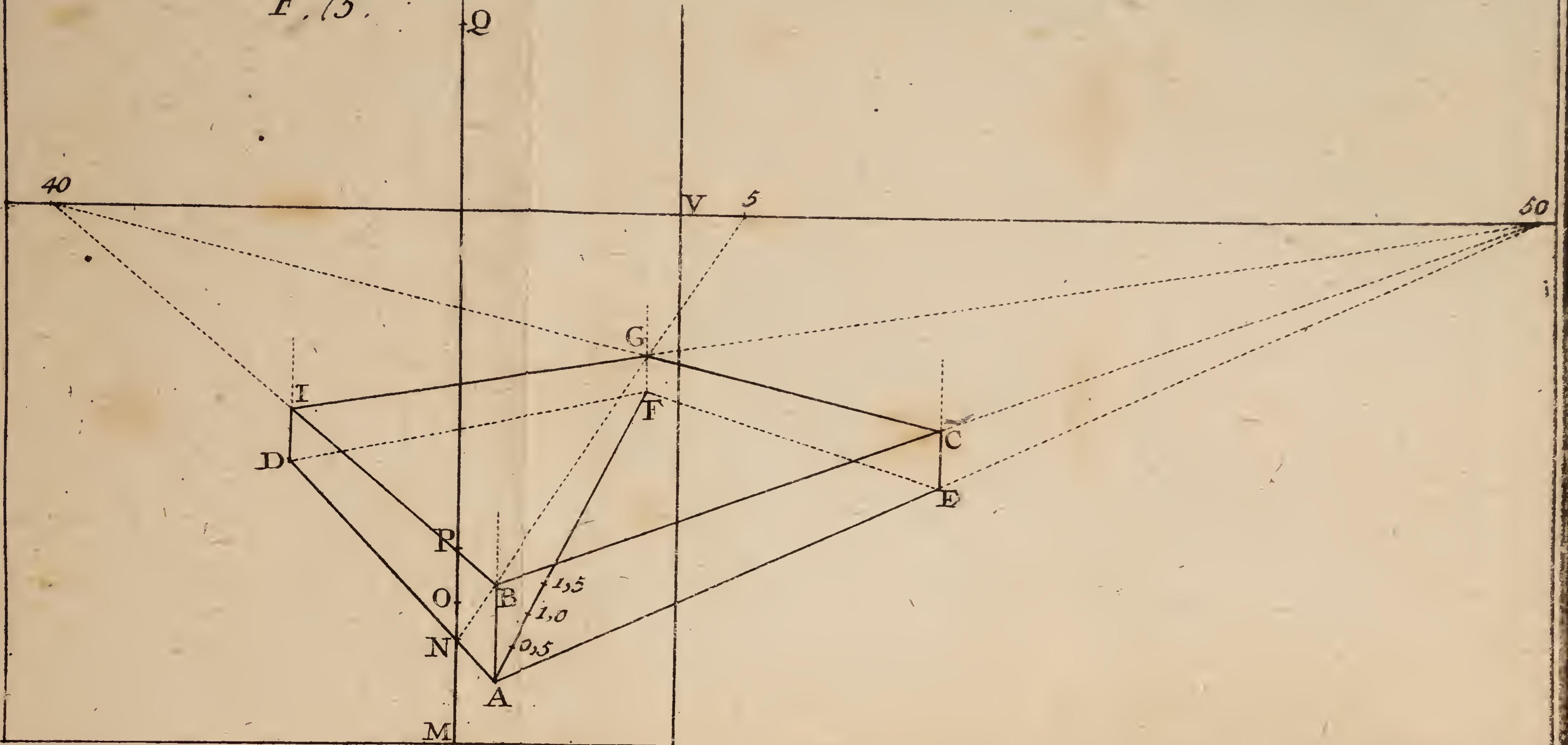

C
D
E
F
F. 72.
G
H
B
A

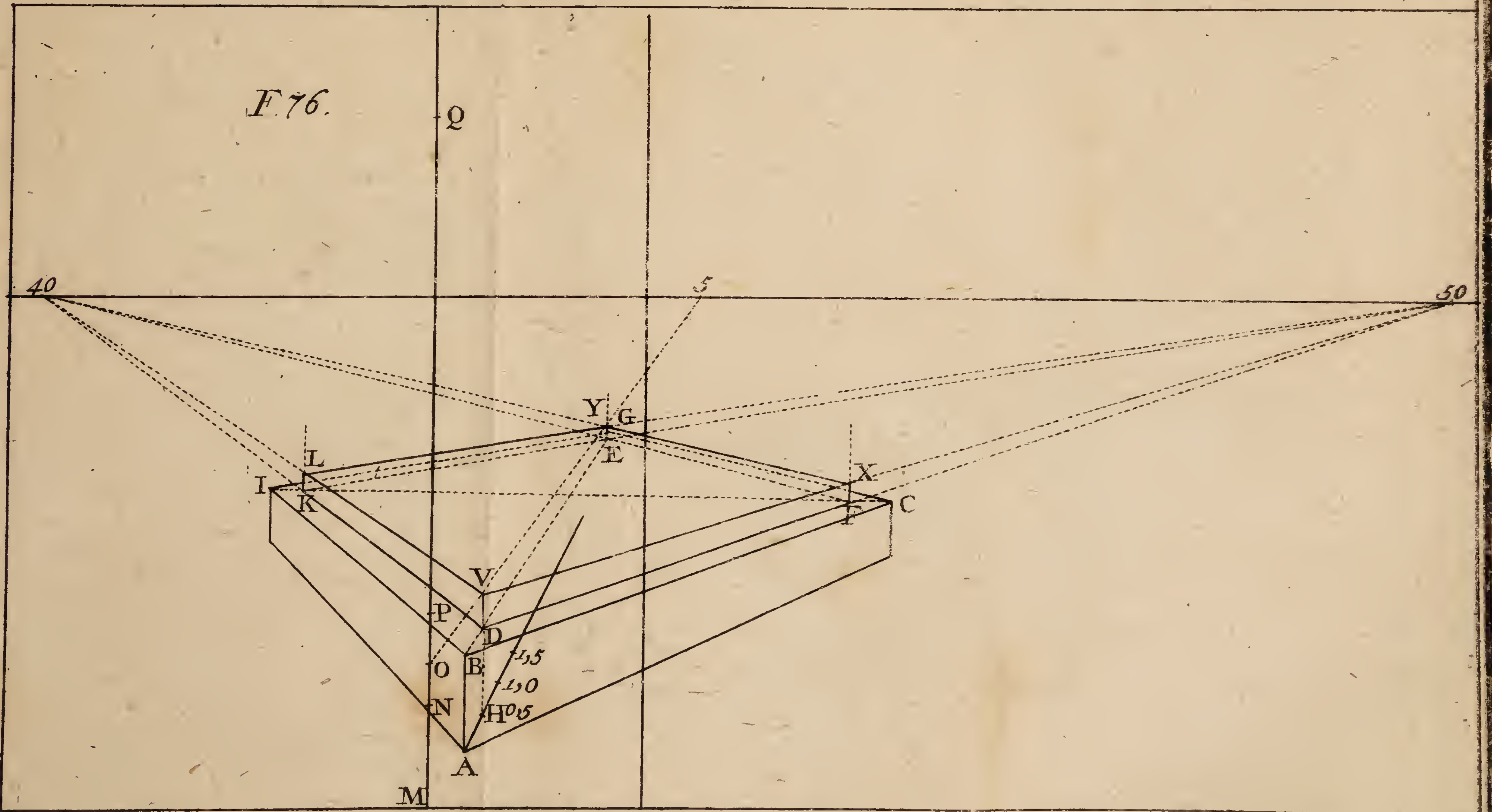
F. 73. Tab. VIII.


40
30
20
10
V
5
10
20
30
40
50
F
D
E
A
C
3
2
1
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8

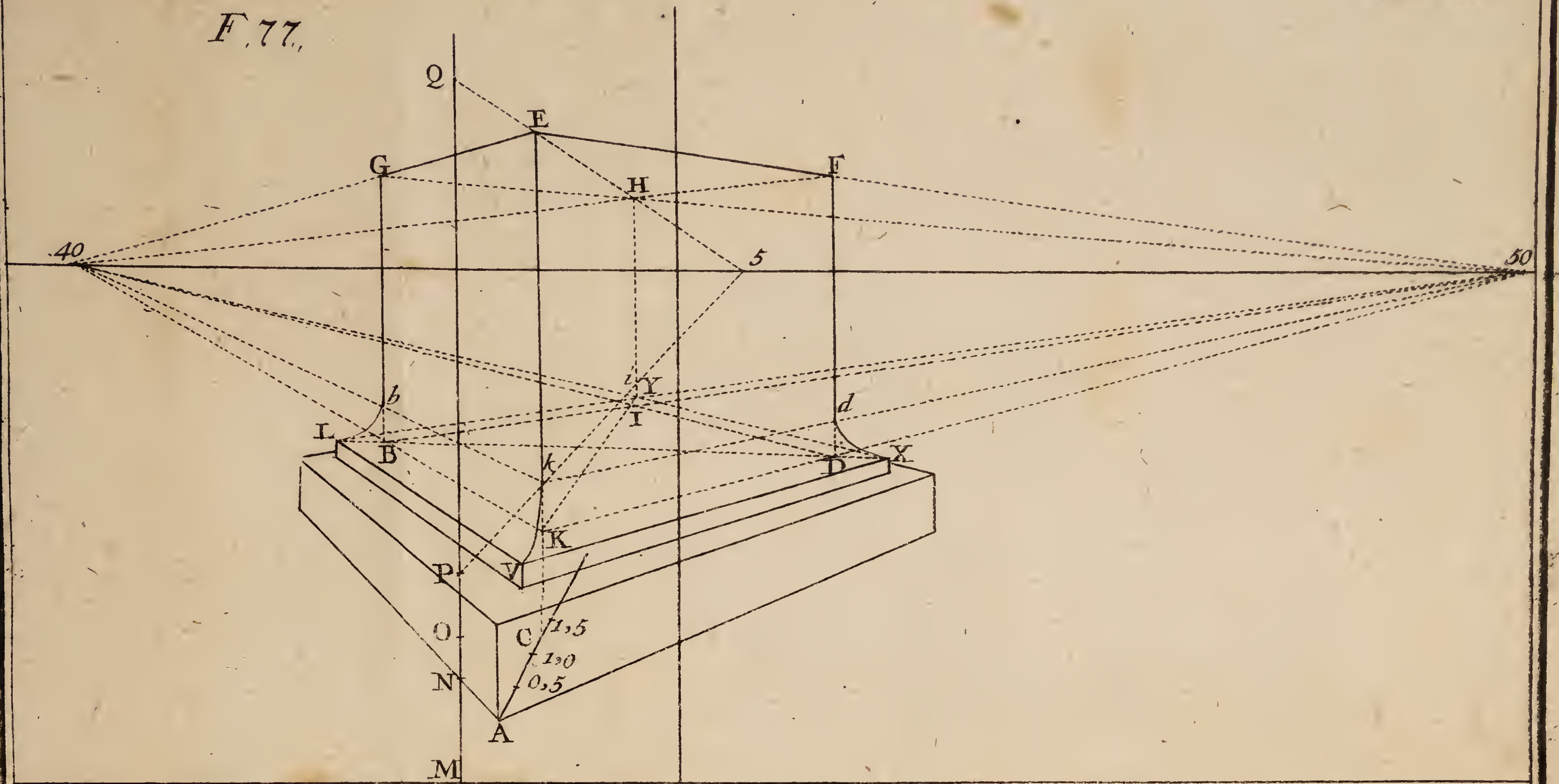

F. 74.
T
S
R
Q
40
V
5
F
D
E
P
L
1,5
O
K
1,0
N
H
0,5
l
k
h
A
M
1
2
3
4
5
6
C
7
8
G
9

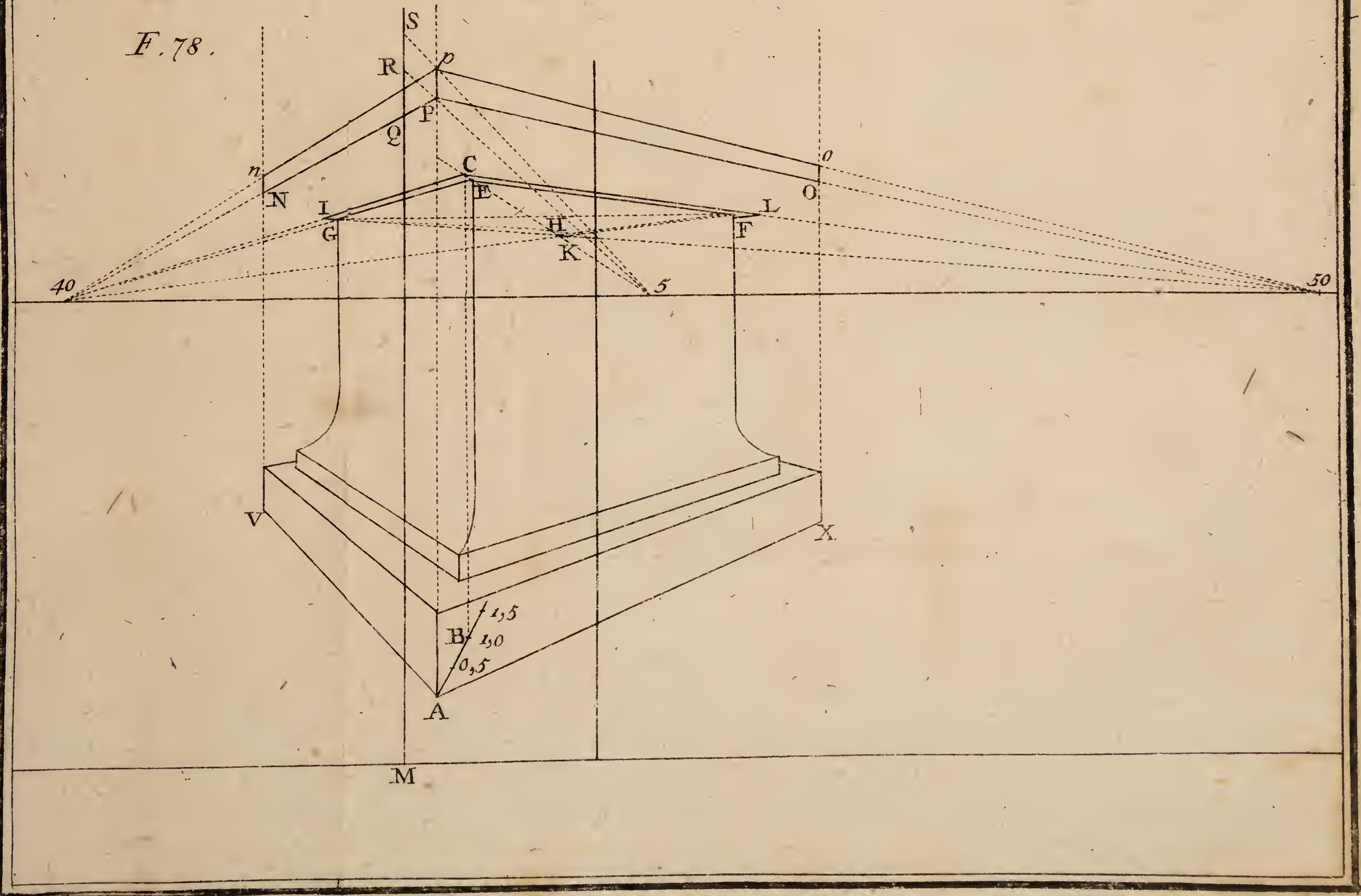
Tab. IX.


F. 75.
Q
40
V
5
50
G
I
F
D
C
E
P
O
B
1,5
1,0
0,5
N
A
M

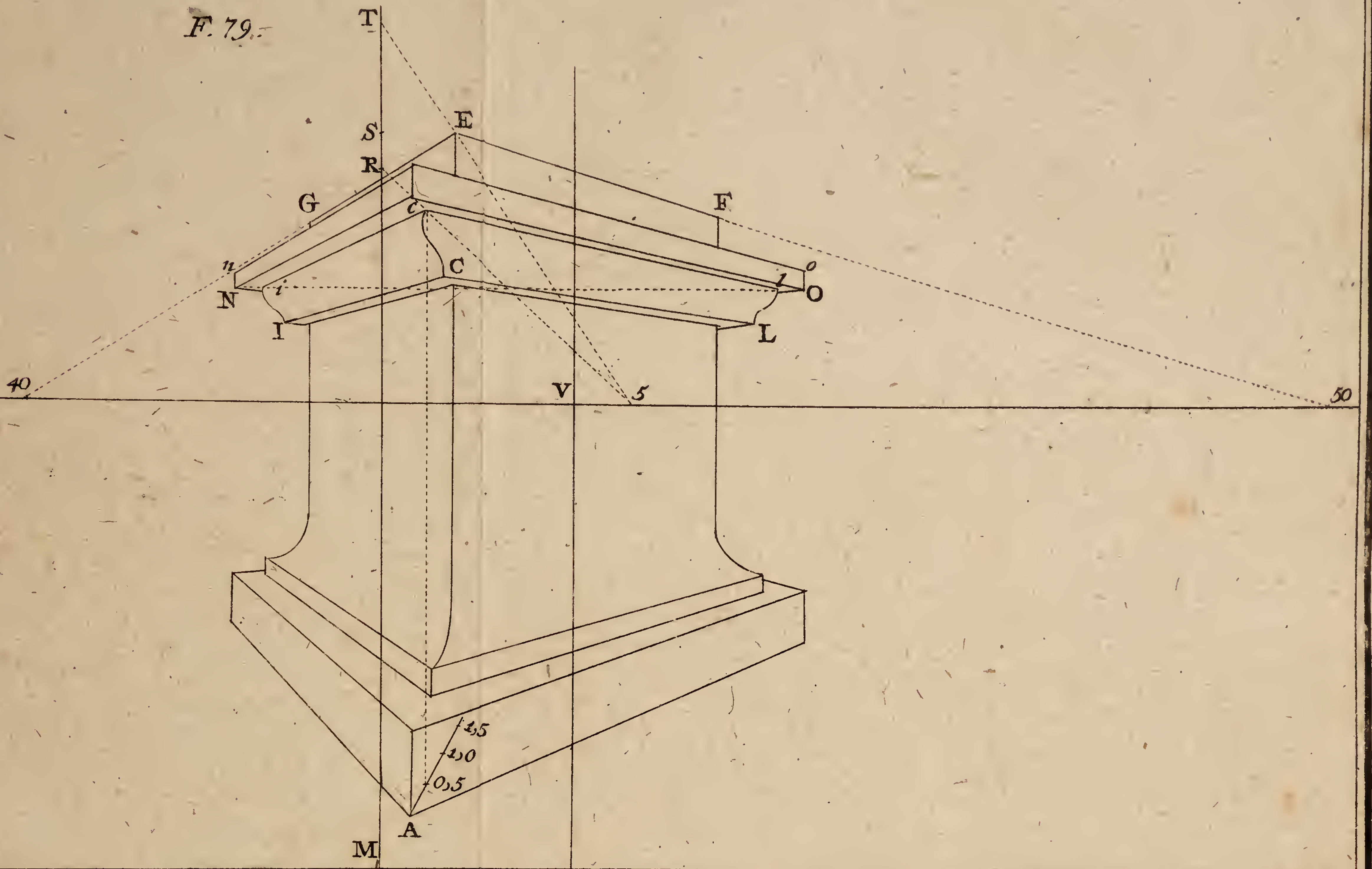

F. 76.
Q
40
5
50
Y
G
L
E
X
I
K
C
F
V
P
D
O
B
1,5
1,0
N
H
0,5
A
M

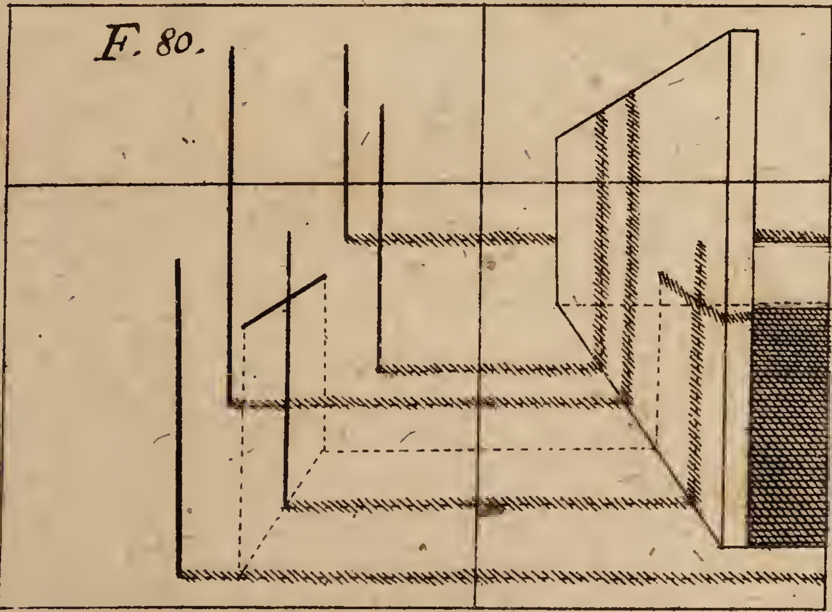
Tab. X.

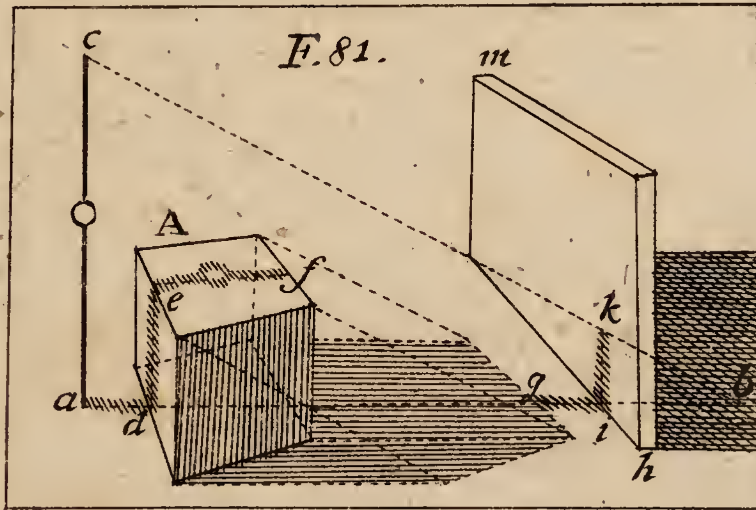

F. 77.
Q
E
G
F
H
40
5
50
Y
b
d
L
B
I
D
X
K
P
V
O
C
1,5
1,0
N
0,5
A
M

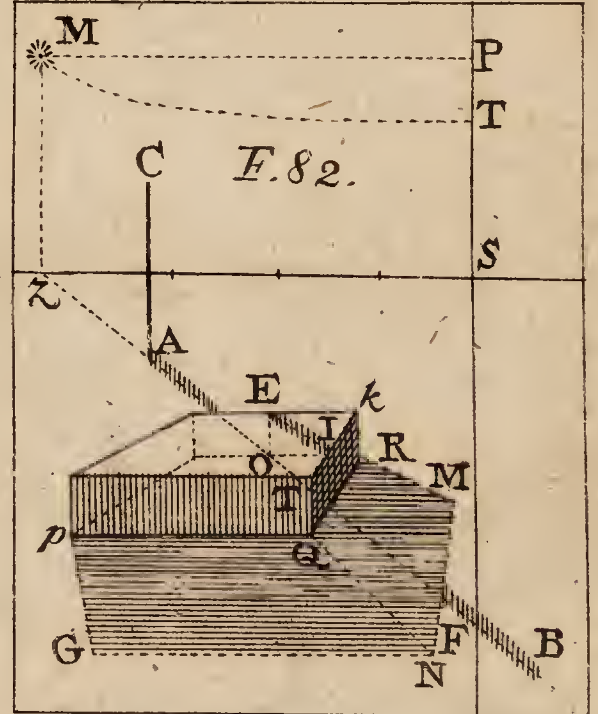

F. 78.
S
R
p
P
Q
o
n
C
N
I
E
L
O
G
H
F
K
40
5
50
V
X
1,5
B
1,0
0,5
A
M

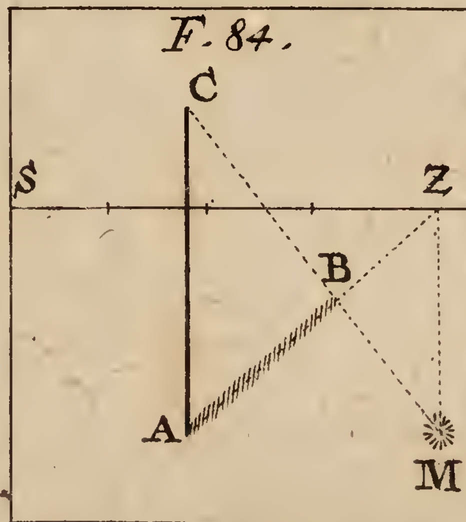
Tab. XI.

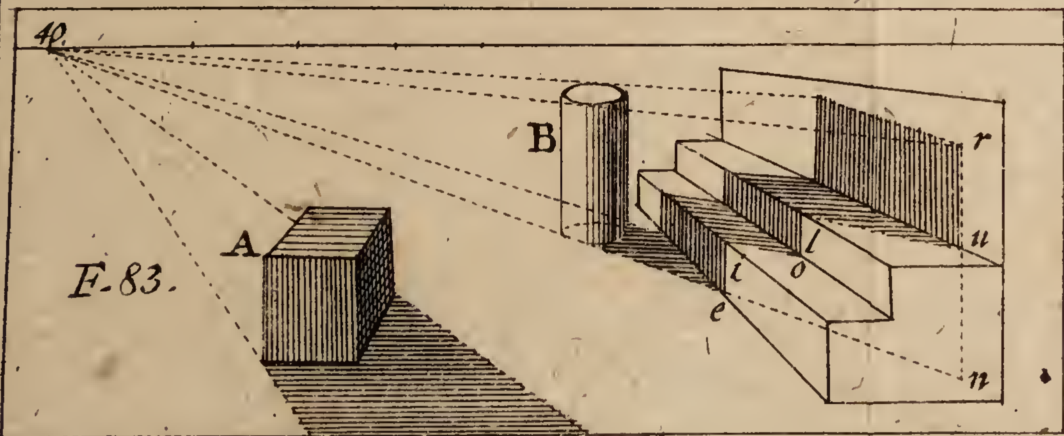

F. 79.
T
E
S
R
G
F
c
n
o
C
N
i
l
O
I
L
40
V
5
50
1,5
1,0
0,5
A
M


F. 80.

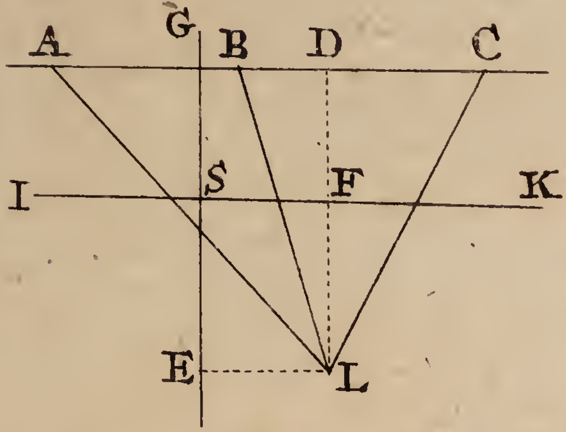

c
F. 81.
m
A
e
f
k
a
d
g
i
h

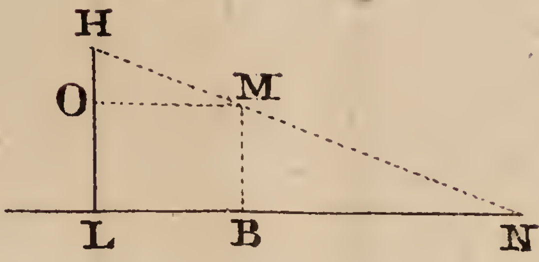

M
P
T
C
F. 82.
S
Z
A
E
k
R
M
p
G
F
N
B

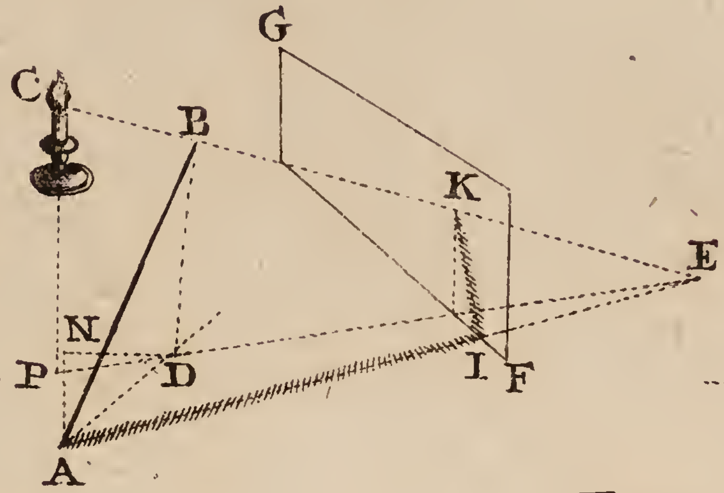

F. 84.
C
S
Z
B
A
M

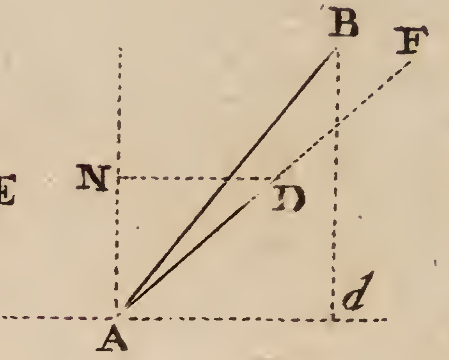

40
B
r
A
u
F. 83.
n

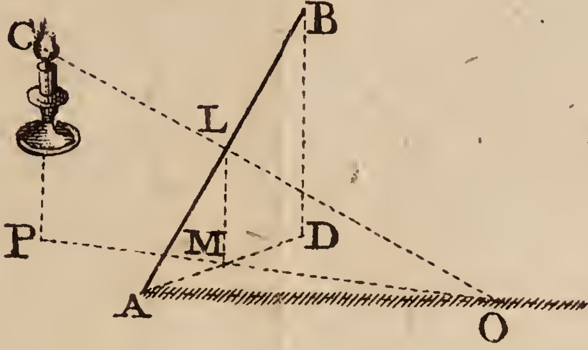
Tab. XII.

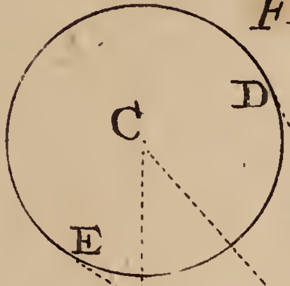

F. 85.
A G B D C
I S F K
E L

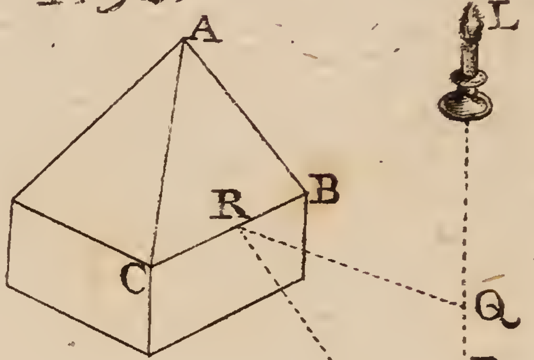

H
O M
L B N

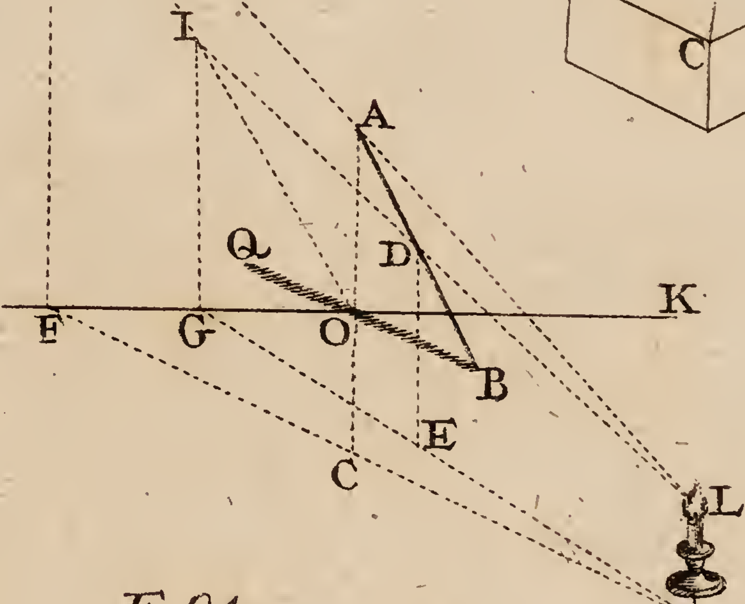

F. 87.
G
C B
K
E
N
P D
I F
A

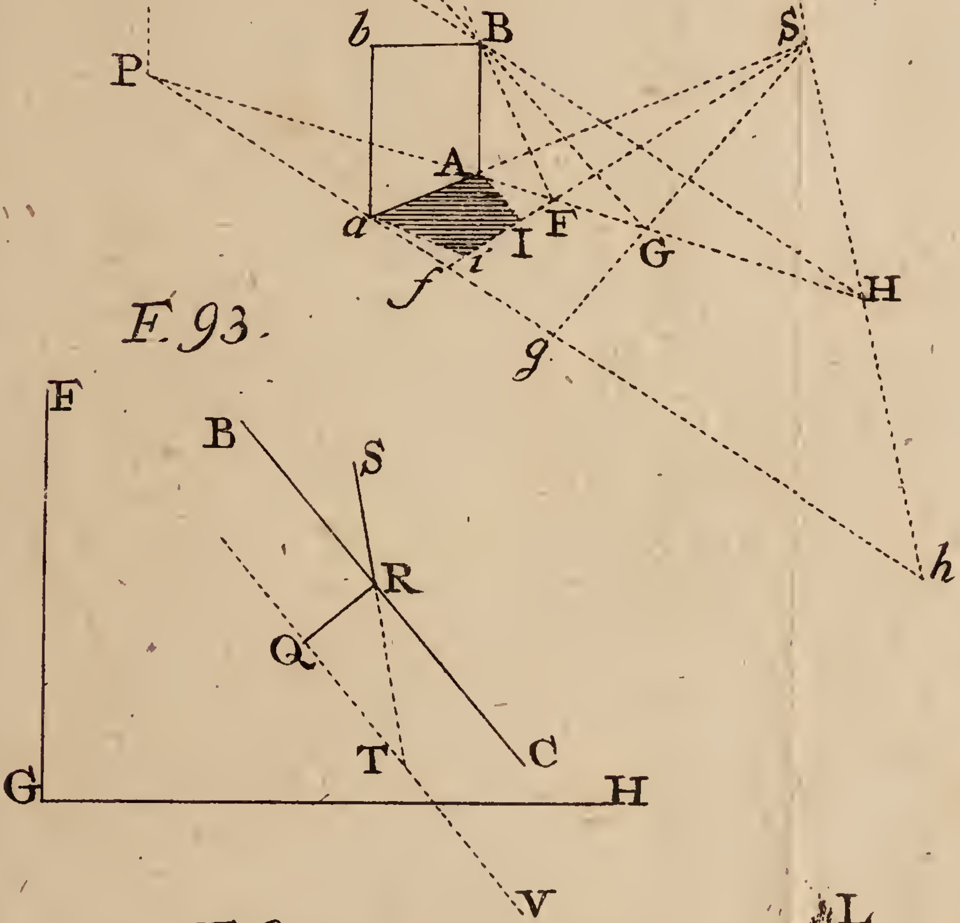

F. 88.
B F
N D
A d

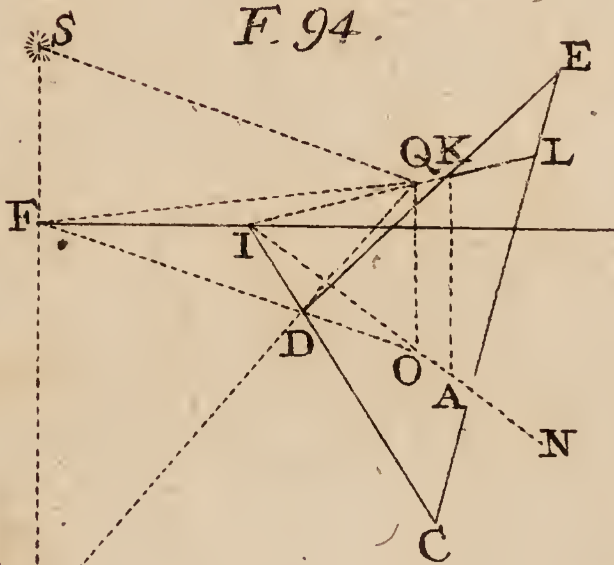

F. 90.
C B
L
P M D
A O

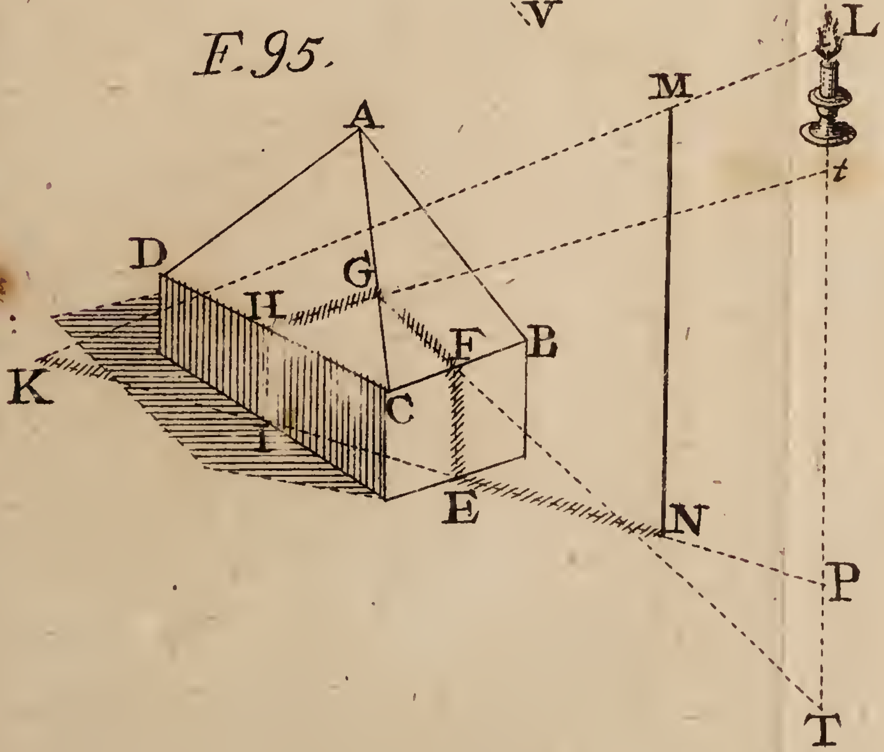

F. 89.
C D
E

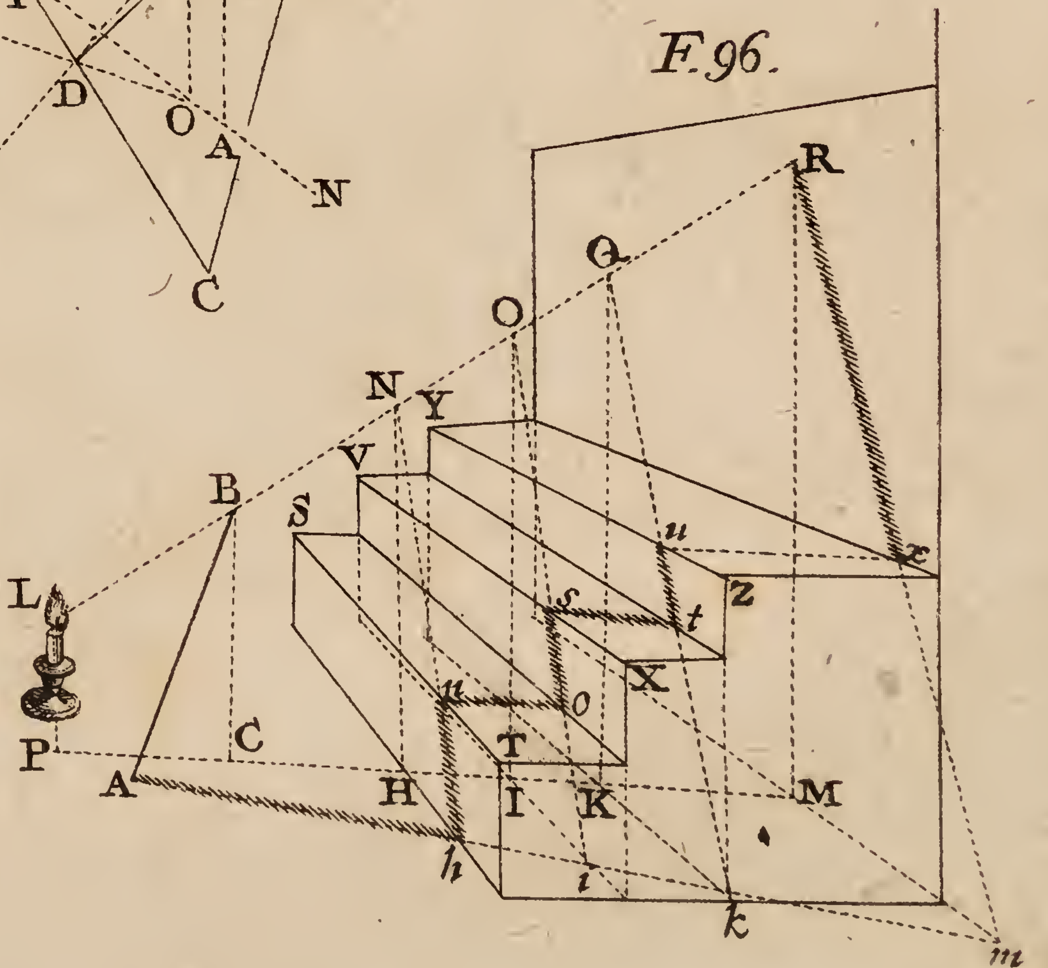

F. 92.
A L
R B
C Q
P
T


H
F. 91.
I
A
Q D
F G O K
B
E
C
L
P


b B
P
S
A
a F
f i I G H
g
h
F. 93.
F
B S
R
Q
T C
G H
V

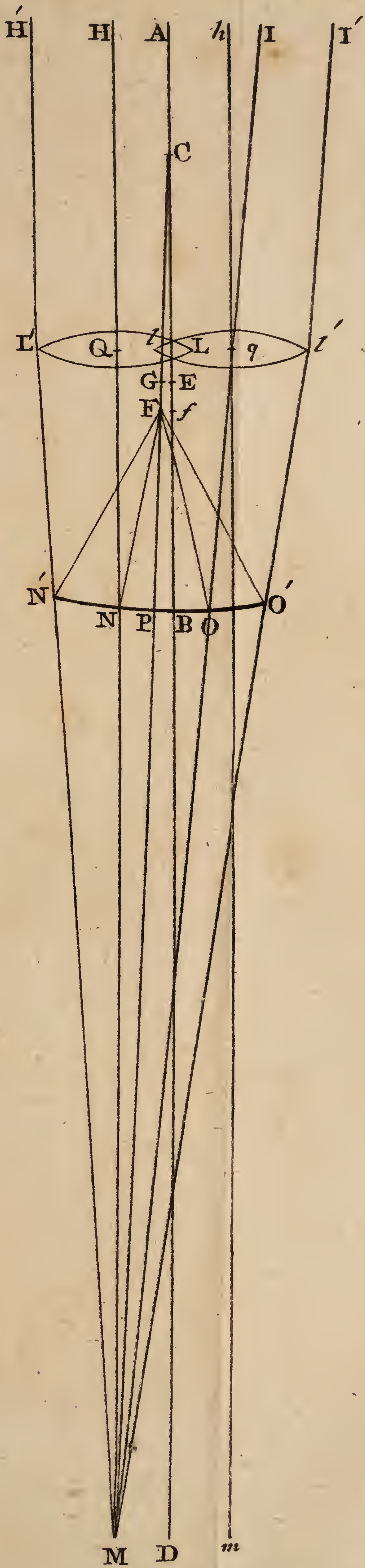

S F. 94.
E
Q K L
F
I
D
O A
N
C
T


F. 95.
A M L
D G t
H
B
K F
C
I
E N
P
T

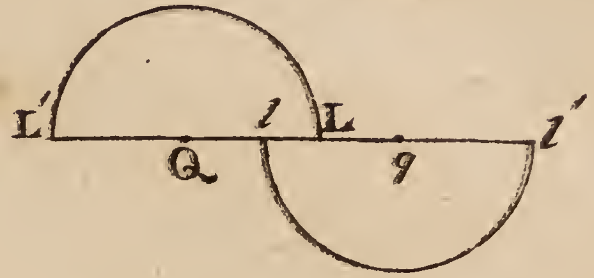

F. 96.
R
Q
O
N Y
V
B S
u
z
s t
L
X
n o
T
C
P
A H I K M
h i k
m

Tab. XIII.

F. 1.



F. 2.



CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

Academiæ Regiæ Scientiarum Parisinæ, Suecicæ, et Borussicæ,
nec non Instituti Bononiensis Membri, ac Professoris
Matheseos in Collegio Mazariniano Parisiis

LECTIONES ELEMENTARES
ASTRONOMIÆ
GEOMETRICÆ,
ET
PHYSICÆ,

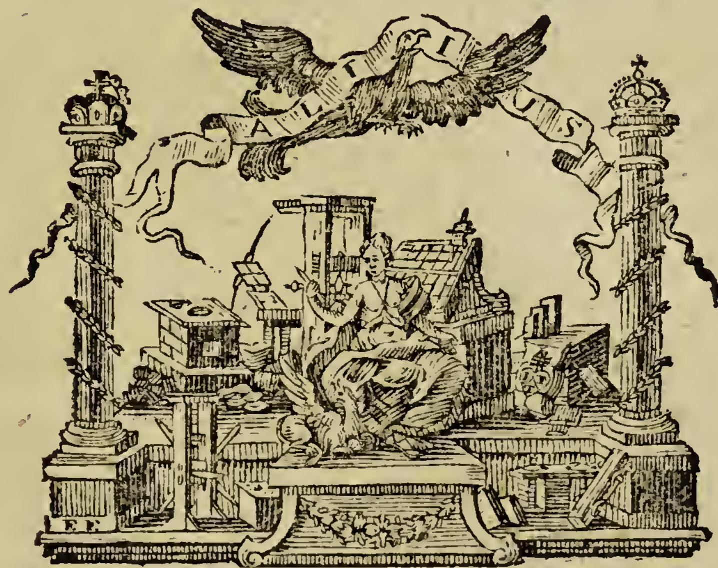
EX

EDITIONE PARISINA ANNI MDCCLV

IN LATINUM TRADUCTÆ

A

C. S. e S. J.



A. MDCCLVII.

VIENNÆ & PRAGÆ,

Typis et Sumtibus JOANNIS THOMÆ TRATTNER, Cæs. Reg.
Maiest. Aulæ Typographi et Bibliopolæ.

LECTORI BENEVOLO.



Paucis te volò, Lector benevole! Si quid cauſæ fuerit, cur e Gallico in Latinum Sermonem hunc librum traduxerim, roges, omnes eas a me tibi exponi credito, quæ Authorem, ut eum conſcriberet, impulerunt; nec illam quidem omiſeris omnino, quam de conſuetis ſuis in Collegio Mazariniano exercitationibus refert; locum ſolum muta, privatum ſubſtitue publico. Quod ad ſtylum, intelligi volui: qui æque omnes oderim libros, quos alieno loco aſſutæ elegantiæ obſcuriores reddunt, ut amem eos, qui cum candida ſimplicitate rem exponunt, Grammaticorum non verentur obeliſcos. At tandem cur in tanto etiam apud nos ſcientiarum nitore aliena offerimus? Fateor, vix a me impetrem, leporem venator ut alta in nive *ſectet*, & poſitum tangere *nolim. Denique, ad quæ Lectorem frequenter Author remittit, elementorum citationem, non omittendam putavi, tum quod fieri poſſit, ut alterius etiam opera Latinitate donata Tironi Aſtronomiæ Gallicæ linguæ ignaro uſui ſint, tum quod aliis, qui eo adminiculo non egent, nihil inde incommodi metuerim. Ceterum Algebræ, ac Geometriæ inſtitutiones tot, tamque variæ proſtant, ut qui ad Aſtronomiam accedunt, facile interea, quidquid ex Authoris elementis petere jubentur, aliunde ſupplere poſſint.*

EXTRAIT

DES REGISTRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DU 20 AOUT 1746.

Messieurs Bouguer & Maraldi qui avoient été nommés pour examiner les *Leçons d'Astronomie* de M. l'Abbé de la Caille, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression : en foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris ce 21 Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHI,

Secr. perp. de l'Ac. Royale des Sciences.



INDEX
ARTICULORUM COMMENTATIONIS ISAGOGICÆ IN TRIGONOMETRIAM SPHÆRICAM.

Pag.

ARTICULUS I. Definitiones & Notiones Trigonometriæ ſphæricæ - - 1
ARTICULUS II. De proprietatibus generalibus triangulorum ſphæricorum - 4
ARTICULUS III. Formulæ trigonometricæ - - - - - - - 7
ARTICULUS IV. Analogiæ pro calculo triangulorum rectangulorum ſphæricorum 11
ARTICULUS V. Theoria calculi triangulorum obliquangulorum - - - 17
ARTICULUS VI. Solutio omnium caſuum, qui in triangulis obliquangulis occurrere poſſunt - - - - - - - - - - 19
ARTICULUS VII. Diverſæ formulæ Trigonometriæ ſphæricæ - - - 23

INDEX
SECTIONUM, CAPITUM, ET ARTICULORUM LECTIONUM ELEMENTARIUM ASTRONOMIÆ.

SECTIO I, complectens partem primam Aſtronomiæ ſolaris - - - 31
CAPUT I. De ſtellis fixis - - - - - - 32
CAPUT II. De Planetis
ARTICULUS I. De diverſis planetarum motibus generatim, & eorum natura 35
ARTICULUS II. De legibus motus Planetarum Primariorum - - - 37
ARTICULUS III. De revolutione annua Planetarum - - - - 38
ARTICULUS IV. De via, quam ſequuntur Planetæ - - - - 38
ARTICULUS V. De cauſis inæqualitatis motuum planetarum - - - 40
ARTICULUS VI. De figura orbitæ planetarum - - - - - 44
ARTICULUS VII. De hypotheſi phyſica ad inveniendam curvam, quam Planeta deſcribit, & determinandam legem inæqualitatum in diverſis orbitæ locis 44
ARTICULUS VIII. Principia Mechanicæ, quibus tota Aſtronomia Phyſica innititur 45
ARTICULUS IX. De proprietatibus motus compoſiti ex vi inſita, ſeu æquabiliter agente, & centrali - - - - - - - 54
ARTICULUS X. De curvis, ad quas planetarum Trajectoriæ revocandæ 65
ARTICULUS XI. De ratione diſtribuendi inæqualitates planetarum in diverſis orbitæ locis - - - - - - 69
ARTICULUS XII. Varia problemata de motu planetarum in orbitis ellipticis 73
ARTICULUS XIII De lege in genere, ſecundum quam vis centralis agit in planetas in trajectoriis conicis motos; & peculiariter de iis, quæ orbitis ellipticis ſunt propria - - - - 79
CAPUT III. De legibus motus Cometarum.
ARTICULUS I. De phænomenis motus cometarum e ſole ſpectatorum generatim, & de hypotheſi phyſica, quæ eidem explicando ſerviat - 86



Pag.

ARTICULUS II. De legibus peculiaribus corporum in trajectoria parabolica motorum, quæ simul exemplo illustrantur - - - - - 89
ARTICULUS III. De ratione distribuendi inæqualitates cometarum in diversis orbitarum parabolicarum locis - - - 93
SECTIO II. Complectens partem primam Astronomiæ Terrestris - 100
CAPUT I. De illusionibus opticis a revolutione diurna telluris circa axem suum pendentibus
ARTICULUS I. De revolutione diurna planetarum in genere, deque ejus causa 103
ARTICULUS II. De phænomenis generalibus a motu diurno telluris pendentibus 105
ARTICULUS III. De motu apparente solis e duplici motu vero telluris proveniente - - - - - - 107
ARTICULUS IV. De phænomenis particularibus, quorum causa est motus diurnus telluris - - - - - - 110
ARTICULUS V. De ratione observandi, & calculandi accuratius phænomena motus diurni astrorum, prout is ad circulos cuivis telluris loco proprios refertur - - - - - - 116
ARTICULUS VI. De ratione determinandi positionem syderum respectu circulorum fixorum sphæræ cælestis - - - 119
ARTICULUS VII. De obliquitate eclipticæ, & quomodo puncta illius ad æquatorem referantur - - - - 122
ARTICULUS VIII. De mensura temporis - - - 123
ARTICULUS IX. De ascensione recta, & declinatione syderum - 128
ARTICULUS X. De præcipuis usibus ascensionis rectæ, & declinationis syderum 130
CAPUT II. De Illusionibus opticis in phænomenis Astrorum, quarum causa est motus telluris annuus - - - - - 133
ARTICULUS I. Theoria motuum apparentium & relativorum; ac de eorum projectione orthographica - - - - - 133
ARTICULUS II. Applicatio Theoriæ præcedentis ad phænomena pendentia a motu telluris annuo - - - - 143
ARTICULUS III. De motu apparente stellarum fixarum, quem efficit motus telluris annuus - - - - - - 144
ARTICULUS IV. De motibus relativis planetarum, quorum causa est motus telluris annuus - - - - - 150
CAPUT III. De illusionibus opticis in phænomenis motus diurni, quarum causa est situs observatoris in superficie telluris - - 153
CAPUT IV. De illusionibus opticis, quæ pendent a refractione radiorum luminis in transmissu per Atmosphæram telluris - - 161
SECTIO III. Complectens partem alteram astronomiæ terrestris; regulas calculi motuum planetarum & cometarum a revolutione diurna telluris non pendentium; & diversas methodos stabiliendi Theoriam ex observationibus in superficie telluris institutis
CAPUT I. De theoria planetarum, prout e terra videntur - - - 164
ARTICULUS I. De motibus planetarum ad planum eclipticæ relatis, tam solis, quam telluris respectu - - - - 164
ARTICULUS II. Expositio generica totius ordinis calculi necessarii ad inveniendam longitudinem & latitudinem planetæ e sole & terra visam pro tempore dato - - - - - - 167
ARTICULUS III. Enumerantur elementa necessaria ad stabiliendam theoriam planetarum e sole & terra visorum, & simul exponitur methodus hac in materia observanda - - - - - 169

ARTI-



Pag.

ARTICULUS IV. De melioribus methodis stabiliendi elementa theoriæ solis, cum exemplis applicatis ad observationes, quæ ad determinationem horum elementorum sunt institutæ - - - - 171
ARTICULUS V. Mothodus reducendi omnes observationes planetarum in superficie telluris institutas ad eas, quæ eodem tempore fierent, si observator in sole collocaretur - - - - 177
ARTICULUS VI. Diversæ methodi inveniendi elementa theoriæ planetarum ex observationibus in terra institutis - - - 178
AETICULUS VII. De lumine & figura planetarum - - 181
CAPUT II. Theoria cometarum e terra visorum - - 184
ARTICULUS I. De calculo motus cometarum e terra spectati - 185
ARTICULUS II. Methodus determinandi omnia elementa theoriæ alicujus cometæ ex observationibus in terra institutis - - 187
ARTICULUS III. De calculo cometarum in orbitis eclipticis - 199
SECTIO IV. Complectens partem alteram Astronomiæ solaris sive explicationem legum motus diurni planetarum, ut e sole spectantur - 200
ARTICULUS I. De phænomenis generalibus motus diurni - 201
ARTICULUS II. De iis, quæ ex allatis phænomenis immediate consequuntur: de diebus ac noctibus, eorumque diversa longitudine: de vicissitudine tempestatum anni: de solstitiis & æquinoctiis - - 204
ARTICULUS III. De causa generali horum phænomenorum - 205
ARTICULUS IV. De obliquitate eclipticæ: de diverso situ polorum æquatoris respectu solis: de declinatione & ascensione recta solis - 207
ARTICULUS V. De temporibus rotationis planetarum circa suos axes; de tempore vero & medio - - - - - 210
ARTICULUS VI. De differentia meridianorum; de longitudinibus, & latitudinibus Geographicis; de methodo Geographorum - - 212
ARTICULUS VII. De altitudinibus solis, & earum variationibus - 214
ARTICULUS VIII. Phænomena exposita Geometrice & Trigonometrice determinantur - - - - - 216
ARTICULUS IX. Quædam observanda circa theoriam præcedentem; & de præcessione æquinoctiorum - - - - 219
SECTIO V. Complectens partem tertiam Astronomiæ solaris, sive explicationem motuum planetarum secundariorum e sole visorum - 220
SECTIO VI. Continens partem tertiam astronomiæ terrestris, sive explicationem theoriæ lunæ e terra visæ; & hinc ducta analogia, aliorum satellitum, ut e suis primariis spectantur
CAPUT I. Theoria motuum lunæ - - - - - 231
ARTICULUS I. De phasibus lunæ - - - - 232
ARTICULUS II. Enumerantur præcipua elementa theoriæ motuum lunæ ex observationibus astronomicis deducta - - - 234
ARTICULUS III. De natura vis centralis lunæ respectu terræ; & ducta hinc analogia, de natura vis centralis planetarum respectu solis - 235
ARTICULUS IV. De causis physicis, quæ diversas inæqualitates lunæ in revolutione synodica efficiunt - - - - 237
ARTICULUS V. De combinatione causarum physicarum, quæ regularem motum lunæ perturbant - - - - 240
ARTICULUS VI. Exponuntur effectus, qui ex viribus tribus allatis, ac inter se compositis oriuntur - - - - 241

ARTI-



Pag.

ARTICULUS VII. De libratione lunæ - - - 248

ARTICULUS VIII. De inæqualitatibus motus telluris e gravitate lunæ provenientibus - - - - - 249

ARTICULUS IX. Explicatio & calculus inæqualitatum apparentium in motu astrorum, quæ ab inæquali præcessione æquinoctiorum pendent: cum methodo calculandi omnes motus apparentes fixarum, comprehensa etiam earum aberratione - - - - 252

CAPUT II. De calculo eclipsium satellitum e superficie planetæ primarii visarum

ARTICULUS I. De determinatione phasium eclipsium lunæ & solis - 258

ARTICULUS II. De usu observationum eclipsium solis & lunæ - 269

ARTICULUS III. Determinatio graphica occultationum stellarum per lunam - 273

ARTICULUS IV. Methodus construendi schema universale phasium eclipseos solaris - - - - - - 274

CONCLUSIO. Animadversiones in systema Physicum Astronomiæ - 278



MONI-

MONITUM AUTHORIS.



irabilis syderum ordo, stupenda motuum varietas, stellarum fixarum splendor, innumerabilis copia, qua cælum omne collucet, in immensum porrecta spatia, cometarum aspectus, ac phænomena prorsus singularia; paucis, quidquid cælum omni momento nostris offert oculis, nunquam non hominum sciendi avidam mentem tenuit. Verum hæc singula prodigia, quæ etiam animum maxime hebetem percellunt, & quorum notitia vel iis momenti permagni videtur, qui ea carent, eo admirabiliora evadunt, quo in ea penetratur profundius, quo motrices horum corporum causæ evolvuntur magis, quo accuratioribus calculis motus tam varii subjiciuntur, combinatis inter se tot virium effectis, jam conspirantium, jam secum ipsis confligentium; quæ nihilominus duabus modo teneantur legibus adeo simplicibus, ut nemo unquam alias, si quid conjectura assequimur, quæ tot efficiendis rebus aptæ sint, æque planas excogitarit.

Verum spectaculum tam illustre, tam digna capacissimarum etiam mentium occupatio, oblectandis modo animis facta consebuntur, si nos non perpetuo incitent, ut conditoris Dei magnitudinem, ac sapientiam admiremur, ut eum celebremus laudibus, ut nostram gratitudinem testatam faciamus; si non sit, quod in humanæ societatis bonum inde derivemus. At enim Astronomia certe arbitra est civilium temporum, fulcrum Historiæ, Chronologiæ & Geographiæ anima, dux unica navigantium.

Mirum est, quantum Astronomiæ limites superioribus duobus sæculis sint prolati, præcipue tuborum opticorum, & horologiorum pendulis instructorum inventis, & quod Europæ Principes peculiari eam favore complecterentur. Nemo sane erit, qui negare ausit, eminuisse ea in re Reges nostros, nec fuisse quidquam, in quo horum vota eruditi Galliæ viri sint frustrati. Et quamvis Galliæ terrarum orbis magnum illud ingenium non debeat, quod legibus cælestium motuum methodo tam sublimi evidentiam conciliavit, attamen illud in acceptis referet, quod observationes eas suppeditarit, sine quibus leges illæ, quas divinando assecutus Keplerus omnis Theoriæ suæ fundamentum constituit, fortassis inter erudita adhuc haberentur commenta; aut earum cum cælestibus phænomenis consensus felici tribueretur in conjectando audaciæ, quam falsi quivis damnaturus sit, quem cælum spectandum fors præbebit, non visus antea planeta.

Postquam receptis Newtoni calculis usus ille exolevit, quo inter omnes superiorum temporum Astronomos convenerat, ut hypothesis quævis, quæ phænomena salva præstaret, admitteretur; postquam hac theoria duce eo pervenimus, ut inæqualis astrorum motus sola virium in corpora cælestia agentium analysi exponatur, servata illa lege duplici, quam diximus; postquam denique a triginta fere annis in observationibus faciendis quam accuratissime peculiaris adhibetur industria, Astronomia ad novum Indies perfectionis gradum provehitur. Complures magni nominis Geometræ huc suam contulerunt operam, delectu feliciore, & ampliore commodo, quam non pauci, qui post Newtonum in re eadem sunt versati; etenim Problematum solutionibus universalibus relictis, Theoriam cum observationibus accuratissimis comparantes novas condiderunt regulas, quibus pars Astronomiæ practica, quæ calculis occupatur, non parum

auctior ditiorque est reddita. Verum illud etiam plerumque evenit, ut quo inventa ejusmodi subtilius excogitata sunt, eo plus difficultatis in usu objiciant, nisi jam antea cælestium motuum rationes, calculorum methodi, principia denique Physica, quibus Theoria hæc nova innititur, velut in numerato habeantur.

Quare Lectiones, *quas liber hic offert, lectioni eruditorum id genus voluminum, varias Astronomiæ partes pertractantium, quæ magno jam numero in lucem emissa sunt, viam sternent. Mihi vero ad eas conscribendas causæ fuit, tum ut consuetis in Collegio Mazariniano exercitationibus præberent materiam, tum quod nulla apud nos alia extarent elementa, quæ Geometricam Astronomiæ partem cum Physica ordine debito conjungerent. Illud autem in iis conatus sum, ut quæ & recens & vetus Astronomia scitu digna suppeditat, complecterentur omnia: tum etiam ut eam tenerem methodum, qua apud lectorem & inquirendi nova desiderium, & altius penetrandi cupiditatem, & ad calculos revocandi singula, ac per se se experiundi amorem accenderem.*

At enim, cum, ut explicarentur, lectiones hæ conscriptæ sint, facere non debui, ut per singula discurrerem longius: quin in tanta rerum pertractandarum copia, demonstrationes in arctum contrahendæ fuerunt; quamvis curæ mihi maxime fuit, ut ne quid perspecuitati officerem, dum velut necessitate quadam & rebus per se abstractis, & scribendi generi adeo conciso tenebras offundi nonnullas compertum haberem; quas ut discuterem, præcipuis tum observationum, cum etiam calculorum methodis exempla adhibui; demonstrationes, peculiaria theoremata, observationes illustrationi destinatas, minore exhibenda charactere curavi, tum ne cœptæ jam ratiocinationes interrumperentur, tum ne lector alibi quærere cogeretur, quæ ab Astronomia aliena quidem, usus tamen sunt non modici. Et quoniam mihi propositum erat tam modernorum, quam antiquorum inventa, ac methodos praxi Astronomicæ commodiores hoc libro exhibere, facile quisque intelliget, nihil eum complexurum aliud, quam quod e celebriorum Geometrarum, & Astronomorum scriptis desumpsi, adeo ut præter ordinem, rerumque delectum nihil a me quispiam expectet. Nec tamen compilatoris notam ab iis vereor, qui, quid libri Astronomici adhuc procusi contineant, norunt. Si expositionem physicam motuum lunæ demas, cujus fundamenta Gravesandii sunt, cetera omnia ita accommodavi, ut ab iis, qui elementa mathematica a me tradi solita perceperunt, facile comprehendi possint. Atque hæc, ut ea, quam dixi, ratione præstarem, & rei Astronomicæ notitia, & habitudo, quam viginti annorum tractatione continua acquisiveram, suadebant.

Inter methodos varias hoc libro occurrentes plures sunt, quæ positioni falsi *innituntur; id quod facit, ut indirectæ sint, eaque careant elegantiæ specie, quæ tantopere arridet Geometris. Sed quoniam & minus implicatæ, & intellectu faciliores, & usus expeditoris sunt, non exigua Astronomiæ commoda præstant; quin cum via non minus tuta, & breviore ad eadem nos deducant, methodis directis præferri debent, quæ sæpe ad pompam potius, si dicere fas est, & elegantiam excogitatæ videntur, hoc est, quarum theoria pulcherrima, usus haud æque securus, quod eam in observationibus exigant accurationem, quam frustra expectes.*

Quod ad citationes, quas frequentes parentheseos notis inclusas liber exhibet, eæ, si solis numeris fiant, harum ipsarum lectionum Astronomiæ paragraphos notant; quod si vocem Elem. *præfixam habent, ad elementa Algebræ & Geometriæ, An. 1747 edita lectorem remittunt, quæ singulis annis prælego.*

COM-



COMMENTATIO ISAGOGICA IN TRIGONOMETRIAM SPHÆRICAM.

ARTICULUS I.

Definitiones & Notiones Trigonometriæ sphæricæ.

I.



rigonometria Sphærica eſt ſcientia calculandi triangula, quæ in ſuperficie globi ex tribus arcubus circulorum maximorum fiunt.

Itaque circuli minores calculum trigonometricum non ingrediuntur, tum quod non ejusdem ſint magnitudinis, uti circuli maximi, ſed radiis diverſis deſcribantur; cum etiam quod eorum plana non eundem ſemper axem ſecent, nec aliud commune omnibus ſit punctum, quemadmodum omnes circuli maximi per ſphæræ centrum neceſſario tranſeunt.

2. Si concipiatur diameter per centrum ſphæræ ad planum circuli maximi perpendicularis, ea *axis* circuli; extrema vero illius puncta, ejusdem *poli* dicuntur.

3. Hinc ſequitur 1mo, *inter polum & quodvis circuli maximi peripheriæ punctum ſemper arcum 90° intercipi*, *menſura hac in ſuperficie ſphæræ accepta.*

 4. 2do

4. *2do: data in sphæra circumferentia circuli maximi, inveniri polos illius:* nempe ope circini cruribus arcuatis instructi, qui propterea circinus sphæricus dicitur: cruribus enim ad quartam peripheriæ partem diductis, alterum in quovis circuli puncto figitur, altero arcus utrinque in sphæræ superficie describitur. Tum eadem manente apertura, rursus in alio ejusdem circuli puncto fixo crure altero, priores arcus intersecantur. Quatuor horum arcuum duplex intersectio utrumque determinat polum 90° a peripheria circuli maximi dati distantem.

Et vicissim: *dato polo circuli maximi, is describitur* ope ejusdem circini ad quadrantem peripheriæ aperti, ut scilicet ejus crura 90° gradus sphæræ, seu alterius circuli in plano descripti, sed ejusdem cum sphæra diametri, intercipiant: crure enim uno in polo dato, tanquam centro, fixo, alterum circumductum in superficie globi petitum circulum maximum describit.

5. *3tio idem esse, sive e polo circino sphærico circulus maximus, aut quivis ejus arcus describatur, sive circini alius cruribus rectis præditi crus alterum in centro sphæræ figatur, altero autem ad distantiam radii aperto in superficie ejusdem descriptio fiat.* Et generatim: *ut circulus aut ejus arcus quilibet in sphæræ superficie describatur, circini crus alterum in quovis axis illius puncto* A *tanquam centro positum esse potest.* Tum enim circulus talis velut basis coni recti consideratur, apicem in puncto A habentis, qui proinde a circuli illius peripheria undique æqualiter distat.

6. *4to. Quemvis circulum maximum sphæræ habere polos sibi proprios*, ut adeo *idem punctum plurium circulorum maximorum polus esse nequeat.*

7. THEOREMA I. *Duo quivis circuli maximi in superficie Sphæræ descripti se mutuo bifariam secant.*

Etenim cum utriusque circuli planum per centrum sphæræ transeat, communis planorum intersectio sit recta oportet, quæ itidem per centrum tansit, & utrinque in utriusque peripheria terminatur; atqui talis recta est diameter utrique circulo communis; & omnis diameter secat circulum bifariam, igitur &c.

8. Hinc infertur: *a duobus arcubus circulorum maximorum, qui minores sint* 180. *gradibus, in superficie sphæræ spatium comprehendi non posse.* Quippe si se intersecent ad aliquem angulum, ab una usque ad alteram intersectionem semicircumferentia intercipi debet: at enim per hypothesin arcus sunt minores dimidia peripheria, igitur spatium in superficie sphæræ claudere non possunt.

9. Definitio. *Mensura anguli sphærici eadem est, ac inclinationis planorum utriusque circuli maximi, qui intersectione sua eum angulum efficiunt.*

10. Unde sequitur 1mo, *arcum* F E *circuli maximi, e vertice* B *anguli cujusvis sphærici* E B F (fig. 1.) *tanquam polo, descriptum esse mensu-*

ram ejus anguli. Et universim: *arcum quemvis* fe, *e vertice* B *descriptum, & inter crura* BF, BE *anguli cujusvis sphærici* FBE *interceptum, esse mensuram illius anguli.* Sint enim AEBCA, & AFBCA, plana duorum semicirculorum, qui interfectione sua angulum sphæricum FBE efficiunt: evidens est *1mo* (Elem 630.) radiis EC, & FC in utroque plano ad communem interfectionem AB normalibus ductis, angulum FCE esse æqualem inclinationi planorum, quam arcus FE centro C descriptus mensurat: sed idem arcus (5) e polo B describitur: ergo & arcus circuli maximi polo B descriptus mensurat angulum sphæricum FBE. *2do* evidens quoque est, quod si *ce*, *cf* in utroque plano ad communem interfectionem AB perpendiculares in quolibet puncto *c* ducantur, eæ futuræ sint ambæ in plano ad AB perpendiculari, adeoque in plano circuli parallelo ad circulum maximum Polo B descriptum: Hinc AB est communis horum duorum circulorum axis, & angulus *ecf* æqualis angulo ECF, ejusque mensura *fe* (arcus centro *c* descriptus) itidem æqualis inclinationi planorum AEBCA, & AFBCA (Elem. 630.). Atqui idem arcus *fe* e puncto B in axe AB accepto describitur (5): quare quilibet arcus *fe* e vertice B anguli sphærici descriptus, & inter ejus crura FB, EB interceptus, est mensura ejusdem anguli.

11. Sequitur *2do*: *si prolongentur arcus angulum sphæricum* FBE *comprehendentes, donec rursus se interfecent in* A, *angulum* FAE *fore æqualem angulo* FBE *partesque productas esse eorum arcuum complementa.* Etenim cum arcus sese denuo interfecare nequeant, nisi in distantia 180°; uterque arcus BFA, BEA erit 180°. Et quoniam B polus est arcus FE, mensuræ anguli FBE; arcus hic a punctis A & B 90° utrinque distat: igitur A alter polus est arcus FE, qui (arcus) est adeo communis angulorum FBE, FAE mensura.

12. sequitur *3tio*: *punctum ab interfectione duorum circulorum* 90 *gradibus remotum esse punctum maximæ distantiæ eorum circulorum; & reciproce punctum maximæ distantiæ* 90 *gradibus ab interfectione esse remotum.*

13. Sequitur *4to*: *Angulos sphæricos duorum arcuum se interfecantium ad verticem oppositos, esse inter se æquales.* Quippe eadem est utrinque duorum planorum se interfecantium inclinatio.

14. Sequitur *5to*: *si arcus alteri arcui insistat, effici duos angulos, quorum alter alterius complementum est.*

Sequitur *6to*: quodvis triangulum sphæricum ABC (fig. 8.) considerari posse tanquam basin pyramidis e sphæra sectæ ABCD, cujus vertex sit in centro sphæræ, & plana sint sectores circulorum maximorum radiis DA, DB, DC, & arcubus AB, BC, CA comprehensi. Atque sic apparet, in triangulo sphærico quemvis angulum esse æqualem inclinationi planorum horum; & quod-

vis latus esse æquale angulo sectoris, quem latus illud terminat.

15. THEOREMA 2. *Arcus circuli maximi inter polos duorum circulorum maximorum interceptus, est æqualis arcui, qui mensurat inclinationem eorum circulorum, sive angulum sphæricum, quem intersectione sua efficiunt.*

Quoniam enim axis cujusvis circuli maximi ad planum sui circuli perpendicularis est, & per centrum sphæræ transit; plana duorum circulorum coincidere nequeunt, quin hoc ipso etiam axes coincidant; nec alterum ad alterum inclinari potest, nisi tantundem eorum axes inclinentur: igitur angulus ab axium inclinatione factus æqualis est angulo inclinationis planorum. Sed Angulum axium metitur arcus circuli maximi in superficie sphæræ inter eorum extrema interceptus, hoc est inter polos circulorum; ergo arcus inter polos duorum circulorum maximorum interceptus metitur angulum sphæricum ab iisdem circulis factum.

16. Corollarium 1. *Si angulus sphæricus sit rectus, arcus qui cum altero hunc angulum comprehendit, per alterius cruris polum transit; & vicissim.*

Nam si (fig. 1.) angulus FBE sit rectus, est arcus FE 90 graduum: itaque punctum E ab arcu AFB nonaginta gradibus distat, adeoque ejus polus est. Similiter punctum F est polus arcus AEB.

17. Corollarium 2. *ut e puncto dato ad arcum datum ducatur arcus perpendicularis*, describendus est arcus circuli maximi, qui per polum arcus dati & punctum datum transeat.

18. Corollarium 3. Si duo, aut plures arcus ad eundem sint perpendiculares, omnes sese in illius polo, sive in distantia 90 graduum ab illo arcu intersecant. Et e converso, arcus, qui duos, pluresve alios in distantia 90 graduum a communi eorum intersectione secat, eosdem secat perpendiculariter.

ARTICULUS II.

De proprietatibus generalibus triangulorum sphæricorum.

19. THEOR. III. *Si e tribus angulis* A, B, C (fig. 2.) *trianguli sphærici tanquam polis, describantur tres arcus* FE, FD, DE, *qui novum triangulum* FDE *constituant, quodlibet latus hujus novi trianguli est complementum anguli illius, quo tanquam polo, descriptum est; & quivis angulus hujus novi trianguli est complementum lateris prioris trianguli* ABC, *sibi oppositi.*

DEMONSTR. Quoniam A est polus arcus FGHE, distantia punctorum A & E est 90 graduum. Et quia C est polus arcus DMNE,

DMNE, etiam diſtantia punctorum C & E, eſt nonaginta graduum: quare E eſt polus arcus NACG. Eodem modo oſtenditur, F eſſe polum arcus IABH, & D arcus MBCL. His poſitis

1*mo*. Tam arcus FI, quam LD eſt 90 graduum, adeoque $DL + FI = 180°$, aut $DL + FL + LI = 180°$: aut $DF + LI = 180°$: igitur DF eſt complementum arcus LI, partis communis quadrantum FI, & DL (Elem. 427.). Atqui LI, cum habeat polum B, eſt menſura anguli ABC, quare DF eſt etiam complementum anguli ABC. Simili modo demonſtratur, arcum GH, menſuram anguli A, eſſe complementum arcus FE; & arcum NM, qui metitur angulum C, eſſe complementum arcus DE.

2*do*. Cum tam arcus BL, quam AH ſint 90 graduum, eorum pars communis AB eſt complementum arcus IABH, qui metitur angulum F: & ſimiliter arcus AC eſt complementum anguli E, & BC anguli D ad 180°.

20. THEOR. IV. *Duo quævis latera trianguli ſphærici ſimul ſumpta ſunt tertio majora.*

DEMONSTR. Arcus circuli maximi inter duo puncta ſphæræ eſt via breviſſima, qua ab uno ad alterum in ſuperficie ſphæræ perveniri poteſt; via igitur, quæ inter eadem puncta angulum facit, hoc eſt duo reliqua latera trianguli, longior eſt.

21. THEOR. V. *Latus quodvis trianguli ſphærici ſemicirculo minus eſt.*

DEMONSTR. Quivis angulus ſphæricus comprehenditur duobus arcubus circularibus, qui ab uno interſectionis puncto ducti, antequam ſe denuo interſecent, tertio arcui occurrunt; atqui nova interſectio fit in diſtantia 180 graduum (8); nullus igitur 180° continere poteſt.

22. THEOR. VI. *Summa trium laterum trianguli ſphærici ſemper minor eſt 360 gradibus.*

DEMONSTR. Sit triangulum ABC (fig. 3.) Producantur duo quævis latera AB, AC donec ſe interſecent in D. Arcus ACD, ABD uterque eſt 180°. Jam vero $DC + DB > BC$ (per 20): quare ſi utrique addatur $AC + AB$, erit $AC + AB + DC + DB > BC + AC + AB$, hoc eſt duo ſemicirculi ACD, ABD ſimul ſumpti majores ſunt tribus lateribus AC, AB, BD ſimul ſumptis.

23. THEOR. VII. *Summa trium angulorum trianguli ſphærici ſemper major eſt 180°; ſed minor 540°, aut ſex rectis.*

DEMONSTR. 1*mo*. Summa trium angulorum trianguli ABC (fig. 2.) una cum ſumma trium laterum trianguli DEF facit ter 180 gradus aut 540° (19). Sed ſumma trium laterum trianguli DEF minor eſt bis 180 gradibus (per 22). Ergo ſumma trium angulorum trianguli ABC major eſſe debet 180 gradibus.

2do. Quivis angulus ſphæricus minor eſt 180 gradibus, igitur ſumma trium quorumvis angulorum minor eſt ter 180 gradibus.

24. COROLL. I. *Triangulum ſphæricum poteſt habere tres angulos rectos, imo tres obtuſos.*

25. COROLL. II. *Datis duobus angulis trianguli ſphærici, non datur hoc ipſo tertius, ut in planis triangulis.*

Obſerva. Quo arcus, latera trianguli ſphærici conſtituentes, plurium graduum ſunt, eo magis etiam ſumma angulorum ultra 180 accreſcit. Tunc enim magis a triangulo rectilineo ejusmodi ſphæricum differt.

26. THEOR. VIII. *Duo triangula ſphærica æqualia ſunt, 1mo ſi tria latera unius æqualia ſunt lateribus homologis alterius, ſingula ſingulis; 2do Si duo latera homologa æqualia æqualem angulum comprehendunt. 3tio Si duo anguli homologi æquali lateri adjacentes æquales ſunt. 4to Si tres anguli unius ſunt æquales angulis alterius, ſinguli ſingulis.*

DEMONSTR. Partis primæ, ſecundæ & tertiæ eadem eſt, ac quæ in triangulis rectilineis adhibetur. (Elem. 506. & ſeq.) Pars quarta inferius N. 105. demonſtrabitur.

27. THEOR. IX. *In omni triangulo iſoſceli* A B C (fig. 4.) *duo anguli* B & C, *æqualibus lateribus* A C, A B *oppoſiti, æquales ſunt: Et ſi in triangulo duo anguli* B & C *æquales ſint, latera* A C, A B *angulis æqualibus oppoſita etiam ſunt æqualia.*

DEMONSTR. *1mo* Accipiantur in AB & AC arcus æquales AE, & AD, ducanturque BD & EC. Evidens eſt, triangula ABD, AEC eſſe æqualia, utpote lateribus AE, AC; AD, AB æqualibus angulum communem A comprehendentibus (per 26.) adeoque etiam BD = EC. Præterea ablatis ex AB & AC per hypoth. æqualibus AE, & AD, manet EB = DC; & BC eſt latus commune triangulorum EBC, DCB; quare cum tria latera tribus, ſingula ſingulis æqualia ſint, etiam anguli homologi B & C æquales eſſe debent.

2do Si angulus B æqualis ſit angulo C, erit etiam AB = AC. Accipiatur enim EB = DC, & iterum ducantur arcus BD, EC. Erunt (per 26) △ △ ECB, BDC æqualia, cum lateribus EB, BC, & DC, BC angulos B & C per hypotheſim æquales comprehendant. Unde *1mo* eſt EC = BD; *2do* DBC = ECB, & conſequenter etiam complementum illius BDA æquatur hujus complemento CEA; *3tio* DBC = ECB, atque hinc, cum EBC = DCB per hypotheſin, etiam ECA = DBA. Sunt ergo in triangulis ADB, AEC latera BD, EC, angulique adjacentes ADB, ABD æquales angulis AEC, & ACE; ac tertius A communis

munis utrique: quare (per 26) tota triangula æqualia ſunt, & latus AE = lateri AD; additisque partibus æqualibus EB, DC, eſt AEB = ADC.

28. COROLL. *Triangulum æquiangulum eſt ſimul æquilaterum, & viciſſim æquilaterum eſt ſimul æquiangulum.*

29. THEOR. X. *In omni triangulo ſphærico* ABC (fig. 5.) *latus* BC, *oppoſitum angulo majori* A, *majus eſt; &* AC, *oppoſitum angulo minori* B, *minus eſt.*

DEMONSTR. Cum angulus A major ſit angulo B (per hypoth.), fiat DAB = DBA, erit (per 27) AD = BD, & AD + CD = BD + CD: ſed (per 20) AD + CD > AC; ergo etiam BD + CD, ſive latus BC oppoſitum angulo majori A, majus eſt latere AC, oppoſito angulo minori B.

ARTICULUS III.

Formulæ Trigonometricæ.

30. Cum maxima pars regularum in calculis Aſtronomicis fundetur in proprietatibus ſinuum & tangentium, earum formulas, quarum frequentior eſt uſus, hic ſubjicere placuit.

Atque ut breviores evadant, his notis utemur: *ſ* vel *ſin* ſignificat ſinus; *coſ* coſinus; *tang* tangens: *cot* cotangens; R vel 1 Radius aut ſinus totus.

31. In omnibus hiſce formulis A & B deſignant duos arcus circulorum vel duos angulos quoscumque, quorum major ſit A; ſupponitur tamen uterque minor 90 gradibus; & hinc in formularum applicatione ad caſus particulares nihil in earum ſignis mutandum eſt, quamdiu anguli vel arcus infra 90 gradus erunt. Verum ubi hunc numerum graduum aliquis eorum excedit, ſignum ejus coſinus vel cotangentis mutandum eſt in contrarium. Etenim ex ipſo intuitu figuræ ſinum, coſinum, tangentem, & cotangentem alicujus arcus 90 gradibus minoris repræſentantis apparet, omnes has lineas ad eandem partem centri illius arcus ſitas eſſe, contra vero coſinum & cotangentem arcus complementi ad ſemicirculum ad partem oppoſitam reſpectu ſinus ſui & tangentis cadere. unde infertur, ſigna ſinuum & tangentium eadem eſſe, ſive acuti ſive obtuſi ſint anguli: ſed ſigna coſinuum & cotangentium in acutis eſſe contraria ſignis in obtuſis.

32. Præterea ſupponitur radius R = 1; unde fere in omnibus formulis ſinus totus omiſſus eſt. Sed facile eſt eum in qualibet

rurſus

rurſus exhibere, ſi ſive ipſe ſive ejus quadratum, aut cubus pro coefficiente, aut denominatore cujusvis termini accipiatur.

FORMULÆ.

33. I. $\textit{ſ}A = \textit{coſ}\,A \times \textit{tang}\,A = \frac{\textit{coſ}\,A}{\textit{cot}\,A}$

34. II. $\textit{coſ}\,A = \textit{ſin}\,A \times \textit{cot}\,A = \frac{\textit{ſ}A}{\textit{tang}\,A} = \frac{\textit{ſ}2A}{2\textit{ſin}\,A}$.

35. III. $\textit{tang}\,A = \frac{\textit{ſ}A}{\textit{coſ}\,A} = \frac{R^2}{\textit{cot}\,A}$.

36. IV. $\textit{cot}\,A = \frac{\textit{coſ}\,A}{\textit{ſin}\,A} = \frac{R^2}{\textit{tang}\,A}$.

37. V. $\textit{cot}\,A \times \textit{tang}\,A = R^2$.

38. VI. $\frac{1}{2}\textit{ſ}2A = \textit{coſ}\,A \times \textit{ſ}A = \frac{\textit{ſ}^2 A}{\textit{tang}\,A} = \textit{ſ}^2 A \times \textit{cot}\,A$.

39. VII. $R + \textit{coſ}\,A = 2\textit{coſ}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\textit{ſ}A}{\textit{tang}\tfrac{1}{2}A}$.

40. VIII. $R - \textit{coſ}\,A = 2\textit{ſ}^2 \tfrac{1}{2}A = \textit{ſ}A \times \textit{tang}\tfrac{1}{2}A$.

41. IX. $\frac{R - \textit{coſ}\,A}{R + \textit{coſ}\,A} = \textit{tang}^2 \tfrac{1}{2}A$.

42. X. $\frac{R + \textit{tang}\,A}{R - \textit{tang}\,A} = \frac{R}{\textit{tang}\,(45° - A)} = \textit{tang}\,(A + 45°)$. Si $A > 45°$, erit $\frac{\textit{tang}\,A + R}{\textit{tang}\,A - R} = \frac{R}{\textit{tang}\,(A - 45°)}$.

43. XI. $\frac{\textit{coſ}\,A - \textit{ſ}A}{\textit{coſ}\,A + \textit{ſ}A} = \textit{tang}\,(45° - A)$. Et ſi $A > 45°$, $\frac{\textit{ſin}\,A - \textit{coſ}\,A}{\textit{ſ}A + \textit{coſ}\,A} = \textit{tang}\,(A - 45°)$.

44. XII. $\frac{\textit{ſ}A}{\textit{coſ}\,A + \textit{ſin}\,A} = \frac{R - \textit{coſ}\,A}{\textit{ſ}A} = \textit{tang}\tfrac{1}{2}A$.

45. XIII. $\textit{ſ}(A \mp B) = \textit{ſ}A \times \textit{coſ}\,B \mp \textit{ſ}B \times \textit{coſ}\,A$.

46. XIV. $\textit{coſ}\,(A \pm B) = \textit{coſ}\,A \times \textit{coſ}\,B \mp \textit{ſ}A \times \textit{ſ}B$.

47. XV. $\frac{\textit{ſ}(A + B)}{\textit{ſ}(A - B)} = \frac{\textit{tang}\,A + \textit{tang}\,B}{\textit{tang}\,A - \textit{tang}\,B}$.

48. XVI. $\frac{\textit{coſ}\,(A + B)}{\textit{coſ}\,(A - B)} = \frac{\textit{cot}\,A - \textit{tang}\,B}{\textit{cot}\,A + \textit{tang}\,B} = \frac{\textit{cot}\,B - \textit{tang}\,A}{\textit{cot}\,B + \textit{tang}\,A}$.

49. XVII. $\textit{ſ}A + \textit{ſ}B = 2 \times \textit{ſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{coſ}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$.

50. XVIII. $\textit{ſ}A - \textit{ſ}B = 2 \times \textit{coſ}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{ſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$.

51. XIX. $\textit{coſ}\,A + \textit{coſ}\,B = 2 \times \textit{coſ}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{coſ}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$.

52. XX. $\textit{coſ}\,B - \textit{coſ}\,A = 2 \times \textit{ſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{ſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$.

53. XXI. $\frac{\textit{ſ}A + \textit{ſ}B}{\textit{ſ}A - \textit{ſ}B} = \textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{cot}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) = \frac{\textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)}{\textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}$.

54. XXII. $\frac{\textit{ſ}A + \textit{ſ}B}{\textit{coſ}\,A + \textit{coſ}\,B} = \textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)$.

55. XXIII. $\frac{ſA+ſB}{coſB-coſA}=cot\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}A)$.

56. XXIV. $\frac{ſin\,A-ſin\,B}{coſA+coſB}=tang\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)$

57. XXV. $\frac{ſA-ſB}{coſB-coſA}=cot\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)$.

58. XXVI. $\frac{coſB-coſA}{coſB+coſA}=tang\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\times tang\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)=\frac{tang\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)}{cot\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)}$.

59. XXVII. $ſA\times ſB=\tfrac{1}{2}coſ(A-B)-\tfrac{1}{2}coſ(A+B)$.

60. XXVIII. $ſA\times coſB=\tfrac{1}{2}ſ(A+B)+\tfrac{1}{2}ſ(A-B)$.

61. XXIX. $coſA\times ſB=\tfrac{1}{2}ſ(A+B)-\tfrac{1}{2}ſ(A-B)$.

62. XXX. $coſA\times coſB=\tfrac{1}{2}coſ(A+B)+\tfrac{1}{2}coſ(A-B)$.

DEMONSTRATIO.

Formulæ I, II, III, IV, V, VI, & XIII demonſtrantur in trigonometria plana. Fig. 11 exhibet triangula ſimilia APK, PCD, quorum laterum valor ex ſola inſpectione facile colligitur. Eſt autem in iis AP : PK = PC (= 2PK) : PD, hinc $PD=\frac{2PK^2}{AP}$, quæ eſt formulæ VII pars prima.

In △△ ICD, APK eſt porro AP : AK = IC (= 2AK) : $ID=\frac{2AK^2}{AP}$, quæ pars prima form. VIII.

In △△ ICD, PIH, PCD habetur CD : ID = PI : IH (= 2Ah), hoc eſt : $ſA : R-coſA=2R : 2tang\tfrac{1}{2}A$; quod ſuppeditat alteram partem formulæ VIII. Deinde eſt PD : CD = PI : IH, ſeu $R+coſA : ſA=2R : 2tang\tfrac{1}{2}A$ quod dat alteram formulæ VII partem, atque una formulas IX, & XII. Nempe PD : DC = DC : DI, adeoque $PD : DI = PD^2 : DC^2 = PA^2 : Ah^2$ ſive $R+coſA : R-coſA = R^2 : tang^2\tfrac{1}{2}A$, ſive (cum R = 1) $=1 : tang^2\tfrac{1}{2}A$, quod formulam IX exhibet. Formulæ XII pars prima habetur ex hac analogia PD : DC = PA : Ah. Pars ſecunda ex iſta : CD : ID = PA : Ah.

Quia (Elem. 740) $coſ^2=R^2-ſ^2$; habetur $coſ(A\mp B)=R^2-\frac{(ſA\times coſB\mp coſA\times ſB)^2}{R^2}$; (eſt enim $ſ(A\mp B)=\frac{ſA\times coſB\mp coſA\times ſB}{R}$) ſive - - - - - -

$$=\frac{R^4-ſ^2A\times coſ^2B-coſ^2A\times ſ^2B\mp 2ſA\times coſA\times ſB\times coſB}{R^2}.$$

Atqui eſt $R^2=ſ^2A+coſ^2A$; & $R^2=ſ^2B+coſ^2B$; igitur $R^4=ſ^2A\times ſ^2B+coſ^2A\times ſ^2B+ſ^2A\times coſ^2B+coſ^2A\times coſ^2B$; qui valor ſi ſubſtituatur, & facta reductione extrahatur radix, formula XIV naſcetur.

Ex formula XIII colligitur eſſe $ſ(A+B) : ſ(A-B) = ſA\times coſB+coſA\times ſin B : ſA\times coſB-coſA\times ſB$. Dividatur ſecunda ratio per $coſA\times coſB$, habebitur $ſ(A+B) : ſ(A-B)=\frac{ſA\times coſB}{coſA\times coſB}+\frac{coſA\times ſB}{coſA\times coſB}\left(=\frac{ſA}{coſA}+\frac{ſB}{coſB}\right) : \frac{ſA\times coſB}{coſA\times coſB}-\frac{coſA\times ſB}{coſA\times coſB}\left(=\frac{ſA}{coſA}-\frac{ſB}{coſB}\right)$, & hinc $\frac{ſ(A+B)}{ſ(A-B)}=$ (ſi pro $\frac{ſ}{coſ}$ juxta formul. III accipiatur tangens) $\frac{tang\,A+tang\,B}{tang\,A-tang\,B}$, quæ eſt formula XV.

Sit in Fig. 12, KR arcus minor quem B vocavimus, & KD major A. Ducta ad DE perpendiculari RIH, patet arcum RG esse $=A+B$; $DR=A-B$; $IG=ſA+ſB$; $IH=cofA+cofB$; $ID=ſA-ſB$; $IR=cofB-cofA$. Dein dividatur RG bifariam in S, & DR in P, ducaturque tangens RM. Ex constructione liquet, esse $RM=tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; $RL=tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; $ST=ſ(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; $CT=cof(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; $RQ=ſ(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; $CQ=cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; denique $HG=2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; Nam arcus $HV=RK=GSK-DR$; & arcus $VGR=180°$; igitur arcus $GVH=HV+VGK-GSK=GSK-DR+180°-GSK=180°-DR$. Quare chorda $HG=2ſ(90°-\frac{1}{2}DR)=2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. His positis ob triangula rectangula CST, CRM, DIR, HIG similia; (præterquam enim quod omnia sint rectangula, $RS=\frac{1}{2}RG$, hinc $RCS=RDG$, $=RHG$) item IGR, IDH, CRL (quia $PR=\frac{1}{2}DR$, & ideo $LCR=DHR=DGR$); habentur sequentes analogiæ; $ID:IR=CR:RM$, seu $ſA-ſB:cofB-cofA=1:tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$; & $CR:RM=ON:CC=cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$; ergo $IR:DI=1:cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ sive $cofB-cofA:ſA-ſB=1:cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)=\frac{ſA-ſB}{cofB-cofA}$, quæ est formula XXV.

$ID:IG=RL:RM$, id est $ſA-ſB:ſA+ſB=tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B):tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$
Est enim $ID:IH=LR:CR$,
& $IH:IG=CR:RM$
exæq. dir. $ID:IG=LR:RM$. Divid. conseq. per antec. habetur 2da pars form. XXI.

Quia porro semper est $tang:R=R:cot$, erit $tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B):1=1:cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$ & $tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\frac{1}{cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$; substituatur hic valor in $\frac{tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$, fiet $tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, quæ est pars prima ejusdem formulæ.

$IH:IG=CR:RM$, seu $cofA+cofB:ſA+ſB=1:tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ quæ est formula XXII.

$IG:IR=CR:RL$, seu $ſA+ſB:cofB-cofA=1:tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$; est autem per paulo ante demonstrata $tang=\frac{1}{cot}$; igitur est $ſA+ſB:cofB-cofA=1:\frac{1}{cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$. Et divid. antec. per conf. habetur formula XXIII.

$IH:ID=CR:RL$, $cofA+cofB:ſA-ſB=1:tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, quæ est formula XXIV.

$IG:HG=ST:CS$, $ſA+ſB:2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=ſ(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$, seu $CS:ST=HG:IG$; hinc habetur formula XVII.

$DI:DR(=2RQ)=CT:CS=ſA-ſB:2ſ(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=cof(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$; hinc elicitur formula XVIII.

$HI:HG=CT:CS$, $cofA+cofB:2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=cof(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$, hinc ducitur form. XIX.

$RI:DR=ST:CS$; $cofB-cofA:2ſ(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=ſ(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$ exhibet form. XX.

Formula XXVI deducitur ex XXII & XXIII. Cum enim sit per illam $\frac{ſA+ſB}{cofA+cofB}=tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; & per hanc $\frac{ſA+ſB}{cofB-cofA}=cotang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\frac{1}{tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$ (nempe quia per superius dicta $tang=\frac{1}{cot}$, erit etiam $tang\times cot=1$, & $cot=\frac{1}{tang}$) fiet $\frac{cofA+cofB}{ſA+ſB}:\frac{cofB-cofA}{ſA+ſB}=\frac{1}{tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}:tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$

Omisso in prima ratione communi denominatore, & divisis consequentibus per terminos antecedentes habetur formulæ pars prima; si vero loco $\frac{1}{tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$ ponatur $cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, altera pars prodit.

Formula X obtinetur ex XXVI, supponendo $B=90°-A$; tunc enim $\frac{1}{2}B=$

45°

$45° - \frac{1}{2}A$, consequenter $\cos B = \int A$, $\int B = \cos A$; & rationes $\cos B + \cos A : \cos B - \cos A = \cot(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \tan g(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ (scilicet pro $\tan g(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ ponendo $\frac{1}{\cot(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}$, & pro $\cot(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ substituendo $\frac{1}{\tan g(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$) abeunt in has: $\int A + \cos A : \int A - \cos A = \cot 45°\ (= R) : \tan g(\frac{1}{2}A - 45° + \frac{1}{2}A)$ seu : $\tan g(A - 45°)$.

Formula XI sequitur ex X. Cum enim ex paullo ante positis habeatur $\frac{\cos A + \int A}{\cos A - \int A} = \frac{R}{\tan g(45° - A)}$, fiet $\cos A + \int A = \frac{\cos A \times R}{\tan g(45° - A)} - \frac{\int A \times R}{\tan g(45° - A)}$; dividantur omnia per $\cos A$, & ponatur R pro $\frac{\cos A}{\cos A}$, ac $\tan g A$ pro $\frac{\int A}{\cos A}$, habebitur $R + \tan g A = \frac{R^2}{\tan g(45° - A)} - \frac{\tan g A \times R}{\tan g(45° - A)}$. Divisis omnibus per $R - \tan g A$, habetur formula X.

Formula XXVII derivatur ex XIV, quæ dat ($\cos(A + B) = \cos A \times \cos B - \int A \times \int B$; & $\cos(A - B) = \cos A \times \cos B + \int A \times \sin B$; unde fit $2 \int A \times \int B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$, & consequenter $\int A \times \int B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$.

Formulæ XXVIII, XXIX, & XXX eodem prorsus modo ex XIII & XIV deducuntur.

ARTICULUS IV.

Analogiæ pro calculo triangulorum rectangulorum sphæricorum.

Pro resolutione rectangulorum triangulorum quorumvis sphæricorum, A repræsentet semper angulum rectum: B & C reliquos duos; tum fiant analogiæ, quæ sequente tabella exhibentur

TABULA

Pro reſolutione caſuum omnium poſſibilium triangulorum ſphæricorum A B C, *ad* A *rectangulorum.*

	Data	quæ ſita.	Analogiæ				Quæſita ſunt 90° minora
63	AB, AC	B C	R	: *coſ* AB	= *coſ* AC	: *coſ* BC	ſi AB & AC ſunt ejusdem ſpeciei.
64		B	R	: *ſin* AB	= *cot* AC	: *cot* B	ſi AC < 90°.
65		C	R	: *cot* AB	= *ſin* AC	: *cot* C	ſi AB < 90°.
66	AB, BC	A C	*coſ*AB	: R	= *coſ* BC	: *coſ* AC	ſi BC & AB ſunt ejusdem ſpeciei.
67		B	R	: *tang*AB	= *cot* BC	: *coſ* B	ſi BC & AB ſunt ejusdem ſpeciei.
68		C	*ſin*BC	: *ſin* AB	= R	: *ſin* C	ſi AB < 90°.
69	AB, B	A C	R	: *ſin* AB	= *tang*B	: *tang*AC	ſi B < 90°.
70		B C	R	: *cot* AB	= *coſ* B	: *cot* BC	ſi AB & B ſunt ejusdem ſpeciei.
71		C	R	: *coſ* AB	= *ſin* B	: *coſ* C	ſi AB < 90°.
72	AB, C	A C	R	: *tang*AB	= *cot* C	: *ſin* AC	dubium
73		B C	*ſin*C	: *ſin* AB	= R	: *ſin* BC	dubium
74		B	*coſ*AB	: *coſ* C	= R	: *ſin* B	dubium
75	AC, BC	A B	*coſ*AC	: *coſ* BC	= R	: *coſ* AB	ſi BC & AC ſint ejusdem ſpeciei.
76		B	*ſin*BC	: *ſin* AC	= R	: *ſin* B	ſi AC < 90°.
77		C	R	: *tang*AC	= *cot* BC	: *coſ* C	ſi AC & BC ſint ejusdem ſpeciei.
78	AC, B	A B	R	: *tang*AC	= *cot* B	: *ſin* AB	dubium
79		B C	*ſin*B	: *ſin* AC	= R	: *ſin* BC	dubium
80		C	*coſ*AC	: *coſ* B	= R	: *ſin* C	dubium
81	AC, C	A B	R	: *ſin* AC	= *tang*C	: *tang*AB	ſi C < 90°.
82		B C	R	: *cot* AC	= *coſ* C	: *cot* BC	ſi AC & C ſint ejusdem ſpeciei.
83		B	R	: *coſ* AC	= *ſin* C	: *coſ* B	ſi AC < 90°.
84	BC, B	A B	R	: *tang*BC	= *coſ* B	: *tang*AB	ſi BC & B ſint ejusdem ſpeciei.
85		A C	R	: *ſin* BC	= *ſin* B	: *ſin* AC	ſi B < 90°.
86		C	R	: *coſ* BC	= *tang*B	: *cot* C	ſi BC < 90°.
87	BC, C	A B	R	: *ſin* BC	= *ſin* C	: *ſin* AB	ſi C < 90°.
88		A C	R	: *tang*BC	= *coſ* C	: *tang*AC	ſi BC & C ſint ejusdem ſpeciei.
89		B	R	: *coſ* BC	= *tang*C	: *cot* B	ſi BC & C ſint ejusdem ſpeciei.
90	B, C	A B	*ſin*B	: *coſ* C	= R	: *coſ* AB	ſi C < 90°
91		A C	*ſin*C	: *coſ* B	= R	: *coſ* AC	ſi B < 90°
92		B C	R	: *cot* B	= *cot* C	: *coſ* BC	ſi B & C ſint ejusdem ſpeciei.

De uſu hujus tabulæ.

93. Tabulæ uſus expeditus eſt, atque ex unius primæ lineæ explicatione facile tota intelligi poteſt. Præſcribit nempe, ut ſi trianguli rectanguli alicujus ſphærici *dentur duo latera* A B, A C, & *quæratur hypotenuſa* B C, *fiat hæc analogia: ut radius eſt ad ſinum complementi lateris* A B, *ita ſinus complementi lateris* A C *ad ſinum complementi hypotenuſæ* B C. Sed quoniam arcus 90° minores eorumque complementa

ta ad duos rectos eosdem ſinus, coſinus, tangentes, cotangentes habent (Elem. 727), in ultima columna tabulæ additur: *quæſita eſſe minora* 90 *gradibus* (in exemplo ſcilicet propoſito hypotenuſam B C) *ſi* AB, *&* AC *ejusdem ſpeciei ſunt*, hoc eſt *vel ambo* 90 *gradibus majora*, *vel ambo minora.* Quando vero ex datis determinari nequit, an quæſita ſint minora 90°, vox *dubium* adſcripta eſt.

Demonſtrationes priorum Analogiarum.

94. THEOR. XI. *Si in triangulo rectangulo* A B C (fig. 7) *producantur latera* B C *in* G, A C *in* I, B A *in* D, *donec* C G, C I, B D *fiant* 90°; *ac præterea polo* B *deſcribatur arcus* H E D, *ita ut* H E *ſit* 90°: *demum polo* C *ducatur arcus* H I G; *fient duo triangula rectangula* C E F, H I F, *quorum partes vel æquales ſunt partibus trianguli* A B C, *vel earum complementa.*

Demonſtr. 1mo enim cum B ſit polus arcus F E D, ſunt B E, B D ſinguli 90°, & ad F E D perpendiculares (per 18); eodem modo cum F E D, F C A inſiſtant arcui B A D perpendiculariter, ſunt ſinguli 90°, & communis eorum interſectio F eſt polus arcus B A D: quare triangulum F C E eſt ad E rectangulum; ejus angulus ad F, quem menſurat arcus A D, eſt complementum lateris B A; latus F E, complementum lateris E D, quod eſt menſura anguli B; hypotenuſa C F complementum lateris C A, & latus C E complementum lateris B C.

2do. Quoniam arcus H E, eſt 90°, & perpendicularis ad arcum C E G, H eſt polus ejusdem C E G (16), & H I G itidem 90° (3). Rurſus C I, C G cum ſint 90°, arcui H I G inſiſtunt perpendiculariter; igitur H I F eſt rectangulum ad I; ejus latus H I eſt complementum lateris I G, menſuræ anguli B C A; latus I F = C A (nam C A, I F habent commune complementum C F); hypotenuſa H F eſt æqualis angulo A B C, ex eadem ratione; nam F E eſt commune complementum ad quadrantem tam arcus E D (menſuræ anguli A B C) quam arcus H F, atque ideo H F = E D: angulus F H I æquatur hypotenuſæ B C; & H F I complemento lateris A B.

95. Theor. XII. *In omni rectangulo triangulo eſt: ut radius ad ſinum hypotenuſæ, ita ſinus anguli unius ex obliquis ad ſinum lateris oppoſiti.*

Demonſtr. Sit triangulum ſphæricum A B C (fig. 8) ad A rectangulum arcubus ſectorum D C B, D B A, D A C comprehenſum. Ex quovis puncto F interſectionis D A planorum angulum rectum efficientium erigatur perpendicularis F G, concipiaturque planum G F E per F G tranſiens & ad interſectionem D B planorum D C B, D B A normale; erit angulus F E G menſura inclinationis eorundem

 plano-

planorum, seu anguli sphærici ABG (Elem. 630). His positis, in triangulo EFG rectangulo ad F (cum GF sit perpendicularis plano DAB), est FG : GE = *sin* FEG : R. (Elem. 747). Et in △FDG rectangulo ad F est pariter GD : FG = R : *sin* GDF. Igitur etiam FG . GD : GE . FG = *sin* FEG × R : R × *sin* GDF (Elem. 307); & divisa prima ratione per FG, altera per R, fit (Elem. 295) DG : GE = *sin* FEG : *sin* GDF.

Jam vero in triangulo DEG ad E rectangulo est GD : GE = R : *sin* GDE; quare etiam habetur R : GDE = *sin* FEG : *sin* GDF; hoc est, radius est ad sinum hypotenusæ BC, ut *sin* ABC ad *sinum* lateris oppositi AC.

96. *Coroll.* I. Atque hæc est Analogia N. 85. posita. Si accipiatur obliquus angulus C, est N. 87; invertendo, fient illæ, quæ N. 76 & 79 ponuntur. Et si invertatur analogia N. 87, nascentur N. N. 68. & 73.

II. Per Theorema præcedens in triangulo rectangulo FCE (fig. 7) est R : *sin* FC = *sin* CFE : *sin* CE; & substitutis æquivalentibus ex triangulo ABC, habebitur (94) R : *cos* AC = *cos* AB : *cos* BC, quæ est analogia N. 63, & inverse fient illæ, quæ NN. 66 & 75 sunt propositæ.

III. In eodem triangulo est porro: R : *sin* FC = *sin* C : *sin* FE. Aut facta substitutione R : *cos* AC = *sin* C : *cos* B. Quæ est N. 83, & invertendo NN. 80 & 91.

IV. In triangulo HIF habetur R : *sin* HF = *sin* F : *sin* HI, & substituendo æquivalentes, R : *sin* B = *cos* AB : *cos* C. hoc est, analogia N. 71; & inverse NN. 74 & 90.

97. Theor. XIII. *In omni triangulo rectangulo est : ut sinus totus ad sinum lateris unius angulum rectum comprehendentis, ita tangens anguli obliqui huic lateri adjacentis ad tangentem lateris oppositi.*

Demonstr. Manentibus omnibus ut in theor. præced. in triangulo FED (fig. 8) ad E rectangulo, est (Elem. 747) FE : FD = *sin* FDE : R. Et in triangulo FGD rectangulo in F (Elem. 748) FD : FG = R : *tang* FDG, quare ex æquo directe FE : FG = *sin* FDE : *tang* FDG. Jam vero in triangulo FGE ad F rectangulo pariter est FE : FG = R : *tang* FEG, igitur etiam R : *tang* FEG = *sin* FDE : *tang* FDG; hoc est, sinus totus ad tangentem anguli ABC, ut sinus lateris AB ad tangentem lateris AC, & permutando &c.

Corollar. I. Hæc est analogia N. 69; Et si substituatur pro angulo obliquo angulus C, N. 81.

II. Invertendo analogiam N. 69 habetur : *tang* B : R = *tang* AC : *sin* AB. Et est præterea (Elem. 737): *tang* B : R = R : *cot* B atque ideo R : *cot* B = *tang* AC : *sin* AB, quæ est anal. N. 78.

III. In

III. Invertendo analog. N. 81 fit *tang* C : R = *tang* A B : *ſin* A C. ſed etiam (Elem. 737) : *tang* C : R = R : *cot* C, ergo etiam R : *cot* C = *tang* A B : *ſin* A C. Quæ eſt anal. N. 72.

IV. In triangulo F C E (fig. 7) per theor præſens eſt R : *ſin* F E = *tang* F : *tang* C E & ſubſtitutis æquivalentibus (per N 94) R : *coſ* B = *cot* A B : *cot* B C quæ eſt analogia N. 70. Quod ſi jam hæc poſtrema analogia generaliter exprimatur : ut ſinus totus ad coſinum anguli unius obliqui, ita tangens lateris huic angulo adjacentis ad cotangentem hypotenuſæ, evidens eſt, etiam haberi R : *coſ* C = *cot* A C : *cot* B C. quæ eſt analogia N. 82.

V. In eodem triangulo F C E eſt etiam R : *ſin* C E = *tang* C : *tang* F E : & (per N. 94) ſubſtitutis æqualibus R : *coſ* B C = *tang* C : *cot* B, habetur analogia N. 89. Cum igitur per hanc analogiam ſit ſinus totus ad coſinum hypotenuſæ, ut tangens anguli unius ex obliquis eſt ad cotangentem alterius, patet, haberi quoque R : *coſ* B C = *tang* B : *cot* C. quæ eſt analogia N. 86.

VI. In triangulo H I F (fig. ead.) habetur : R : *ſin* H I = *tang* H : *tang* I F, & ſubſtitutione æqualium R : *coſ* C = *tang* B C : *tang* A C. quæ eſt analogia N. 88. Vi igitur hujus analogiæ habetur univerſim : ſinus totus ad coſinum unius ex angulis obliquis, ut tangens hypotenuſæ ad tangentem lateris illi angulo adjacentis : quare habetur R : *coſ* B = *tang* B C : *tang* A B, analogia N. 84.

VII. In eodem triangulo H I F eſt R : *ſin* I F = *tang* F : *tang* H I; & ſubſtitutis æqualibus R : *ſin* A C = *cot* A B : *cot* C, quæ eſt analogia N. 65. Et quoniam ex hac univerſim patet, eſſe ſinum totum ad ſinum lateris unius angulum rectum comprehendentis, ut eſt *cot* lateris alterius ad *cot* anguli huic alteri lateri oppoſiti, erit quoque R : *ſin* A B = *cot* A C : *cot* B, quæ eſt anal. N. 64.

VIII. Analogiam N. 70. invertendo habetur *cot* A B : R = *cot* B C : *coſ* B. Eſt vero (Elem. 737) *cot* A B : R = R : *tang* A B, ergo etiam R : *tang* A B = *cot* B C : *coſ* B. Quæ eſt analog. N. 67.

IX. Invertendo analogiam N. 89. fit *tang* C : R = *cot* B : *coſ* B C. Jam eſt etiam *tang* C : R = R : *cot* C. Igitur & R : *cot* C = *cot* B : *coſ* B C, quæ eſt anal. N. 92.

X. Denique invertendo analogiam N. 88. obtinetur *tang* B C : R = *tang* A C : *coſ* C. Sed etiam *tang* B C : R = R : *cot* B C, unde R : *cot* B C = *tang* A C : *coſ* C. Quæ eſt anal. N. 77.

Demonſtratur ratio magnitudinis angulorum & laterum inter ſe, quæ in præcedentis tabulæ ultimo laterculo ſingulis analogiis adſcripta eſt.

98. Theorema XIV. *Quivis angulus obliquus in triangulo rectangulo eſt ejuſdem ſpeciei cum latere ſibi oppoſito;* hoc eſt minor 90 gradibus, ſi latus

latus ei oppoſitum minus eſt; major, ſi latus oppoſitum eum numerum graduum excedit.

Demonſtr. Sit in triangulo A B C rectangulo ad A (fig. 9) latus A B minus 90°; dico, angulum C fore acutum. Producatur enim latus A B in D donec A D = fiat 90°; erit D polus arcus A C, & ducto DC, angulus A C D rectus, conſequenter pars illius B C A acutus.

Eodem modo patet, poſito A B 90°, fore angulum oppoſitum C rectum; Et ſi ponatur A C > 90°, accipiaturque A B = 90°, & jungatur B C, angulus B C A rectus erit, adeoque A C D obtuſus.

99. Theorema XV. *Si duo latera angulum rectum comprehendentia ſint ejusdem ſpeciei, hypotenuſa eſt minor 90°; & ſi ſint diverſæ ſpeciei, hypotenuſa 90 gradus excedit.*

Demonſtr. Sit primo in triangulo B A C (fig. 7) ad A rectangulo utrumque latus A B, A C minus 90 gradibus, erit etiam hypotenuſa B C minor. Productis enim lateribus B A in D; A C in F, donec ſingula æquentur 90 gradibus, liquet, B eſſe polum circuli maximi D F per D tranſeuntis, & qui (per N. 18) Arcui A C (quoniam ad A angelus rectus) occurrere nequit, niſi in diſtantia 90°, adeoque extra triangulum A B C. Eſt igitur E B = 90°, & hinc B C < 90°.

Sint ſecundo latera A B, A C (fig. 3) trianguli A B C ad A rectanguli ſingula majora 90 gradibus, dico hypotenuſam B C fore minorem 90 gradibus. Etenim producantur latera A C, A B, donec ſe interſecent in D, fiet triangulum C D B rectangulum in D (per N. 13) cujus hypotenuſa B C eſt eadem ac triangnli A B C; quoniam D C, D B ſunt complementa laterum A C, A B ad ſemicirculum, ſingula minora ſunt 90 gradibus; igitur per caſum primum in △ D C B hypotenuſa B C < 90°.

Sit tertio in triangulo rectangulo A B C (fig. 10) latus A B > 90°, & latus A C < 90°, erit hypotenuſa BC > 90°. Producatur enim A C in F, ut fiat 90 graduum, quoniam ad A rectus, eſt F polus lateris A B. Quod ſi igitur in B A accipiatur B D = 90°, ducaturque D F, liquet, B eſſe polum arcus D F, adeoque BE eſt 90°, & per conſequens B C > 90°.

100. *Corollar.* I. Quoniam (per N. 98) anguli obliqui ſunt ejusdem ſpeciei cum lateribus ſibi oppoſitis, ſequitur, *hypotenuſam fore minorem 90 gradibus, ſi anguli obliqui ſint ejusdem ſpeciei; at majorem, ſi hi anguli ſint diverſæ ſpeciei.*

101. II. Et e converſo: *ſi hypotenuſa trianguli rectanguli eſt minor 90 gradibus, anguli obliqui, & latera rectum comprehendentia ejusdem ſunt ſpeciei; ſed ſi hypotenuſa 90 gradibus major eſt, diverſæ.*

102. III.

102. III. *Si in triangulo rectangulo hypotenusa & unum latus sunt ejusdem speciei, latus alterum cum angulo sibi opposito sunt minora 90 gradibus; sed si hypotenusa & unum latus sunt diversæ speciei, latus alterum cum angulo sibi opposito majora sunt 90 gradibus.*

103. Observa. Casus, in quibus dubium est de specie laterum, admodum rari in calculo Astronomico emergunt, pro quo in triangulis rectangulis non adhibentur nisi arcus 90 gradibus minores. Dum enim arcus iis majores occurrunt, producti intelliguntur donec se rursus intersecent, eorumque complementa ad duos rectos calculantur. Ut si (fig. 3) calculandum proponeretur triangulum ABC, ad evitandam molestiam calculus in triangulo BCD institueretur, cujus omnia latera minora sunt 90 gradibus, uti & anguli præter D. Cognitis autem partibus trianguli BC*D*, etiam partes prioris ABC cognoscuntur.

ARTICULUS V.

Theoria calculi triangulorum obliquangulorum.

104. Theor. XVI. *In quovis triangulo sphærico* ABC (fig. 16) *semper est: ut sinus anguli unius* A *ad sinum lateris sibi oppositi* BC; *ita sinus anguli alterius B ad sinum lateris* AC *eidem angulo oppositi.*

Demonstr. Ducto enim arcu CD ad AB perpendiculari, triangulum ABC in duo triangula rectangula dividitur ACD, BCD. Quare est (per 95) $R : \sin AC = \sin A : \sin CD$,
& $R : \sin BC = \sin B : \sin CD$, igitur $R \times \sin CD = \sin AC \times \sin A = \sin BC \times \sin B$, (per Elem. 300). consequenter $\sin A : \sin BC = \sin B : \sin AC$. Elem. 302.

105. Corollar. *si in duobus triangulis sphæricis omnes tres anguli æquales sunt, singuli singulis; etiam latera sunt æqualia, & tota triangula æquantur; & e converso.* Etenim anguli æquales, & latera æqualia habent etiam sinus eosdem.

106. Theor. XVII. *Si ducto ex vertice* C *trianguli cujusvis arcu* CD *ad* BA *perpendiculari, triangulum in duo rectangula, & latus oppositum* BA *in duo segmenta* AD & BD *dividatur,* erunt 1mo sinus segmentorum AD & BD reciproce proportionales tangentibus angulorum adjacentium A & B; aut in ratione directa cotangentium eorundem. Nam in triangulo rectangulo ADC (per 96) habetur $R : \sin AD = \tang A : \tang CD$. Et in triangulo rectangulo BCD est $R : \sin DB = \tang B : \tang CD$. Quare $R \times \tang CD = \sin AD \times \tang A = \sin DB \times \tang B$. Et hinc $\sin AD : \sin BD = \tang B : \tang A = \cot A : \cot B$. (Elem. 737)

C 107. Se-

107. *Secundo Cosinus eorundem segmentorum sunt in ratione cosinuum laterum adjacentium* AC, BC. Etenim in triangulis rectangulis ADC, BCD (per 63) habetur R : *cos* DC = *cos* AD : *cos* AC, &
R : *cos* DC = *cos* DB : *cos* BC. Igitur *cos* AD : *cos* AC = *cos* DB : *cos* BC.

108. *Tertio, Cosinus angulorum* BCD, DCA *sunt in ratione directa cotangentium laterum* BC, & AC, *vel reciproca tangentium eorundem.*

Nempe in triangulis ADC, BCD (per 82) est
R : *cot* DC = *cos* BCD : *cot* BC, &
R : *cot* DC = *cos* DCA : *cot* AC; adeoque *cos* BCD : *cos* DCA = *cot* BC : *cot* AC = *tang* AC : *tang* BC.

109. *Quarto sinus angulorum* BCD, DCA, *qui fiunt per arcum* CD, *sunt in ratione cosinuum angulorum* B & A. Est enim (per 83)
R : *cos* DC = *sin* DCA : *cos* A &
R : *cos* DC = *sin* BCD : *cos* B. Ergo etiam *sin* BCD : *sin* DCA = *cos* B : *cos* A.

110. Theor. XVIII. *In omni triangulo sphærico* ABC (*fig. 4.*) *est* $cos\,A = \frac{cos\,BC - cos\,AC \times cos\,AB}{sin\,AC \times sin\,AB}$.

Nam 1mo ducto arcu BD ad AC normali, in triangulo rectangulo ABD (per 88) habetur R : *tang* AB = *cos* A : *tang* AD. hinc *tang* AD = *tang* AB × *cos* A (Radio existente = 1); Est vero (per 33) *sin* AD = *cos* AD × *tang* AD; ergo etiam *sin* AD = *cos* AD × *tang* AB × *cos* A. 2do: In triangulo ABC (per 107), est *cos* DC : *cos* AD = *cos* BC : *cos* AB. Igitur *cos* DC × *cos* AB = *cos* BC × *cos* AD; sed *cos* DC = *cos* (AC — AD) = (per 46) *cos* AC × *cos* AD + *sin* AC × *sin* AD = (substituto valore de *sin* AD superius invento) *cos* AC × *cos* AD + *sin* AC × *cos* AD × *tang* AB × *cos* A. Quod si hic valor *cos* DC substituatur, fiet *cos* AC × *cos* AD × *cos* AB + *sin* AC × *cos* AD × *tang* AB × *cos* A × *cos* AB = *cos* BC × *cos* AD. Divisis omnibus per *cos* AD, & loco *tang* AB × *cos* AB substituto *sin* AB (per 33), obtinetur *cos* AC × *cos* AB + *sin* AC × *cos* A × *sin* AB = *cos* BC, adeoque *sin* AC × *cos* A × *sin* AB = *cos* BC — *cos* AC × *cos* AB, dividendo per *sin* AC × *sin* AB tandem fit $cos\,A = \frac{cos\,BC - cos\,AC \times cos\,AB}{sin\,AC \times sin\,AB}$.

111. Theor. XIX. *In omni triangulo sphærico* ABC *habetur hæc proportio*: $sin\,AB \times sin\,AC : sin(\tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}AC) \times sin(\tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC) = R^2 : sin^2 \tfrac{1}{2}A$.

Ponatur R = 1. Per (40) est $2\,sin^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - cos\,A = \frac{sin\,AB \times sin\,AC}{sin\,AB \times sin\,AC} - \frac{cos\,BC + cos\,AB \times cos\,AC}{sin\,AB \times sin\,AC}$ (110) $= \frac{sin\,AB \times sin\,AC + cos\,AB \times cos\,AC - cos\,BC}{sin\,AB \times sin\,AC}$ = (46)

cos

$\frac{\cos(AB-AC)-\cos BC}{\sin AB \times \sin AC}$. Ergo per (52) $2\sin^2\frac{1}{2}A =$ $\frac{2\sin(\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC)\times\sin(\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC)}{\sin AB \times \sin AC}$. Ex qua æquatione analogia proposita, omisso coefficiente constante 2, eruitur.

112. Observa. Quoniam hæc duo theoremata universalia sunt, facile transpositis literis eadem reliquis duobus angulis applicantur: Aut si dentur tres anguli, ope theorematis III, latera inveniri possunt. (vid. Artic. VII.)

ARTICULUS VI.

Solutio omnium casuum, qui in triangulis obliquangulis occurrere possunt.

Casus omnes, qui in diversis triangulis obliquangulis emergere possunt, commode ad 12 problemata revocantur, inter quæ octo sunt, in quibus triangulum obliquangulum ad duo rectangula reduci debet, ducto scilicet arcu ex vertice unius anguli ad latus oppositum perpendiculari. Jam vero hic arcus vel cadit intra triangulum datum, vel extra illud in latus productum. Quare inquirendum est primum, quibusnam in casibus utrumvis contingat.

113. Theor. XX. *Arcus* C D *ex quovis angulo* C *trianguli sphærici in latus oppositum* A B *perpendicularis, cadit intra triangulum* (fig. 16), *si anguli reliqui* A & B *sint ejusdem speciei; idem vero arcus cadit extra triangulum, si reliqui duo anguli* A & B *sint diversæ speciei* (fig. 14. & 15).

Demonstr. Cadat primo C D (fig. 16) intra triangulum; erunt hoc ipso anguli B & A ejusdem speciei, hoc est vel uterque minor, vel uterque major recto. Nam (per 98) in triangulo C A D rectangulo ad D, angulus A est ejusdem speciei cum latere opposito C D; ex eadem ratione in triangulo B C D rectangulo ad D, angulus B est ejusdem speciei cum latere eodem C D; igitur quando C D cadit intra triangulum, reliqui duo anguli sunt ejusdem speciei; adeoque etiam conversa vera est.

Cadat 2*do* arcus perpendicularis C D (fig. 14 & 15) extra triangulum, erunt anguli A & B diversæ speciei. Etenim rursus (per 98) in triangulo C D B ad D rectangulo angulus B est ejusdem speciei cum latere sibi opposito C D; & in triangulo C A D angulus A est ejusdem speciei cum latere eodem C D; quare anguli C B D, C A D sunt ejusdem speciei. Sed cum (fig. 14) angulus C B D sit complementum anguli C B A ad duos rectos, & neuter sit rectus (per hypothesin), sunt inter se diversæ speciei; quare cum C B D sit ejusdem cum C A D speciei, debent C A B, & C B A

esse diversæ: Eodem modo (fig. 15) C A B est complementum anguli C A D, qui est ejusdem cum B speciei, adeoque C A B est diversæ speciei ab utroque C A D, C B D.

114. Theor. XXI. *Si duo minora latera* A C, *&* C B *trianguli* A C B *sint ejusdem speciei, arcus perpendicularis ex angulo* C *ad basin* A B *ductus intra triangulum cadet.* (fig. 13).

Demonstrat. Ex maximo latere A B accipiatur A F = A C, & B E = B C, & descriptis arcubus C F & C E ducantur ad eosdem perpendiculares A H & B G. His ita constitutis, in triangulis rectangulis F A H, E G B, latera F H, G E necessario 90 gradibus minora sunt, cum æquentur dimidiis C F & C E, a perpendiculis bisectis ob æqualia crura A C, A D, & B C, B E; integris C F & C E 180. gradibus minoribus existentibus (per 21). Quare si ponantur latera A C & B C, aut his æqualia A F, & B E, minora 90 gradibus, in triangulis rectangulis F H A, B G E, hypotenusa A F cum latere H F, & hypotenusa B E cum latere G E sunt ejusdem speciei, adeoque (per 102) angulus F & E acutus; & hinc in triangulo F C E arcus perpendicularis ad basin F E ex C ductus cadet intra triangulum (per 113). Si autem supponantur C B = B D, & A C = A F majora 90 gradibus, in iisdem triangulis hypotenusæ A F, B E sunt cum lateribus F H & E G diversæ speciei, hinc anguli A F H, B E G obtusi uterque (per 102) adeoque iterum ejusdem speciei & (per 113) perpendicularis arcus C D rursus in basim F E incidet.

115. Problema I. *Datis duobus angulis & latere uni horum opposito invenire latus alteri datorum angulorum oppositum.*

Angulus, cui opponitur latus datum, dicatur A; alter datus vocetur B, tertius incognitus sit C. Fiat hæc proportio (104):

sin A : *sin* B = *sin* B C : *sin* A C.

Ex datis determinari nequit species lateris A C, poteſtque 90 gradibus vel majus vel minus esse.

116. Problema II. *Iisdem datis invenire angulum tertium.*

Fiant eædem denominationes, quæ in Probl. I, & ducatur ex C arcus perpendicularis ad A B; tum fiant hæ duæ proportiones (fig. 14, 15, & 16)

R : *cos* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

cos B : *cos* B A C = *sin* B C D : *sin* A C D (109).

Quod si A & B sint ejusdem speciei, summa angulorum B C D, A C D; si vero illi sint diversæ speciei, differentia horum erit æqualis angulo quæsito C.

117. Probl. III. *Iisdem datis invenire latus inter angulos datos interceptum.*

Iis-

Iisdem iterum pofitis denominationibus, & arcu perpendiculari ex C in latus quæfitum ducto, fiant fequentes analogiæ: (fig. 14, 15, & 16)

R : *cof* B = *tang* B C : *tang* B D (84).

tang A : *tang* B = *fin* B D : *fin* A D (106).

Si A & B fint ejusdem fpeciei, erit fumma B D + A D = A B; fi vero funt diverfæ fpeciei, erit differentia A D — B D vel B D — A D = A B, latus quæfitum.

118. Problema IV. *Datis duobus angulis & latere intercepto, invenire aliud latus.*

Angulus, cui opponitur latus quæfitum, vocetur B, alter datus dicatur C, tertius A. Ex angulo C præterea ducatur ad latus oppofitum arcus perpendicularis C D, fiatque hæc analogia: (fig. 14, 15, & 16).

R : *cof* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

Summa vel differentia angulorum B C D, & dati B C A, prout pofitio perpendicularis exiget, erit angulus A C D.

Tum inferatur ulterius

cof B C D : *cof* A C D = *cot* B C : *cot* A C (108).

Quod fi angulus A C D eft ejusdem fpeciei cum angulo B, erit A C < 90°. Si A C D & B funt diverfæ fpeciei, erit A C > 90°.

119. Problema V. *Iisdem datis invenire angulum tertium.*

Anguli dati dicantur B & C, quæfitus A, & ducatur ex C arcus perpendicularis in latus oppofitum. Tum inferatur (fig. 14, 15, & 16).

R : *cof* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

Summa vel differentia angulorum B C D & B C A pro diverfa perpendicularis pofitione, dabit angulum A C D. Dein fiat

fin B C D : *fin* A C D = *cof* B : *cof* A (109).

Quod fi jam angulus B C D fit minor angulo cognito B C A, angulus quæfitus A eft ejusdem fpeciei, ac datus B, fed fi B C D > B C A, anguli A & B funt diverfæ fpeciei (113).

120. Problema VI. *Datis duobus lateribus cum angulo uni eorum oppofito, invenire angulum oppofitum alteri lateri dato.*

Angulus datus dicatur A; comprehenfus a duobus lateribus datis vocetur B, tertius C. Inferatur

fin B C : *fin* A B = *fin* A : *fin* C (104).

Ex datis conftare nequit, utrum angulus C fit acutus, an obtufus.

121. Problema VII. *Iisdem datis invenire latus tertium.*

Angulus datus vocetur B, oppofitus lateri quæfito C, tertius

A; ex C ducatur arcus perpendicularis in latus quæſitum, & inferatur: (fig. 14, 15, & 16).

R : *tang* B C = *coſ* B : *tang* B D (84).

coſ B C : *coſ* A C = *coſ* B D : *coſ* A D (107)

Si jam B C & A C ſint ejusdem ſpeciei, ſumma B D + A D = A B (114); ſi diverſæ, differentia inter B D & A D erit latus quæſitum A B.

122. Problema VIII. *Iisdem datis reperire angulum comprehenſum a lateribus datis.*

Dicatur angulus datus B, quæſitus C, tertius A. Ex C ducatur in latus oppoſitum arcus perpendicularis, & inferatur (fig. 14, 15, & 16):

R : *coſ* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

cot B C : *cot* A C = *coſ* B C D : *coſ* A C D (108).

Si A C & B C ſint ejusdem ſpeciei, ſumma angulorum B C D, A C D; ſi diverſæ, differentia eorundem erit quæſitus C.

123. Problema IX. *Datis duobus lateribus cum angulo comprehenſo, invenire alium angulum.*

Angulus datus vocetur B, quæſitus A, tertius C; & ducto ex C arcu perpendiculari fiat: (fig. 14, 15, & 16)

R : *tang* B C = *coſ* B : *tang* B D (84).

Accipiatur ſumma vel differentia B D, & A B, prout perpendicularis C D intra vel extra triangulum ceciderit, & habebitur A D, Inferatur porro:

ſin A D : *ſin* B D = *tang* B : *tang* A (106).

Jam prout A B majus vel minus fuerit, quam B D; ita angulus A erit ejusdem vel diverſæ ſpeciei cum angulo dato B.

124. Problema X. *Iisdem datis reperire latus tertium.*

Angulus datus ſit B, ſitque B C latus datorum minus, B A majus; ex C ducatur arcus perpendicularis C D, qui fere ſemper intra triangulum cadet, præcipue ſi angulus B ſit acutus. Fiat (fig. 14, 15, & 16):

R : *tang* B C = *coſ* B : *tang* B D (84).

Subtrahatur B D ex B A, vel ſi C D cadat extra triangulum verſus B, addantur B D & B A; aut denique ſi C D cadat extra triangulum verſus A, ſubducatur B A ex B D, & habebitur A D. Tum fiat iterum

coſ B D : *coſ* A D = *coſ* B C : *coſ* A C (107).

Prout jam A D ejusdem vel diverſæ ſpeciei fuerit cum C D, aut cum angulo A, ita latus A C 90 gradibus majus vel minus erit.

125. Problema XI. *Datis tribus lateribus trianguli invenire angulum quemvis.*

Angu-

Angulus quæſitus dicatur A, alii B & C. Fiat (per 111)
ut factum ex ſinubus laterum A B & B C
ad factum ex ſinibus duorum exceſſuum ſemi ſummæ trium laterum ſupra ſingula latera A B & A C; *ita quadratum radii ad quadratum ſinus dimidii anguli* A.

126. Problema XII. *Datis tribus angulis invenire latus quodvis.*

Latus quæſitum ſit B C, angulus ei oppoſitus A. Inferatur
ut factum ex ſinubus angulorum B & C
ad factum ex coſinubus duorum exceſſuum ſemiſummæ trium angulorum ſupra ſingulos B & C;
ita quadratum radii ad quadratum coſinus dimidii lateris B C.

Hæc analogia ſupponit triangulum datum A B C intra aliud D E F (fig. 2), cujus omnes partes ſunt complementa partium oppoſitarum trianguli A B C. (per 19).

127. Obſerva. Triangulum rectilineum conſiderari poteſt inſtar ſphærici, cujus arcus ita ſunt exigui, ut a rectis non differant, adeoque cum ſinubus & tangentibus congruant. Hinc trigonometriæ planæ applicari poſſunt formulæ trigonometriæ ſphæricæ quas coſinus & cotangentes non ingrediuntur, modo pro voce *ſinus* vel *tangens lateris* ſubſtituatur *latus.* Exempli cauſa ſi tria latera trianguli rectilinei dentur, angulus quivis reperiri poteſt per analogiam Problematis XI. hunc in modum:
ut factum ex duobus lateribus angulum quæſitum comprehendentibus
ad factum ex duobus exceſſibus ſemiſummæ trium laterum ſupra ſingula ea latera;
ita quadratum radii ad quadratum ſinus dimidii anguli quæſiti.

ARTICULUS VII.

Diverſæ formulæ trigonometriæ ſphæricæ.

128. Quamvis ex analogiis in præcedentibus allatis omnia trigonometriæ ſphæricæ problemata ſolvi poſſint, utile tamen admodum eſt, easdem ſolutiones diverſis modis exhibere; uſus hujus varietatis præcipuus eſt in ſubſtitutionibus faciendis, dum in calculi Aſtronomici regulas algebraice inquiritur; ſæpe enim fit, ut deinceps patebit, ut earum ope regulæ multo ſimpliciores, & elegantiores reddantur. Demonſtrationibus ſequentium formularum dandis non immorabor, tum quod plurimæ jam in ſuperioribus Articulis demonſtratæ ſint, tum quod reliquæ nihil difficultatis habeant. Illos ſolummodo caſus generatim indicabo, in quibus maximum uſum habent.

In omnibus vero formulis hiſce ſupponuntur anguli & latera trianguli ſphærici 90 gradibus minora: quod ſi itaque caſus ferat, ut majora ea ſint, ad Notam Articuli III. N. 31 poſitam recurrendum erit, ut ſignorum debita permutatio fiat.

I.

In triangulo sphærico quovis ABC *ad* A *rectangulo, semper est.*

129. $\sin B = \frac{\cos C}{\cos AB} = \frac{\sin AC}{\sin BC}$

130. $\tang B = \frac{\cot C}{\cos BC} = \frac{\tang AC}{\sin AB}$

131. $\cos B = \cot BC \times \tang AB = \sin C \times \cos AC = \frac{1}{2}\sin(C + AC) + \frac{1}{2}\sin(C - AC)$.

132. $\cot B = \tang C \times \cos BC = \cot AC \times \sin AB$.

133. $\sin C = \frac{\cos B}{\cos AC} = \frac{\sin AB}{\sin BC}$

134. $\tang C = \frac{\cot B}{\cos BC} = \frac{\tang AB}{\sin AC}$

135. $\cos C = \sin B \times \cos AB = \cot BC \times \tang AC = \frac{1}{2}\sin(B + AB) + \frac{1}{2}\sin(B - AB)$

136. $\cot C = \tang B \times \cos BC = \sin AC \times \cot AB$.

137. $\sin AB = \cot B \times \tang AC = \sin C \times \sin BC = \frac{1}{2}\cos(C - BC) - \frac{1}{2}\cos(C + BC)$.

138. $\tang AB = \cos B \times \tang BC = \tang C \times \sin AC$.

139. $\cos AB = \frac{\cos BC}{\cos AC} = \frac{\cos C}{\sin B}$

140. $\cot AB = \frac{\cot BC}{\cos B} = \frac{\cot C}{\sin AC}$.

141. $\sin AC = \cot C \times \tang AB = \sin B \times \sin BC = \frac{1}{2}\cos(B - BC) - \frac{1}{2}\cos(B + BC)$.

142. $\tang AC = \tang B \times \sin AB = \cos C \times \tang BC$.

143. $\cos AC = \frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\cos BC}{\cos AB}$.

144. $\cot AC = \frac{\cot B}{\sin AB} = \frac{\cot BC}{\cos C}$.

145. $\sin BC = \frac{\sin AB}{\sin C} = \frac{\sin AC}{\sin B}$.

146. $\tang BC = \frac{\tang AC}{\cos C} = \frac{\tang AB}{\cos B}$.

147. $\cos BC = \cos AC \times \cos AB = \cot C \times \cot B = \frac{1}{2}\cos(AC + AB) + \frac{1}{2}\cos(AC - AB)$.

148. $\cot BC = \cos C \times \cot AC = \cos B \times \cot AB$.

Nota I. si latus unum trianguli obliquanguli sit 90°, illud litera A designetur, reliqua duo dicantur B & C, anguli vero denotentur per BC, AC, AB, prout scilicet concursu laterum binorum B & C, A & C, A & B formantur: formulæ eædem hujus trianguli partibus inveniendis servient.

Nota II. liquet, NN. 131, 135, 137, 141, 147, ultimas expressiones constare ex quantitatibus sola additione & subtractione connexis, adeoque eas haberi posse sine Logarithmorum subsidio. Verum observandum hic, quod angulus vel arcus, qui priore loco enunciatur, major supponatur, illo, qui subjicitur. Exempli causa in Formula N. 131 supponitur C > AC. Quod si itaque contrarium evenerit, ordo terminorum in hisce invertendus erit, & ponendum in allato exemplo $\frac{1}{2}\sin(AC + C) + \frac{1}{2}\sin(AC - C)$.

II.

II.

In quovis triangulo sphærico ABC *semper est*

149. $\sin A = \frac{\sin BC \times \sin C}{\sin AB} = \frac{\sin BC \times \sin B}{\sin AC}$.

150. $\sin B = \frac{\sin AC \times \sin A}{\sin BC} = \frac{\sin AC \times \sin C}{\sin AB}$.

151. $\sin C = \frac{\sin AB \times \sin B}{\sin AC} = \frac{\sin AB \times \sin A}{\sin BC}$.

152. $\sin AB = \frac{\sin BC \times \sin C}{\sin A} = \frac{\sin AC \times \sin C}{\sin B}$.

153. $\sin AC = \frac{\sin AB \times \sin B}{\sin C} = \frac{\sin BC \times \sin B}{\sin A}$.

154. $\sin BC = \frac{\sin AC \times \sin A}{\sin B} = \frac{\sin AB \times \sin B}{\sin C}$.

155. $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \times \cos AB}{\sin AC \times \sin AB} = \cos BC \times \sin B \times \sin C - \cos B \times \cos C$.

156. $\cos B = \frac{\cos AC - \cos AB \times \cos BC}{\sin AB \times \sin BC} = \cos AC \times \sin C \times \sin A - \cos C \times \cos A$.

157. $\cos C = \frac{\cos AB - \cos AC \times \cos BC}{\sin AC \times \sin BC} = \cos AB \times \sin A \times \sin B - \cos A \times \cos B$.

158. $\cos AB = \sin AC \times \sin BC \times \cos C + \cos AC \times \cos BC = \frac{\cos C + \cos A \times \cos B}{\sin A \times \sin B}$.

159. $\cos AC = \cos B \times \sin AB \times \sin BC + \cos AB \times \cos BC = \frac{\cos B + \cos C \times \cos A}{\sin C \times \sin A}$.

160. $\cos BC = \cos A \times \sin AC \times \sin AB + \cos AB \times \cos AC = \frac{\cos A + \cos B \times \cos C}{\sin B \times \sin C}$

161. $\tang A = \frac{\sin B}{\cot BC \times \sin AB - \cos B \times \cos AB} = \frac{\sin C}{\cot BC \times \sin AC - \cos AC \times \cos C}$

162. $\tang B = \frac{\sin C}{\cot AC \times \sin BC - \cos C \times \cos BC} = \frac{\sin A}{\cot AC \times \sin AB - \cos AB \times \cos A}$.

163. $\tang C = \frac{\sin B}{\cot AB \times \sin BC - \cos B \times \cos BC} = \frac{\sin A}{\cot AB \times \sin AC - \cos AC \times \cos A}$.

164. $\tang AB = \frac{\sin BC}{\cot C \times \sin B + \cos B \times \cos BC} = \frac{\sin AC}{\cot C \times \sin A + \cos AC \times \cos A}$.

165. $\tang AC = \frac{\sin BC}{\cot B \times \sin C + \cos C \times \cos BC} = \frac{\sin AB}{\cot B \times \sin A + \cos AB \times \cos A}$.

166. $\tang BC = \frac{\sin AC}{\cos AC \times \cos C - \sin C \times \cot A} = \frac{\sin AB}{\cos B \times \cos AB - \sin B \times \cot A}$.

167. $\cot A = \frac{\cot BC \times \sin AB}{\sin B} - \cos AB \times \cot B = \frac{\cot BC \times \sin AC}{\sin C} - \cos AC \times \cot C$.

168. $\cot B = \frac{\cot AC \times \sin BC}{\sin C} - \cos BC \times \cot C = \frac{\cot AC \times \sin AB}{\sin A} - \cos AB \times \cot A$.

169. cot

169. $\cot C = \frac{\cot AB \times \sin AC}{\sin A} - \cos AC \times \cot A = \frac{\cot AB \times \sin BC}{\sin B} - \cos BC \times \cot B.$

170. $\cot AB = \frac{\cot C \times \sin B}{\sin BC} + \cos B \times \cot BC = \frac{\sin A \times \cot C}{\sin AC} + \cot AC \times \cos A.$

171. $\cot AC = \frac{\cot B \times \sin C}{\sin BC} + \cos C \times \cot BC = \frac{\cot B \times \sin A}{\sin AB} + \cot AB \times \cos A.$

172. $\cot BC = \frac{\cot A \times \sin C}{\sin AC} + \cos C \times \cot AC = \frac{\cot A \times \sin B}{\sin AB} + \cot AB \times \cos B.$

III.

In triangulo quovis sphærico ABC, *ubi* $A > B$ *aut* $BC > AC$, *semper habetur*

173. $\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}AB = \frac{\sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathrm{tang}(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC)}{\sin(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = \frac{\cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathrm{tang}(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC)}{\cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}.$

174. $\cot \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC) \times \mathrm{tang}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{\sin(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC)}.$

si $AB > AC$ - - -

175. $\cot \tfrac{1}{2}A = \frac{\mathrm{tang}(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B) \times \sin(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)}{\sin(\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC)} = \frac{\mathrm{tang}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B) \times \cos(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)}{\cos(\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC)}.$

176. Nota. Præter alios usus formulæ primæ & tertiæ etiam ille est in resolutione horum duorum problematum: datis A, B, & AB invenire BC & AC. Nam ex prima parte primæ formulæ invenitur differentia inter BC & AC; & ex secunda parte eorum summa. Simili ratione per tertiam formulam reperitur summa & differentia de B & C, datis AB, AC, & A.

IV.

ANALOGIÆ DIFFERENTIALES.

In quovis triangulo sphærico ABC

I Si angulus A & latus AC ei adjacens sit constans, est

177. $dAB : dBC = R : \cos B = \sin AB \times \sin BC : R \times \cos AC - \cos AB \times \cos BC = R : \cos AC \times \sin C \times \sin A - \cos C \times \cos A.$

si $A = 90^\circ$, $dAB : dBC = \mathrm{tang}\, BC : \mathrm{tang}\, AB.$

si $B = 90^\circ$, $dAB : dBC = R : \cos dAB = \cos dBC : \cos CD.$

178. $dAB : dB = \mathrm{tang}\, BC : \sin B = \mathrm{tang}\, BC \times \sin BC : \sin AC \times \sin A.$

179. $dAB : dC = \sin BC : \sin B = \sin^2 BC : \sin AC \times \sin A = \sin AC \times \sin A : \sin^2 B = \sin BC \times \sin AB : \sin C \times \sin AC = \sin A \times \sin^2 AB : \sin AC \times \sin^2 C.$

si $B = 90^\circ$, $dAB : dC = \cot dAB : \cot dC = R : \sin BC.$

180. $dBC : dB = \mathrm{tang}\, BC : \mathrm{tang}\, B.$

si $B = 90^\circ$, $dBC : dB = \sin(BC + dBC) : R = \sin BC : \sin(B + dB).$

181. $dBC : dC = \sin BC : \mathrm{tang}\, B = \sin A \times \sin AC : \mathrm{tang}\, B \times \sin B = \sin^2 BC \times \cot AC - \sin BC \times \cos BC \times \cos C : R^2 \times \sin C.$

si $BC = 90^\circ$, $dBC : dC = \mathrm{tang}\, dBC : \sin dC = R : \cot B.$

182. $dB : dC = \cos BC : R = \cos A + \cos B \times \cos C : \sin B \times \sin C = \cos A \times \sin AC \times \sin AB + \cos AC \times \sin AB : R.$

si $A = 90^\circ$, $dB : dC = \cot C : \mathrm{tang}\, B.$

si $B = 90^\circ$, $dB : dC = \sin dB : \sin dC = \cos BC : R.$

II. Si

II. Si angulus A, & latus ei oppositum BC sit constans, est

183. $dAB : dAC = \cos C : \cos B = \cos AB \times \sin AB - \cos AC \times \cos BC \times \sin AB : \cos AC \times \sin AC - \cos AB \times \cos BC \times \sin AC.$

184. $dAB : dB = R \times \sin AB : \mathrm{tang}\, C \times \cos AC = \mathrm{tang}\, AC \times \cos C : R \times \sin B = \mathrm{tang}\, AC \times \sin AB : \mathrm{tang}\, C \times \sin AC = \mathrm{tang}\, AC \times \cos BC - \sin AC \times \cos AB : \sin B \times \sin AB \times \sin AC.$

185. $dAB : dC = \mathrm{tang}\, AB : \mathrm{tang}\, C.$

si $A = 90^\circ$, $dAB : dC = \sin AC : R.$

si $B = 90^\circ$, $dAB : dC = \cot dAB : \cot dC = R : \sin BC.$

186. $dAC : dB = \mathrm{tang}\, AC : \mathrm{tang}\, B.$

si $A = 90^\circ$, $dAC : dB = \sin AB : R.$

si $B = 90^\circ$, $dAC : dB = \cot dAC : \cot dB = R : \sin AB.$

187. $dAC : dC = R \times \sin AC : \mathrm{tang}\, B \times \cos AB = \mathrm{tang}\, AB \times \cos B : R \times \sin C.$

si $A = 90^\circ$, $dAC : dC = \tfrac{1}{2} \sin 2AC : R.$

138. $dB : dC = \cos AC : \cos AB = \cos B \times \mathrm{tang}\, AB \times \sin BC + \cos BC : R.$

III. Si duo latera AB, AC sint constantia, est

189. $dA : dB = \sin BC \times R : \sin AC \times \cos C = R \times \sin A : \sin B \times \cos C = \sin BC \times \mathrm{tang}\, C : \sin AC \times \sin C = \mathrm{tang}\, C \times \sin A : \sin B \times \sin C = \sin B C \times \mathrm{tang}\, C : \sin B \times \sin AB = \sin^2 BC : \cos AB - \cos AC \times \cos BC = \sin AB \times \sin A : \sin AC \times \tfrac{1}{2} \sin 2C = R : \sin^2 B \times \cos AB - \sin B \times \cos B \times \cot A.$

190. $dA : dC = \sin BC \times R : \sin AB \times \cos B = R \times \sin A : \sin C \times \cos B = \sin BC \times \mathrm{tang}\, B : \sin AB \times \sin B = \mathrm{tang}\, B \times \sin BC : \sin AC \times \sin C = \mathrm{tang}\, B \times \sin A : \sin C \times \sin B = \sin^2 BC : \cos AC - \cos AB \times \cos BC.$

191. $dA : dBC = R : \sin AC \times \sin C = R : \sin AB \times \sin B = R \times \sin BC \times \sin C : \sin A \times \sin B \times \sin^2 AB.$

192. $dB : dBC = \cot C : \sin BC = R \times \cos C : \sin A \times \sin AB = R : \mathrm{tang}\, C \times \sin BC = \cot C \times \sin B : \sin A \times \sin AC = R : \dfrac{\cot AB}{\sin B} - \dfrac{\cot BC}{\mathrm{tang}\, B} = \cot AB - \cos B \times \cot BC : \sin B = \cos AB \times \sin B - \cot A \times \cos B : \sin AB.$

si $AC = 90^\circ$, $dB : dBC := \mathrm{tang}\, BC : \sin^2 B \times \mathrm{tang}\, B.$

193. $dBC : dC = \sin BC : \cot B = \sin A \times \sin AC : R \times \cos B = \sin BC \times \mathrm{tang}\, B : R = \sin A \times \sin AB : \cot B \times \sin C = R : \dfrac{\cot AC}{\sin C} - \dfrac{\cot BC}{\mathrm{tang}\, C} = \sin AC : \cos AC \times \sin C - \cos C \times \cot A.$

si $AB = 90^\circ$, $dBC : dC = \sin^2 C \times \mathrm{tang}\, C : \mathrm{tang}\, BC.$

194. $dB : dC = \mathrm{tang}\, B : \mathrm{tang}\, C = \sin AC \times \cos C : \sin AB \times \cos B = \sin B \times \cos C : \sin C \times \cos B.$

IV. Si duo anguli A & B sint constantes, est

195. $dAB : dAC = R \times \sin C : \sin B \times \cos BC = R \times \sin AB : \sin AC \times \cos BC.$

196. $dAB : dBC = R \times \sin C : \sin A \times \cos AC = R \times \sin AB : \sin BC \times \cos AC.$

si $A = 90^\circ$, $dAB : dBC = \sin C : \cos AC = \sin B \times \sin AB : \tfrac{1}{2} R \times \sin 2AC.$

197. $dAB : dC = R : \sin B \times \sin BC = R : \sin A \times \sin AC.$

si $A = 90^\circ$, $dAB : dC = R : \sin AC.$

198. $dAC : dBC = \mathrm{tang}\, AC : \mathrm{tang}\, BC.$

si $A = 90^\circ$, $dAC : dBC = \cos C : R.$

199. $dAC : dC = \cot BC : \sin C = R \times \cos BC : \sin AB \times \sin A.$

200. $dBC : dC = \cot AC : \sin C = R \times \cos AC : \sin AB \times \sin B.$

Explicatio & usus harum formularum.

201. In triangulo sphærico sex occurrunt partes considerandæ, videlicet tres anguli, & tria latera; formulæ autem differentiales exhibent rationem seu legem, juxta quam ternæ quævis partes ex sex illis mutantur, quando in quarta aliqua mutatio minima fieri supponitur: reliquis duabus constantibus & invariabilibus existentibus. In exemplo, si in quovis triangulo A B C (fig. 6), Angulo A & latere ei adjacente A C constantibus, supponatur latus A B crescere quantitate minima per B D exhibita, fiet angulus A C B æqualis angulo A C D, & angulus A B C mutabitur in A D C, latusque B C in C D abibit. Ope præcedentium formularum omnes hæ mutationes ad calculum revocari possunt, eoque accuratiorem, quo prima mutatio B D minor fuerit. Uti si quis variationem lateris C B, dum in C D transit, calculare velit, inveniet per primam analogiam N. 177, quod mutatio lateris A B (quæ litera *d* exprimitur, *differentiam*, vel *differentiale* significante) sit ad mutationem lateris B C, ut sinus totus ad cosinum anguli B.

202. Equidem arculo B D exiguo existente ut a recta non differat, si centro C radio C B describatur arculus B F, habebitur triangulum B D F, quod pro rectilineo haberi possit, & ad F rectangulum: angulus D quam minimum differt ab angulo B, ut eidem æqualis censeatur, latus F D est incrementum lateris B C quæsitum; Est vero (Elem. 747) D F ad D B ut sinus anguli D B F (sive cosinus anguli D) ad sinum totum. Atque hunc in modum omnes reliquæ formulæ demonstrari possunt.

Ratio altera in eadem formula (177) non est nisi substitutio valoris cosinus B e N. 156 petita, nempe $= \mathit{fin}\ AB \times \mathit{fin}\ BC : R \times \mathit{cof}\ AC - \mathit{cof}\ AB \times \mathit{cof}\ BC$. Idem de tertia sentiendum.

203. Dedimus autem, quot potuimus, rationes diversas, ut, quæ commodissima fuerit, seligatur, quæ scilicet non contineat nisi quantitates datas, vel prius inventas. Ut si in triangulo A B C angulus B foret incognitus, & scirentur tria latera, ratio secunda formulæ, licet magis composita, cæteris præferenda esset. Denique si solum A, C, & A C darentur, eligenda esset tertia ratio. Idem de aliis dicendum.

Observanda circa usum Logarithmorum in calculis trigonometricis.

204. I. In usu Logarithmorum tot decades characteristicæ addi vel ab ea resecari possunt, quot expedire visum fuerit; quemadmodum in formulis Algebraicis semper licet unitatem, vel quamvis ejus potentiam, pro coefficiente, aut denominatore assumere. Exempli gratia, si logarithmus ab alio subducendus major sit illo, a quo subtrahi deberet, characteristica minoris decade aucta supponitur. Quod eodem recidit, ac si ejus valor per unitatem multiplicaretur.

205. II. Quando analogia vel formula quæpiam subtractionem unius vel plurium logarithmorum exigit, ea evitari potest, & commodius in unam additionem mutari. Hinc loco logarithmorum subtrahendorum accipiantur eorum *complementa Arithmetica*; nomine autem complementi Arithmetici intelligitur differentia alicujus Logarithmi a Logarithmo sinus totius. Exempli causa si subtrahendus sit logarithmus sinus 28°, 12′, 10″, nempe 9, 67449, ejus loco scribatur 0, 32551. Idem de Logarithmis numerorum ordinariorum intelligendum est. Logarithmus Numeri 6053 est 3, 78197, qui subtractus a 10, 00000 relinquit ejus complementum Arithmeticum 6, 21803.

Hæc

Hæc autem ſubtractio Logarithmi a 10, 00000 &c. ut acquiratur complementum Arithmeticum fit facillime ſine ſcriptione ex ſola inſpectione tabulæ : nam a ſiniſtra verſus dextram pergendo notæ ſingulæ logarithmi ſubtrahendi ſubtrahantur a totidem novenariis, quot ſunt zeri in 10, 00000 &c. (excepto ultimo ad dextram, qui decadem valet) etiam characteriſtica 10, pro novenario habita, & reſiduum ſemper ſcribatur. Idem enim obtinetur, ſive hac ratione ſubtractio peragatur, ſive log. 10, 00000 ſubſcribatur alter logarithmus ſubtrahendus, & ſubtractio lege ordinaria a dextra initio ſumpto fiat.

Logarithmus tangentis eſt complementum Arithmeticum logarithmi cotangentis, & viciſſim, niſi quod differentia debeat accipi a logarithmo quadrati radii, cujus characteriſtica eſt 20; id quod manifeſtum ex formula, qua habetur $tang\,A = \frac{R^2}{cot\,A}$. Similiter ex formula $coſec\,A = \frac{R^2}{ſin\,A}$ (quæ eadem ratione, qua prior, demonſtratur) complementum Arithmeticum ſinus eſt logarithmus coſecantis ; & complementum Arithmeticum coſinus eſt logarithmus ſecantis ; adeo, ut dum complementum Arithmeticum ſinus alicujus arcus A adhibetur, revera coſecans A pro $\frac{1}{ſin\,A}$ ſubſtituatur.

206. III. Quando in calculo adhibetur aliqua formula ex duobus terminis compoſita, aut generatim dum logarithmus quæritur, qui ſummæ vel differentiæ duorum numerorum, quorum logarithmi ſolummodo dantur, reſpondet, ſequente methodo procedendum eſt:

Primo. Ut habeatur logarithmus ſummæ Numerorum, quorum logarithmi dantur, & characteriſticæ eorum æquales ſint, atque majores vel minores quam 8 aut 9, reducenda eſt utraque ad 9 addendo vel ſubtrahendo tot unitates, quot neceſſe eſt, ut 9 adæquent. Dein major eorum logarithmorum conſiderandus eſt tanquam logarithmus ſinus A, & minor, ut logarithmus ſinus B. Inventis jam in tabulis ſinuum A & B, colligantur in unam ſummam logarithmus de 2, logarithmus ſemiſummæ A + B, & logarithmus coſinus ſemi differentiæ eorundem, & juxta formulam (49) $ſin\,A + ſin\,B = 2 \times ſin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times coſ(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ habebitur logarithmus, a cujus characteriſtica decas additis vel ſubtractis tot unitatibus, quot characteriſticis datorum additæ vel ſubtractæ ſunt, ſubtrahi debet.

Exemplum. Sint dati logarithmi 3, 45894, & 3, 79393; addatur 6 ad characteriſticas, habebuntur 9, 45894, logarithmus ſinus B = 16°. 43′. 12″. & 9, 79393, logarithmus ſinus A = 38°, 28′, 38″. Igitur $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ = 27°, 35′, 55″. & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$ = 10°. 52′. 43″.

Log. de 2 - - - - - - - - - -	0, 30103
Log. $ſin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ - - - -	9, 66584
Log. $coſ(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ - - - -	9, 99212
Summa - - - - - - - -	19, 95899
Subtrahantur 10 + 6 =	16,
Log. quæſitus - -	3, 95899.

Si

Si characteristicæ logarithmorum datorum fint inæquales, addatur vel fubtrahatur ab utraque idem unitatum numerus, donec characteriftica majoris fit 9, reliquus calculus ut in exemplo priore peragatur.

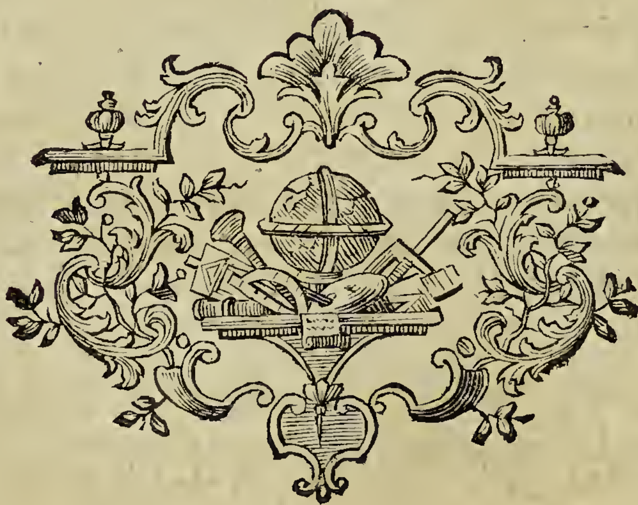
Secundo. Ut inveniatur logarithmus differentiæ numerorum logarithmis datis competentium, eædem obfervandæ funt regulæ, atque ad formulam $fin\, A - fin\, B = 2 \times cof(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times fin(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$ applicandæ.

Sequens exemplum, quæ in tribus fuperioribus obfervationibus dicta funt, illuftrabit. In triangulo fphærico ABC dentur $AB = 36°$, $AC = 40°$, & $BC = 48°$. Quæratur angulus A juxta formulam $cof A = \frac{cof BC - cof AC \times cof AB}{fin AC \times fin AB}$. (155)

	cof AC - - -	9, 88425	- - complem. Arithm. *fin* AC - - - - - -	0, 19193
	cof AB - - -	9, 90796	- - complem. Arithm. *fin* AB - - - - - -	0, 23078
Igitur	*cof*AC×*cof*AB	9, 79221	- - 38°, 17′, 50″ Log. 2 - - - - - -	0, 30103
	compl. de BC - - - - - - -	42. 0 0		
	Summa	80°, 17′, 50″.	femif. 40°. 8′. 55″. log. *cof*	9, 88331
	Different.	3, 42, 10.	femid. 1 . 51 . 5. log. *fin*	8, 50930
			Log. *cof* A - -	9, 11635

Eft itaque angelus $A = 82°. 29'. 19''$.

(*) Si complementa Arithmetica in hoc exemplo accipiantur juxta regulam præfcriptam ab authore, eorum ultimæ notæ unitate deficiunt.



ASTRO-

ASTRONOMIÆ GEOMETRICÆ ET PHYSICÆ LECTIONES ELEMENTARES.

SECTIO PRIMA.

Complectens partem primam Astronomiæ Solaris.

1.



Ita universum hunc tractatum adornabimus, ut præter Geometrica principia ab omnibus admissa nihil nobis postulemus, veluti daretur quispiam (quem observatorem deinceps appellabimus) qui Geometria instructus, sed Astronomiæ hactenus rudis, nihilominus Astrorum descriptionem exactam dare cuperet, idque methodo in observationibus, ac legitimo ratiocinio fundata, qua regulæ cælestium motuum tanta accuratione stabiliantur, ut, quo singula astra loco, temporis puncto quovis dato, seu id præterierit jam, seu futurum sit, oculo in quavis mundi plaga collocato, apparere debeant, reperiri possit.

2. Atque ut ordine progrediamur, supponemus primo observatorem nostrum in ipso solis centro constitutum, indeque ei cælum universum contueri licere, quemadmodum nobis nocte serena dimidii aspectus datur, alterius dimidii intuitum terræ nostræ opacitate prohibente.

3. Quod si itaque observator noster cæli figuram examinet, ea exacte sphærica apparebit, syderaque omnia instar punctorum luminosorum in cava hujus sphæræ superficie hærentium videbuntur, cujus centrum sol, ipseque adeo observatoris oculus occupet. Verum advertet illico, ex hoc apparente cæli statu veram figuram haud quaquam colligi posse, nec propterea solem in centro collocandum, nec astrorum eandem esse ab eo distantiam. Quippe experimur quotidie, non posse nos de diversa objectorum nos ambientium distantia certum judicium ferre, quamdiu in eodem loco immoti perstamus, nisi forte ejusmodi sint, de quibus usu quodam, & experientia scimus, nos in iis dijudicandis alias haud dece-

deceptos fuisse. At enim id genus oculorum judicium, cui fidere possimus, ad perpauca extenditur, ac fere ad prius jam cognitas objectorum dimensiones, ad motum proprium, denique ad motus eorum objectorum, quorum quæ nobis propiora sint, legitimo aliunde deducto ratiocinio statuere possumus. Accidit certe id homini in vasta quapiam planitie longius jam spatium progresso, quæ nulli adsita monti, nihil, qua in omnem partem porrigitur, oculis spectandum offert, præter arbores, quæ inæquabili, atque angulosо ambitu visui limitem ponunt. Hic profecto, si fidem oculis habeat, spatium hoc omne circulare esse judicabit, se se in centro, arbores exacte in circumferentia positas; cum alter quispiam ab hoc longiore intervallo remotus simili prorsus ratione existimabit, se in centro ingentis circuli constitutum, arbores, hominemque illum alterum, in peripheria collocatas. Neque unquam hi duo ab errore sese expedient, quamdiu in loco eodem perstant, atque ambientia eos objecta situm præsentem conservant; at ubi hic mutatus fuerit, alterque eorum, aut ambo moveri cæperint, ex motuum diversitate, adhibitis Opticæ, Geometriæque regulis, judicare poterunt, quænam objectorum ceteris, quantumque viciniora sint.

4. Ubi observator noster longiore tempore sydera consideraverit attente, duplex eorum genus notabit; alterum per cælestia spatia undique dispersorum, inæquali præditorum lumine, at semper immotorum, quæ propterea *stellas fixas*, aut simplici nomine *stellas* appellabit; alterum eorum, quæ inæquali velocitate solem ambiunt, atque ideo *stellæ errantes*, vel *Planetæ* dicenda sunt.

CAPUT I.

De stellis fixis.

5. Antequam ad alia progrediatur observator noster, illud concludet, 1*mo* satis esse, si stellarum fixarum, quoniam motu carent, exacta fiat descriptio, atque ordo earum, situsque, quem perpetuo inter se conservant, per observationes determinetur. 2*do*. Easdem tanquam puncta fixa, & terminos comparativos considerandas esse, ad quos motus Planetarum referantur: cum enim ex statione unica nulla alia motuum mensura haberi possit, quam per angulos, sub quibus spatia percursa observatori apparent, necesse est, ut ad hos definiendos stellæ fixæ adhibeantur tanquam totidem puncta luminosa in cavitate sphæræ fixa, cujus radius indefinitus sit, oculo observatoris in centro constituto. Atque

que hæc hypothesis, quam fingimus, extra erroris periculum est, quod angulorum magnitudo a laterum eos comprehendentium longitudine nullo modo dependeat.

Ex hoc stellarum usu apparet etiam necessitas catalogi accurati, in quo earum positio respectiva quam exactissime fieri possit, sit determinata; unde ab isto conficiendo Astronomiæ initium dandum.

6. Itaque observator inprimis eas in plures classes secundum luminis vivacitatem distribuet, ac maxime quidem illustres *stellas primæ magnitudinis* dicet; paullo his splendore inferiores vocabit *stellas secundæ magnitudinis*, itaque deinceps, ut tandem eas, quæ oculo nullo telescopio adjuto non nisi cum difficultate aliqua percipiuntur, *sextæ magnitudinis* appellet; *septimæ* vero, *octavæ* &c. censeat illas, quæ non nisi tuborum opticorum subsidio cernuntur.

7. Qua in re ut confusioni præcaveatur, possitque deinceps quævis stella denotari, quin opus sit singulis singula imponere nomina, omne cæli spatium in minora quædam certum stellarum numerum comprehendentia tribuet, in quorum singulis figuram quampiam, quæ commoda visa fuerit, depinget, arietem v. g., taurum, draconem, Herculem &c. ita quidem, ut in eam stellæ omnes, quæ in eo spatio continentur, referri possint, certisque figuræ partibus, a quibus nomen sortiantur, respondeant.

Ponamus in tali quapiam area certo cæli stellati spatio respondente taurum depictum esse: stella, quæ cum oculo figuræ hujus congruet, *oculus tauri*; quæ ad extremum cornu collocabitur, *cornu tauri* dicetur, & sic de reliquis. Hac ratione si qua nova inter stellas illas detegatur, facile erit, regionem cæli designare, in qua visa fuerit, dicendo nimirum, eam esse in cornu, aut versus frontem tauri.

Stellas porro intra aream ejusmodi figuræ comprehensas *constellationem* appellabit.

8. Denique quemadmodum in Geometria Practica, dum regionem aliquam in charta repræsentamus, supponimus, objecta quævis terna in illa existentia triangulum efficere, cujus latera ope catenæ mensoriæ, aliove instrumento investigamus, unumque triangulum alteri per latera communia connectimus; ita quoque observator noster finget, stellam quamvis cum duabus aliis ad libitum assumptis triangulum sphæricum constituere, cujus latera sint arcus sphæræ cælestis apparentis inter stellas intercepti: & quoniam ipse in centro horum arcuum collocatus est, eosdem ope quadrantis vel sectoris (cujus radius debitam habeat longitudinem, ut gradus, minuta, & secunda discerni possint) metiri poterit.

Poſtquam hac ratione arcus determinavit, qui diſtantias ſingularum ſtellarum a duabus, tribusve aliis metiuntur, ſtellas in ſuperficiem globi transferet, ac in ea conſtellationes depinget, aut chartas generales, particularesve conficiet: prorſus ut in ſuperficie globi terreſtris omnia loca telluris deſignantur, quorum diſtantia a ſeſe invicem cognita eſt, aut chartæ univerſales, aut topographicæ conſtruuntur.

9. Cum tellus, quam incolimus, plerumque ſtellarum partem nobis occultet, veteres Aſtronomi regionem cæli ſibi cognitam in præcipuas quadraginta octo conſtellationes partiti ſunt, quarum nomina Urſa minor, Urſa major, Draco, Cepheus, Caſſiopea, Andromeda, Perſeus, Auriga, Corona Borealis, Hercules, Lyra, Cygnus, Serpentarius ſive Ophiuchus, Serpens, Sagitta, Aquila, & Antinous, Delphinus, Equuleus, Pegaſus, Trigonum Boreale, Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Scorpius, Sagittarius, Capricornus, Aquarius, Piſces, Cetus, Orion, Eridanus, Lepus, Canis major, Canis minor, Argonavis, Hydra, Crater, Corvus, Centaurus, Lupus, Ara, Corona Auſtralis, Piſcis Auſtralis. Sed cum labente tempore navigationis beneficio terræ antiquis incognitæ detectæ eſſent, maxime a tercentis circiter annis, in quibus ſtellæ polo Auſtrali, ſeu Antarctico, viciniores, ideoque in Europa non conſpiciendæ, videri poſſunt, eæ in duodecim novas conſtellationes redactæ ſunt, dicunturque Pavo, Grus, Toucan, Phœnix, Dorado, Piſcis volans, Hydrus, Chamæleon, Muſca, Avis Indica, Triangulum Auſtrale, Indus.

10. Figuræ hiſce conſtellationibus tributæ, non aliunde duxerunt originem, quam a phantaſia eorum, qui primi illis impoſuerunt nomina. Aliud de priſcis illis dicendum, quæ e ceremoniis & ritbus ſacris apud Æthiopes, Ægyptios, Phœnices, atque Chaldæos deſumptæ ſunt. Græci partem earum adoptarunt, partem immutarunt novis nominibus, ac figuris e Mythologia petitis. Qua de re complures eruditæ lucubrationes prodierunt, quas, qui volet, conſulet.

11. Antiquiſſimæ obſervationes, quæ ad nos uſque pervenerunt, a Timochari, & Ariſtillo, 300 circiter ante Chriſtum natum annis factæ ſunt. Poſt hæc 130 fere annis ante æram Chriſtianam Hipparchus Rhodius catalogum fixarum viſibilium confecit, quem poſt 260 annos Ptolomæus Alexandrinus Aſtronomus revidit, & publicavit, 1026 ſtellarum nomina & poſitionem continentem, e quibus 1022 ab Hipparcho determinatæ fuerant. Atque hoc uno Catalogo Aſtronomi uſque ad ſextum decimum ſæculum utebantur. Circiter annum 1437 Ulugh-Beig Tartarorum Princeps Ptolomaico accuratiorem confici curavit; ac Tycho-Brahe A. 1600; Hevelius 1670; Flamſteedius 1690 ſuum quisque catalogum prioribus & ampliorem, & accuratiorem dederunt. Hevelius novis conſtellationibus lacunas ab antiquis relictas implevit, quem ea in re Flamſteedius, & maxima Aſtronomorum pars ſecuti ſunt.

Ioannes Bayerus, natione Germanus, chartas cæleſtes æri inciſas publici juris fecit A. 1603, in quibus omnes conſtellationes ſchematismis ſuis exhibentur, ſtellas, quibus quæque conſtat, comprehendentibus. Atque ut ſingulæ ſtellæ expedite, breviterque indicari poſſent, iis ſingulas Græci, Latinive Alphabeti litteras appoſuit, vocando unam α, alteram β &c., ordine fere magnitudinis ſervato. Hanc denominandi rationem moderni Aſtronomi imitantur, dum frequentiſſime ita ſtellas indicant, ut dicant v. g. η Urſæ majoris, γ Draconis &c, dum ſtellam ſecundæ magnitudinis in extrema cauda Urſæ majoris, vel lucidam capitis Draconis intelligi volunt.

12. Ut nomina & ſitus ſtellarum addiſcantur, opus eſt vel tabulis majoribus cæleſtibus quales ſunt, quas Bayer, P. Pardies, Royer, Senex, Flamſteed in Atlante cæleſti ediderunt; vel ſaltem globo cæleſti bene grandi. Tum nocte innubi ſtellæ quæpiam paſſim cognitæ quærendæ, quales ſunt v. g. quas vulgus *Gallinam Glocitantem* vocat, ſeu ſex ſtellularum

larum congeries, ab Astronomis Plejades dictæ in constellatione tauri; aut vero quas *tres Reges* appellant, quæ in cingulo Orionis sunt; vel denique septem illæ, quæ plaustrum nominantur, suntque præcipuæ septem ursæ majoris. Ubi ejusmodi in cælo occurrerint, eædem in charta quærantur, quæ ita disponenda erit, ut stellæ in ea depictæ eundem quam proxime situm referant intuenti, quem in cælo habent: ab his si ad vicinas, indeque ad alias transeatur, nomen, situs, ordo, figura constellationum reperietur, dum ea, quæ in cælo apparent, cum charta diligenter semper comparantur.

13. Quod ad locum verum, quem quævis stella in universo occupat, quod ad distantiam a sole, ad naturam, magnitudinem, numerum, utilitatem, ac finem peculiarem, ob quem a Deo singulæ creatæ sunt, attinet, nihil equidem certi observator noster statuere poterit. Cum enim æque immotæ sint, ac sol, nullam basin habere potest, qua data artificio trigonometrico distantiam metiatur. Et cum præterea eo semper plures deteget, quo perfectioribus telescopiis usus fuerit, non immerito de certo earum numero ineundo desperabit. Verum e tanta luminis vivacitate, atque quod solis instar motu careant, conjecturam admodum probabilem ducet, eas totidem esse soles, hoc est, natura, magnitudine, ac lumine huic astro fere æquales, ac propterea, quemadmodum istud, in centris totidem systematum planetarum habitabilium, quorum motus regant, collocatas. In hac hypothesi stellis fixis ea applicare licebit, quæ in sole detexerit; quin etiam distantiarum tum inter se, tum a sole, rationem utcunque inire, idque ex diversa cujusque luminis intensitate, quæ secundum Optices leges rationem inversam quadratorum distantiarum ab observatore sequitur.

Caput II.

De Planetis.

Articulus I.

De diversis Planetarum motibus generatim, & eorum natura.

14. Descriptionem fixarum determinatio motus Planetarum excipiet, quorum quidem

I. Imprimis observator noster sex numerabit, qui omnes versus eandem plagam circa solem moventur, similem fere viam secuti, sed dissimili admodum celeritate. Unde nomina iis sua imponet, certosque characteres seliget, quibus singulos designet. Dicet *Mercurium*, qui omnium movetur celerrime, hacque eum

nota diftinguet (☿), reliquos fequentibus fignis ac nominibus indicabit: *Venerem* ♀, *Terram* ♁, *Martem* ♂, *Jovem* ♃, *Saturnum* ♄.

15. II. Advertet, Terræ femper adeffe tanquam comitem exiguam quamdam ftellulam, Jovi quatuor, quinque Saturno, quæ planetas fuos jam præcedunt, jam fequuntur; nunc per medium eorum difcum tranfeunt, nunc fub eodem, dum ejus latitudinem emetiantur, latent. Has *Planetas fecundarios*, aut *fatellites*, aut *lunas* appellabit.

16. III. Obfervabit, diverfis temporibus apparere corpora, quæ cum fub initium exigua, obfcura, limbo male terminato, & tardiffimi motus videantur, brevi dein crefcunt, luce ac celeritate fenfibiliter aucta ufque ad certum terminum, poft quem iterum iisdem fere gradibus magnitudo, lumen ac velocitas eorum deficit, quibus accreverat, dum tandem penitus difpareant. Atque hujusmodi quidem corpora verfus omnem cæli plagam deteget, alia aliis, oppofitisque directionibus progredientia. Hæc *cometas* dicet.

17. IV. Superficie planetarum primariorum attentius confiderata, notabit in ea partes quasdem ceteris obfcuriores (quas *maculas* vocabit): has videbit fitum perpetuo mutare, ab uno verfus alterum limbum progredi, poftea fub planeta occultari, denuo ad priorem redire limbum, itaque conftante quadam ratione motum continuare. Præterea animadvertet, hafce maculas, dum a limbo verfus medium difcum accedunt, femper latiores fieri; contrahi vero, dum inde verfus alterum abeunt, in quo conftitutæ, fervata priore, quam in medio habebant, altitudine, tenuis fili inftar apparent. Denique obfervabit, tempus, quo in difco planetæ videntur, aliquantum brevius effe illo, quo in ejus parte averfa latent, dum a limbo, in quo videri definunt, ad priorem revertuntur.

Ex his concludet, maculas corpori planetæ inhærere, planetasque globos effe circa axes fuos motos, ideoque fingulis duos fimul ineffe motus, alterum, quo circa axem fuum exiguo tempore convertuntur; alterum, quo folem ambiunt. Duplex hic motus ita fere peragitur, ac fi globulus exiguus in fuperficie magni cujusdam globi incederet. Prior horum motuum, *diurnus* vel *rotationis* dicitur; alter *annuus* vel *revolutionis*.

18. Antequam telescopia inventa fuiffent (quod circa A. 1609. evenit) nemo quidquam de motu rotationis fufpicabatur. Keplerus nihilominus, Aftronomus Germanus, qui circa ea tempora floruit, in fuis hypothefibus phyficis eum foli attribuit, id, quod poftea ex obfervationibus confirmatum eft. Nam deprehenfum eft, folem intra $25\frac{1}{2}$ dies circa axem volvi, Iovem 9^h $56'$; Martem 24^h. $40'$, Venerem 23^h. $20'$, terram 23^h. $56'$. $4''$, Ingens diftantia, ac luminis debilitas in Saturno; exilitas Mercurii, ac folis vicinia impediverunt quidem adhuc, quo minus hic motus in planetis

netis istis determinaretur; attamen analogia cum ceteris magnam adfert verisimilitudinem, etiam istos motu vertiginis circa axem moveri.

19. Quod macularum naturam concernit, evidens est, quoniam planetæ non, ut stellæ, propria luce fulgent, sed a sole collustrati eam tantum versus nos reflectunt, uti ex sequentibus patebit, evidens, inquam, est, maculas nihil aliud esse, quam partes quasdam superficiei planetarum minus aptas luci reflectendæ, quales forent maria, sylvarum tractus &c. Et certe quisque facile concipit, terram e magna distantia visam ita apparituram maculis conspersam, uti diversæ ejus partes in globo artificiali depinguntur. Sic maria lumen fere totum absorbentia tractus quosdam obscuros exhiberent; insulæ exiguæ, emergentesque scopuli lucidissima puncta viderentur, majores continentes luminosæ apparerent, hinc inde clarioribus, obscurioribusque partibus distinctæ. Nam terræ cultæ, lacubus & diversis aquis interruptæ, sylvis consitæ, minus incidentis luminis remittere possunt; at vero partes ceteris candidiores, majorum montium arida juga, aut perpetuis nivibus rigentia magnam ejus copiam reflectant, est necesse. Quin etiam si melioris notæ telescopio, 12 aut 15 pedes longo, lunarem globum consideremus, facile in eo valles ac montes distinguimus. Quapropter verisimile fit, planetas aut habitatos esse, aut saltem habitabiles, telluris nostræ instar. Quo de argumento legi possunt Fontenellius de pluralitate mundorum, & Hugenius in Cosmotheoro.

ARTICULUS II.

De legibus motus Planetarum Primariorum.

20. Primum est, dum in leges motuum planetarum inquiritur, ut certa quædam mensura stabiliatur, ad quam eorum velocitates exigantur. Itaque tempus & spatium in cælo quodpiam assumendum est, quoniam velocitas ab his duabus rebus desumitur, eaque major est, qua spatium majus minore tempore percurritur, & ex opposito. Verum Geometra in centro motus orbicularis constitutus spatia reipsa percursa determinare nequit: siquidem ad hoc necesse est, ut corporum in orbem motorum distantia sciatur, id, quod fieri non potest. Quare spatiorum loco observator angulos adhibebit, seu arcus apparentes, quos in cava cæli superficie Planetæ describere videntur.

21. Quod ad tempus pertinet, arbitrarium est, qua quis ratione illud mensurare velit, modo eadem id semper fiat. Unde observator eum in finem revolutiones diurnas Planetæ, cujus libuerit, assumet, v. g. telluris nostræ, cujus unam circa axem rationem, respectu ad solem habito, *diem* appellabit: id tempus rursus in 24 partes æquales, sive *horas* dividet; horam in 60 *minuta*, minutum in 60 *secunda* &c. Denique supponet, tum diei initium haberi, cum certa quædam macula in telluris superficie notata, v. g. quam urbs Parisina efficeret, directe soli opponitur: tum item diem finiri, cum eadem macula ad priorem situm præcise redierit.

 22. Du-

22. Duplici itaque inſtrumentorum genere opus obſervatori, quibus Planetarum motus determinet, altero quidem circulo, aut portione circuli in gradus, minuta, ac ſecunda accuratiſſime diviſi, quo angulos, ſive arcus deſcriptos ab iis metiatur; altero horologio, cujus motus quam maxime æquabilis, horas, minuta, & ſecunda temporis exacte indicante.

ARTICULUS III.

De revolutione annua Planetarum.

23. Ubi obſervator noſter quam accuratiſſime temporis punctum annotavit, quo ſinguli planetæ ad certam aliquam ſtellam fixam venerunt, atque tempus obſervavit, quo deinceps ſæpius ad eandem redierunt, cum qua eos prima vice conſpexit, deprehendet, *revolutionum ſingularum intervalla ejusdem planetæ uſque ad eandem fixam æqualia eſſe,* earumque tempora eſſe, ut in ſequente tabella exhibentur.

Tempus revolutionis annuæ

MERCURII	- - -	87	dies	23	hor.	$15\frac{1}{2}$	minut.
VENERIS	- - -	224	- -	16	- -	$48\frac{1}{3}$	
TELLURIS	- - -	365	- -	6	- -	$9\frac{1}{4}$	
MARTIS	- - -	686	- -	23	- -	$30\frac{1}{2}$	
JOVIS	- - -	4332	- -	12	- -	0	
SATURNI	- -	10759	- -	8	- -	0	

ARTICULUS IV.

De via, quam ſequuntur Planetæ.

24. Hac in re tria examinanda ſunt obſervatori: *Primo* an omnes partes curvæ, quam planeta aliquis deſcribit, ſint in eodem plano, aut vero orbita ſit duplicis curvaturæ hoc eſt, nulli certo plano affixa. *Secundo* ſiquidem hæc curva in eodem ſit plano, videndum, an ſit in plano circuli maximi ſphæræ cæleſtis, an alterius minoris. *Tertio* inquirendum, an omnium planetarum orbitæ in uno eodemque ſint plano, an potius in diverſis, ad ſe ſe invicem diverſimode inclinatis.

25. Ut

25. Ut his dubiis lumen affundatur, advertet obſervator, quod ſi omnes ſucceſſive ſtellas (ternas ſemper, vel quaternas accipiendo) per quas via planetæ accurate tranſit, comparet, omnes in eadem præciſe linea occurrant: qua de re certiorem ſe reddet ope fili tenſi, & aliquantum ab oculo remoti. Unde inferet, orbitam planetæ eſſe curvam in plano circuli maximi deſcriptam: nam plana circulorum maximorum omnia in ſphæræ centro ſe interſecant; juxta filum vero tenſum ſi aſpiciatur, ſitus talis circuli determinatur: igitur & ſtellæ, quæ in eo filo poſitæ videntur, ſunt in plano circuli maximi. Atque hac ratione priora duo dubia ſublata ſunt.

26. Eadem methodo deteget etiam, quod quamvis plana orbitarum diverſorum planetarum parum admodum ad ſe ſe invicem inclinentur, nihilominus tamen ſenſibiliter ſint diverſa: id, quod evidentius adhuc in conjunctione Planetarum apparet: quandoquidem fere ſemper contingit, ut alter ſupra alterum tranſeat, & quidem intervallo aliquot graduum.

27. Ulterius obſervabit, viam, quam planetæ inſiſtunt, ſucceſſive tranſire per conſtellationes Arietis, Tauri, Geminorum, Cancri, Leonis, Virginis, Libræ, Scorpii, Sagittarii, Capricorni, Aquarii, Piſcium. Et quoniam ea e ſenis planetarum orbitis componitur, quæ jam a ſe divergunt, jam accedunt iterum, ac ſe interſecant; latiorem aliquam faſciam, aut Zonam efformare videtur: fere quemadmodum in terra, dum plures peculiares orbitæ pone invicem ducuntur, quæ nunc parallelæ procurrant, nunc aliquantum a ſe invicem diſcedant, dum rurſus ſe interſecent, omnes ſimul latam quamdam viam currulem conſtituunt. Faſciam hanc obſervator *Zodiacum* vocabit, ejusque totum ambitum, initio a ſtella, qua libuerit, ſumpto, v. g. a prima Arietis, in duodecim partes æquales dividet, quas *ſigna* appellabit. Signum igitur quodvis triginta gradus occupabit, ac nomen ducet vel a numero ordinis quo poſt ſtellam illam pro principio diviſionis aſſumptam occurrit, vel a ſigno correſpondente. Ita dicetur ſignum primum, vel, ſignum arietis; ſignum ſecundum, aut ſignum tauri &c.

28. Antiqui Græcorum Aſtronomi, a quibus nomina & figuram conſtellationum etiamnum habemus, pro primo Zodiaci puncto ſtellam γ in auricula Arietis poſuerunt, quippe quæ prima erat conſtellationis, in qua ſol in æquinoctio verno verſabatur. Et eo quidem tempore quævis conſtellatio ſuo ſigno, cujus nomen gerebat, accurate reſpondebat: ſic conſtellatio arietis primum, tauri ſecundum ſignum &c. occupabant. Verum quoniam punctum æquinoctiale ſingulis annis 50'' contra ſignorum ordinem redit, ut in ſequentibus videbimus, ſtellæ omnes tantundem progredi videntur: ac ab illo jam tempore γ arietis fere integro ſigno eſt promota; ex quo fit, ut conſtellationes non amplius ſuis ſignis reſpondeant, quamvis hæc antiqua ſua nomina ſemper retineant. Sic conſtellatio arietis modo fere tota eſt in ſigno tauri, conſtellatio tauri in ſigno Geminorum &c., ut ex chartis cæleſtibus colligi poteſt.

Ex

Ex modernis Aſtronomis plurimi motus cæleſtes a punćto, in quo reipſa æquinoćtium fit, computant; aliqui tamen a ♈ Arietis. Sed iſti, ut cum prioribus conſentiant, in omnibus ſuis calculis differentiam inter ſtellam illam, & punćtum æquinoćtiale verum addunt.

29. Ad exprimenda commodius ſigna Zodiaci, certi quidem charaćteres inventi ſunt, quos quisque ſibi perſpećtos reddere debet ac familiores. En illos in ſequente tabella

Aries - - -	♈	Leo - - -	♌	Sagittarius - - -	♐
Taurus - - -	♉	Virgo - - -	♍	Capricornus - - -	♑
Gemini - - -	♊	Libra - - -	♎	Aquarius - - -	♒
Cancer - - -	♋	Scorpius - - -	♏	Piſces - - -	♓

Illud etiam opportune hic monendum, vocem *Signi* paſſim adhiberi ad ſignificandos 30 gradus, quin ad gradus Zodiaci attendatur. Sic cum dicitur, punćtum unum cæli ab altero duobus ſignis diſtare, nihil aliud intelligitur, quam arcum inter duo illa punćta interceptum ſexaginta graduum eſſe.

ARTICULUS V.

De cauſis inæqualitatis motuum Planetarum.

30. Ubi obſervator noſter ſingillatim Planetarum motus curioſius conſideraverit, intelliget illico, eorum celeritatem inæquabilem eſſe. Atque præcipuam ſtudii ſui partem exiſtimabit, ut legem hujus inæqualitatis detegat. Qua in re ut certi aliquid ſtatuat, ac de cauſa inæquabilis illius motus ſecurus eſſe poſſit, ſiquidem unica ſit, a qua dependeat; aut ſi plures concurrant, ut ſingularum aćtiones ſeparatim cognoſcat, ac evolvat; & ut denique modum earum agendi penitus perſpećtum ſibi reddat, conſtituat ſingulis diebus hora eadem cujusvis planetæ locum in ſua orbita durante ſaltem una revolutione integra obſervare. Sic ad eruendam theoriam Mercurii, ſupponamus ab obſervatore noſtro ſingulis diebus in ipſo meridie loca ejus in orbita per inſtrumenta ita determinata eſſe, ut in tabula mox ſubjicienda exhibentur; hoc eſt obſervatum eſſe numerum ſignorum, graduum, minutorum, & ſecundorum arcus cæleſtis inter centrum Mercurii, & illam ſtellam intercepti, cum qua in ſua orbita conjunćtus videbatur, quando ſignum arietis ingrediebatur, & quidem menſura arcus juxta direćtionem motus planetæ accepta, id, quod *ſecundum ordinem ſignorum* fieri dicitur.

31. Obſervationibus iſtis diligenter expenſis, acceptaque differentia ſingulorum locorum Mercurii, uti ea a regione binarum quarumvis, expoſita eſt, ut motus diurnus, & celeritas angularis vera, quam quovis die habuit, obtineatur, ulterius obſervator indagabit *Primo*, an non inæqualitates ejusmodi ſolum apparentes ſint, aut ex eo proveniant, quod Mercurius diſtantiam relate ad ſolem tantummodo mutet, quamvis motus in ſe ſit ſemper uniformis? Etenim experientia docemur, corpus motu æquabili latum videri eo celerius progredi, quo minor eſt ejus diſtantia, & ex oppoſito; adeo ut Lex Optica ſit, *inæqualitates apparentes celeritatum æqualium eſſe in ratione reciproca diſtantiarum ab oculo ſpectatoris. Secundo:* an inæqualitas iſta reipſa haberi poſſit, ac motus planetæ jam velocior, jam tardior eſſe, quin propterea diſtantia ejus a ſole mutetur. *Tertio* denique, an non ab utraque hac cauſa conjunctim proficiſcatur?

Ut dubitationes iſtæ tollantur, obſervandum eſt, quod dum corpora ad majorem diſtantiam, quam prius habuerint, recedunt, eorum diametri apparentes minuantur, ut altera etiam lex ſit in Opticis, *quod quando anguli, ſub quibus objectum videtur, exigui ſunt, diametri ſint in ratione reciproca diſtantiæ ab oculo.* Ex duabus his Optices regulis facile concluditur, celeritates apparentes ejusdem objecti motu æquabili lati eſſe in ratione directa angulorum, ſub quibus ejus diametri videntur. Unde obſervator noſter ſequentes duas regulas deducet:

32. I. *Si inæqualitas motus planetarum vera eſt, & unice ex mutatione velocitatis in diverſis orbitæ locis dependet, non mutata diſtantia a ſole; eorum diametri ſub eodem conſtanter angulo videri debent.*

33. II. *Si motus planetarum in ſe uniformis eſt, & inæqualitas tantum apparens, quæ ſolum ex mutata diſtantia a ſole proveniat; eorum celeritates, quas temporibus æqualibus habent, & arcus, quos iisdem temporibus percurrunt, ſunt ut eorum diametri.*

34. Supereſt jam, ut videamus, an aliqua iſtarum regularum locum habeat. Hinc obſervator noſter diverſis temporibus ſumma accuratione angulos, ſub quibus Diameter Mercurii videtur, determinabit, maxime vero tum, quando ejus celeritas maxima eſt, & minima. Inveniet vero angulum hunc ab illo tempore, quo celeritatem minimam habet, ſemper creſcere, uſque dum ad celeritatem maximam perveniat: & viciſſim. Ita tempore celeritatis maximæ obſervabit angulum eſſe 25″. 23‴; & quando celeritas minima eſt, 16″. 37‴. Ex quo evidenter colligitur, primam regulam locum haud habere; & ſiquidem orbita Mercurii circulus

ſit, ſolem non eſſe in ejus centro, quoniam diſtantiam ab eo perpetuo mutat.

35. Aſſumpta itaque altera regula fiat hæc proportio: ut diameter minima 16″. 37‴ eſt ad celeritatem minimam 2°, 44′, 20″ inter diem 9 & 10 Auguſti obſervatam: ita diameter maxima 25″. 23‴ eſt ad celeritatem maximam, quam aliquando Mercurius habere poteſt, ſi ſecunda hæc regula locum habeat. Reperitur autem quartus terminus 4°, 11′, 5″; & ex obſervatione inter diem 26 & 27 Junii celeritas Mercurii erat 6°, 23′, 27″. Igitur infertur *primo*, inæqualitates planetarum non eſſe mere apparentes, & unice ex diverſa eorum a ſole diſtantia pendere. *Secundo*, quia celeritas maxima obſervata excedit 2°, 12′, 22″, illam, quæ juxta ſecundam regulam per calculum deducta fuit, neceſſe eſt, ut dum Planetæ ad ſolem accedunt, motus accelerationem veram acquirant, quæ cum apparente illa, atque ex vicinia majore pendente conjungenda eſt: atque ita *inæqualitas motus planetarum habet cauſam alteram Phyſicam, alteram Opticam; hoc eſt, partim eſt realis & vera, partim apparens.*

36. Veteres Aſtronomi omnes inæqualitatem Phyſicam & Opticam confuderant in unam, quæ res omnem eorum theoriam evertit, quoniam hac ratione erroneas rationes diſtantiarum neceſſe eſt inferri. Keplerus primus utriuſque cauſæ exiſtentiam demonſtravit, oſtenditque, utramlibet æqualiter fere in hunc effectum influere. Videatur ejus liber, cui titulus: *Aſtronomiæ pars Optica*. pag. 341.

Diſtan-

Distantiæ Mercurii a prima stella Arietis, in ipso meridie observatæ.

A. 1740.		fig.	grad.	min.	sec.	differentiæ °	′	″
Jun. d.	14.	0.	2.	4.	30	5.	2.	37.
	15.	0.	7.	7.	7	5.	12.	23.
	16.	0.	12.	19.	30	5.	22.	14.
	17.	0.	17.	41.	44	5.	31.	53.
	18.	0.	23.	13.	37	5.	41.	20.
	19.	0.	28.	54.	57	5.	50.	12.
	20.	1.	4.	45.	9	5.	58.	31.
	21.	1.	10.	43.	40	6.	5.	53.
	22.	1.	16.	49.	33	6.	12.	12.
	23.	1.	23.	1.	45	6.	17.	17.
	24.	1.	29.	19.	2	6.	20.	49.
	25.	2.	5.	39.	51	6.	23.	0.
	26.	2.	12.	2.	51	6.	23.	27.
	27.	2.	18.	26.	18	6.	22.	20.
	28.	2.	24.	48.	38	6.	19.	29.
	29.	3.	1.	8.	6	6.	15.	20.
	30.	3.	7.	23.	26	6.	9.	42.
Jul. d.	1.	3.	13.	33.	8	6.	2.	53.
	2.	3.	19.	36.	1	5.	55.	8.
	3.	3.	25.	31.	9	5.	46.	31.
	4.	4.	1.	17.	40	5.	37.	25.
	5.	4.	6.	55.	5	5.	27.	52.
	6.	4.	13.	22.	57	5.	18.	10.
	7.	4.	17.	41.	7	5.	8.	21.
	8.	4.	22.	49.	28	4.	58.	33.
	9.	4.	27.	48.	1	4.	49.	2.
	10.	5.	2.	37.	3	4.	39.	46.
	11.	5.	7.	16.	49	4.	30.	40.
	12.	5.	11.	47.	29	4.	22.	24.
	13.	5.	16.	9.	53	4.	14.	33.
	14.	5.	20.	24.	26	4.	6.	28.
	15.	5.	24.	30.	54	3.	58.	4.
	16.	5.	28.	29.	38	3.	52.	9.
	17.	6.	2.	21.	47	3.	45.	43.
	18.	6.	6.	7.	30	3.	39.	47.
	19.	6.	9.	47.	17	3.	34.	2.
	20.	6.	13.	21.	19	3.	28.	48.
	21.	6.	16.	50.	7	3.	23.	57.
	22.	6.	20.	14.	4	3.	19.	20.
	23.	6.	23.	33.	24	4.	15.	17.
	24.	6.	26.	48.	41	3.	11.	19.
	25.	7.	0.	0.	0	3.	7.	44.
	26.	7.	3.	7.	44	3.	4.	27.
	27.	7.	6.	12.	11	3.	1.	31.
	28.	7.	9.	13.	42	2.	58.	51.
	29.	7.	12.	12.	33	2.	56.	24.

		fig.	grad.	min.	sec.	differentiæ °	′	″
Jul. d.	30.	7.	15.	8.	57	2.	54.	11.
	31.	7.	18.	3.	8	2.	52.	15.
Aug. d.	1.	7.	20.	55.	23	2.	50.	27.
	2.	7.	23.	45.	50	2.	49.	2.
	3.	7.	26.	34.	52	2.	47.	45.
	4.	7.	29.	22.	37	2.	46.	36.
	5.	8.	2.	9.	13	2.	45.	44.
	6.	8.	4.	54.	57	2.	45.	8.
	7.	8.	7.	40.	5	2.	44.	43.
	8.	8.	10.	24.	48	2.	44.	24.
	9.	8.	13.	9.	12	2.	44.	20.
	10.	8.	15.	53.	32	2.	44.	33.
	11.	8.	18.	38.	5	2.	44.	48.
	12.	8.	21.	22.	53	2.	45.	25.
	13.	8.	24.	8.	18	2.	46.	10.
	14.	8.	26.	54.	28	2.	47.	4.
	15.	8.	29.	41.	32	2.	48.	17.
	16.	9.	2.	29.	49	2.	49.	37.
	17.	9.	5.	19.	28	2.	51.	8.
	18.	9.	8.	10.	36	2.	53.	10.
	19.	9.	11.	3.	46	2.	55.	13.
	20.	9.	13.	58.	59	2.	57.	23.
	21.	9.	16.	56.	22	3.	0.	1.
	22.	9.	19.	56.	23	3.	2.	48.
	23.	9.	22.	59.	11	3.	5.	55.
	24.	9.	26.	5.	6	3.	9.	20.
	25.	9.	29.	14.	26	3.	12.	56.
	26.	10.	2.	27.	22	3.	17.	10.
	27.	10.	5.	44.	32	3.	21.	24.
	28.	10.	9.	5.	56	3.	26.	2.
	29.	10.	12.	31.	58	3.	31.	7.
	30.	10.	16.	3.	5	3.	36.	36.
	31.	10.	19.	39.	41	3.	42.	20.
Sep. d.	1.	10.	23.	22.	1	3.	48.	25.
	2.	10.	27.	10.	26	3.	55.	20.
	3.	11.	1.	5.	46	4.	2.	23.
	4.	11.	5.	8.	9	4.	9.	54.
	5.	11.	9.	18.	3	4.	17.	49.
	6.	11.	13.	35.	52	4.	25.	48.
	7.	11.	18.	1.	40	4.	35.	0.
	8.	11.	22.	36.	40	4.	43.	52.
	9.	11.	27.	20.	32	4.	53.	19.
	10.	0.	2.	13.	51	5.	2.	54.
	11.	0.	7.	16.	45	5.	12.	42.
	12.	0.	12.	29.	27	5.	22.	31.
	13.	0.	17.	51.	58			

ARTICULUS VI.

De figura orbitæ Planetarum.

37. Ex ulteriore obſervationum allatarum examine patebit obſervatori noſtro *Primo:* velocitatem Mercurii inde a maxima, quam 26 die Junii annotavit, uſque ad minimam die 9 Auguſti obſervatam regulariter admodum decreſcere, ac poſtea iterum eadem regularitate augeri, qua prius imminuta fuit, ita quidem, ut æquali utrimque ab his duobus terminis intervallo eadem ſit. *Secundo* circa eosdem celeritatis creſcentis, & decreſcentis limites, minorem ejus eſſe inæqualitatem, magisque ibi accedere ad uniformem. *Tertio* Limites hos ſex ſignis a ſe invicem, ſive orbitæ dimidio diſtare, ac temporis intervallum, quo ab altero ad alterum pervenit, eſſe 44 dierum, dimidium ſcilicet revolutionis annuæ Mercurii tempus. *Quarto* ubi Mercurius primis Septembris diebus, ad eadem loca, in quibus menſe Junio obſervatus fuerat, rediit, eum eadem celeritate in iisdem cæli locis moveri.

38. Hinc autem obſervator ſequentia deducet: Primo *Curvam, a planeta deſcriptam, regularem eſſe, & in ſe redire.* Secundo *duos celeritatis maximæ & minimæ terminos* (quos generali vocabulo *Apſides* dicet; & *ſuperiorem* quidem, vel *Aphelium*, illud orbitæ punctum, in quo celeritas eſt minima; *inferiorem* vero, aut *perihelium* alterum, in quo celeritas eſt maxima) *eſſe reſpectu ſolis diametraliter oppoſitos*, ut linea eos conjungens (quæ *linea apſidum* vocatur) curvæ diameter eſſe debeat per ſolis centrum tranſiens. Tertio *ſitum lineæ apſidum ad ſenſum conſtantem manere, eamque verſus eadem cæli puncta ſemper dirigi*, quandoquidem (23) obſervatum eſt, reditum planetæ ad eandem fixam, cum qua obſervatus prius fuit, æquali ſemper tempore haberi, ejusque velocitates in iisdem cæli locis æquales eſſe. Quarto *cauſam motus planetæ in æquali utriuſque a linea apſidum diſtantia æqualiter agere.*

ARTICULUS VII.

De hypotheſi Phyſica ad inveniendam curvam, quam planeta deſcribit, & determinandam legem inæqualitatum in diverſis orbitæ locis.

39. Illud nunc reſtat, ut duce Mechanica, inveniatur hypotheſis aliqua phyſica, in qua Planeta alternis vicibus ad ſolem accedat, & ab eodem recedat; motum acceleret, & retardet iis legibus, quæ cum obſervationibus conſentiant, ita ut ex hac hypotheſi

thesi ope Arithmeticæ & Geometriæ statutis calculi regulis inveniri possit, quidquid seu lapsis retro temporibus observatum est, seu deinceps in his motibus continget.

40. Quod ut cum methodo fiat, & certitudine, quam possumus sperare, maxima, observator sequentia ex ordine principia Mechanices in mentem revocabit.

Articulus VIII.

Principia Mechanicæ, quibus tota Astronomia Physica innititur.

Axioma I. *Effectus sunt proportionales suis causis.*

Hoc est: effectus ea ratione crescit vel decrescit, qua actio causæ eum producentis crescit, vel decrescit.

42. Axioma II. *Nullum corpus ex se ipso statum motus vel quietis mutare potest, in quo semel est positum.*

43. Hinc sequitur Primo: *Corpus, quod semel movetur, semper motum iri, nisi sit causa aliqua, quæ ejus motum extinguat.*

44. *Secundo:* Corpus, cui vis ad motum juxta certam directionem impressa est, semper movendum esse directione & celeritate illi vi competente, quin unquam per se alterutram mutet. Quare *Corpus quod vi impressa movetur, de se semper linea recta, & motu æquabili moveri perget.*

45. Tertio: *Corpus in motu constitutum non posse celeritatem suam minuere, nisi nova ei vis, cum prima magis opposita, quam conspirans, imprimatur; nec posse etiam celeritatem augere, nisi novam recipiat vim, quæ cum prima magis conspiret, quam opposita sit.*

46. Quarto: *Corpus motum non posse describere polygonum aliquod, nisi a causa quadam a via rectilinea detorqueatur, quæ tunc in illud semper sub nova directione agat, quando ad extremum alicujus lateris illius polygoni pervenit.*

47. Axioma III. *Corpus, quod agit in alterum, vel potentia quævis agens in corpus, semper invenit resistentiam suæ actioni æqualem, & ejus directioni oppositam.* Id, quod alias sic efferri solet: *actioni semper æqualis & contraria est reactio.*

Etenim nequit concipi actio Physica sine obstaculo, hoc est, sine resistentia. Imo nequit cogitari actio major, quam sit obstaculum; si enim vis major, quam ad effectum producendum necessaria sit, adhibeatur, excessus ille inutilis est, nihilque agit: & si actio minor sit, quam obstaculum, effectum non habebit, sed destruetur a resistentia obstaculi æquali, & directe opposita. Si lapidem funi alligatum manu traham, funis tota sua longitudine æqualiter tenditur, manifesto indicio, resistentia lapidis tantundem eum retrahi versus lapidem, quantum versus me a manu trahitur. Nam si funis hic

ita tenſus circa medium ſcindatur, pars, quam manu teneo, verſus me elaſticitate ſua reſilit, pars vero lapidi alligata verſus lapidem: atqui ſi a manu ſola tractus fuiſſet, non item a lapide, evidens eſt, eam partem, quæ lapidi alligatur, non ſecus ac alteram, verſus manum trahentem niſuram, nequaquam autem verſus lapidem.

48. Mechanici *vim inertiæ* appellant proprietatem illam communem corporum, qua nituntur in ſtatu, quem ſemel habent, perſiſtere, atque omni ejus mutationi reſiſtunt.

49. Definitio I. *Motus uniformis* ſive *æquabilis* dicitur, quem corpus per actionem inſtantaneam potentiæ alicujus recipit; ſeu quo temporibus æqualibus ſpatia æqualia percurrit.

50. II. *Motus uniformiter acceleratus* eſt, qui in corpore repetitis continuo actionibus æqualibus, celeritatem ſingulis tempuſculis æqualibus æqualiter augentibus, producitur.

51. THEOREMA I. *Si corpus motu æquabili fertur, ſpatia temporibus æqualibus percurſa ſunt ut celeritates; quæ vero celeritate eadem percurruntur, ſunt ut tempora; & celeritates, quibus ſpatia æqualia deſcribuntur, ſunt reciproce ut tempora.*

Patet enim, ſpatium motu æquabili percurſum tempore dato, v. g. uno minuto tanto fore majus, quo major eſt celeritas mobilis. Quod ſi altero minuto temporis celeritas ſit dupla, vel tripla, etiam ſpatium, quod deſcribetur, erit duplum vel triplum, adeoque ſemper in ratione celeritatis. Simili ratiocinio in reliquis theorematis partibus utendum. Ita evidens eſt, corpus celeritate eadem motum eo majus percurſurum ſpatium, quo longiore tempore movetur; & ſi corpus ſpatia æqualia deſcribit, celeritatem tanto fore majorem, quo breviore tempore tale ſpatium percurrit.

52. THEOREMA II. *In motu æquabili ſpatia* E *&* e, *corporibus* A *&* B, *temporibus* T *&* t, *celeritatibus* V *&* v *deſcripta, ſunt inter ſe ut facta* V T, v t, *nempe celeritatum in tempora; ſeu* $E : e = VT : vt$.

Demonſtratio. Ponamus corpus A celeritate u, æquali celeritati v corporis B, tempore T percurrere ſpatium ε. Quod ſi jam hoc ſpatium ε cum ſpatio E, quod celeritate V deſcribit, comparemus; quoniam tempus T idem eſt, habebimus (per 51) $E : \varepsilon = V : u$. Et ſi idem ſpatium ε conferatur cum ſpatio e a corpore B eadem celeritate, ſed tempore t, deſcripto, erit $\varepsilon : e = T : t$. Quare compoſitis rationibus eſt (Elem. 307) $E\varepsilon : \varepsilon e = VT : vt$, ſeu (Elem. 296) $E : e = VT : vt$.

53. Obſerva I. Apud Mechanicos rationem conſtantem mutationis duarum quantitatum heterogenearum, & quæ alias inter ſe comparari nequeunt, exprimi per ſimplicem aliquam æquationem. Exempli cauſa, dum intelligi volunt, ſpatia eſſe ſemper ut tempora, ſcribunt $e = t$, quamvis in ſe ſpatia nunquam coæquari tempori alicui poſſint, utpote cum illa ſint extenſio permanens, hoc autem ſucceſſiva, adeoque prorſus ab illis heterogenea. Verum expreſſio ejusmodi nihil aliud ſignificat, quam ſpatia in eadem ratione creſcere vel decreſcere, qua tempus augetur vel minuitur. Ut denotent, celeritates eſſe in ratione reciproca temporum, po-

nunt

nunt $u = \frac{1}{t}$. Nam ratio reciproca directæ inſtar ſcribi poteſt; modo termini illius pro denominatoribus, & unitas pro numeratore ſumatur. (Elem. 299). Ut exprimant, quantitatem aliquam nullam ſubire mutationem, ſed eandem conſtanter manere, eam unitati æqualem faciunt. Hanc methodum ſi ſequamur, ita in compendio Theorema I. exponi poteſt: *in motu uniformi*, *ſi* $t = 1$, $e = v$; *ſi* $v = 1$, $e = t$; & *ſi* $e = 1$, $v = \frac{1}{t}$. Et Theorema II: *in motu æquabili* $e = v\,t$.

54. II. Dum in formula aliqua generali quantitas conſtans, vel quæ talis ſupponitur, vel factum aut quotus quantitatum conſtantium occurrit, formula ſimplicior redditur, quin ratio variabilium in ea contentarum mutetur, ſi in locum quantitatis conſtantis unitas ſurrogetur, facta reductione, quam hæc ſubſtitutio exigit. Uti v. g. in hoc exemplo $e = vt$; ſi tempus ponatur conſtans, erit $t = 1$, pro t ſubſtituta 1, erit $e = v.1$, vel $e = v$, quod oſtendit, tempore aſſumpto conſtante, ſpatium eſſe ut celeritatem. Si ſit formula $p = \frac{abx}{qs}$, quæ valorem abſolutum quantitatis p exprimit, & ſupponatur ab eſſe factum ex duabus quantitatibus conſtantibus, habebitur $p = \frac{x}{qs}$, quod ſignificat, quod quamvis valor abſolutus quantitatis p ſit $\frac{abx}{qs}$, variatio tamen de p fiat in eadem ratione, qua quotus variabilis x per alteram variabilem qs diviſæ creſcit vel decreſcit. Ut adeo formula poſt ſimilem ſubſtitutionem factam non niſi rationem variationis de p exprimat.

55. Corollarium. Cum in motu æquabili ſit $e = v\,t$, erit $v = \frac{e}{t}$, & $t = \frac{e}{v}$.

56. THEOREMA III. *Motus quivis utcunque acceleratus vel retardatus, quo curva quælibet deſcribitur, conſiderari poteſt, tanquam compoſitus ex infinitis motibus æquabilibus & rectilineis, qui ſinguli tempuſculis infinite parvis, ex quibus tempus finitum illius motus conſtat, durent. Supponi præterea poteſt, omnem mutationem celeritatis & directionis ſemper fieri in initio talis tempuſculi infinite parvi, ita ut per tale tempuſculum poſtea utraque eadem maneat.*

Etenim tempuſculis ſingulis infinite parvis mobile non niſi momentaneum progreſſum in ſpatio facit; progreſſus iſti momentanei inter ſe quidem inæquales eſſe poſſunt, & diverſas habere directiones, ſi alter alteri comparetur; at in uno eodemque ſeparatim accepto nihil inæquabile, mutationis nihil concipi poteſt.

57. THEO-

57. THEOREMA IV. *In motu uniformiter accelerato, velocitates sunt ut tempora; seu* v = t.

Nam cum mobile quolibet temporis momento æquali novam vim æqualem acquirat, consequenter etiam æqualem celeritatis gradum, summa omnium horum incrementorum æqualis est summæ omnium momentorum, quibus acquiruntur; & ideo velocitates semper sunt ut tempora a principio motus computata.

58. THEOREMA V. *Spatium* e *tempore finito* t *motu uniformiter accelerato percursum, est dimidium illius, quod mobile velocitate* v *quam in fine temporis* t *acquirit, motu æquabili eodem tempore descripsisset.*

Dividatur tempus t in infinita tempuscula æqualia; celeritates, quas mobile in fine cujuslibet tempusculi habet, erunt ut hæc progressio Arithmetica $1\frac{\infty}{u}, 2\frac{\infty}{u}, 3\frac{\infty}{u}, 4\frac{\infty}{u} - - - \infty\frac{\infty}{u}$. Et quia (56) durante quovis tempusculo minimo motus est æquabilis, adeoque etiam spatium est ut velocitas, quam eo tempusculo mobile habet; eadem progressio repræsentat spatia singulis tempusculis percursa, & summa totius progressionis est ut spatium totum tempore t descriptum. Sed summa progressionis (Elem. 280) æqualis est facto ex summa termini primi & ultimi $1\frac{\infty}{u}+u$ in dimidium terminorum numerum ducta, sive in $\frac{t}{2}$, id est, in numerum dimidium omnium tempusculorum, ex quibus t constat; igitur spatium totum exhibetur per $\left(1\frac{\infty}{u}+u\right)\frac{t}{2}$ $=\frac{ut}{2}$, quia $1\frac{\infty}{u}=0$ (Elem. 360).

59. THEOREMA VI. *Spatia ab eodem mobili motu uniformiter accelerato percursa, sunt ut quadrata temporum, quibus describuntur; vel ut quadrata celeritatum in fine temporum acquisitarum.*

Si enim in formula $e=\frac{tv}{2}$, substituatur $t=v$ (p 57), fiet $e=\frac{tt}{2}$, vel $e=\frac{vv}{2}$, seu cum 2 sit quantitas constans, $e=uu=tt$.

60. Scholium I. Gradus & incrementa celeritatis, quæ mobile singulis instantibus acquirit, consequenter etiam quantitas spatii percursi, ab intensione vis acceleratricis in mobile agentis dependent. Unde vis acceleratrix minor minores etiam velocitatis gradus producet, quam altera major, & mobile iisdem temporibus spatia minora describet; nihilominus tamen velocitates istæ semper erunt in ratione simplici temporum, & spatia cum iis descripta in ratione duplicata. Itaque *si vires acceleratrices diversæ sint, spatia sunt in ratione composita ex simplici virium, & duplicata temporum.* Dicatur vis acceleratrix quælibet f; dabuntur sequentes formulæ generales: $e=ftt$, $f=\frac{e}{tt}$, $t=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{f}}$.

61. Ut

61. Ut generatim demonstretur, esse $e = ftt$, seu spatia percursa esse ut facta ex viribus acceleratricibus in quadrata temporum, sint duo corpora A & B, quæ spatia E & e temporibus T & t, viribus acceleratricibus F & f describant; dico esse $E : e = FTT : ftt$, Supponatur primo corpus A moveri vi acceleratrice f tempore T, & describere spatium ε. Quod si jam hoc spatium ε comparetur cum spatio E eodem tempore T a corpore A descripto, erit $E : \varepsilon = F : f$. Et si idem spatium ε conferatur cum spatio e a corpore B vi eadem acceleratrice tempore t percurso, est: $\varepsilon : e = TT : tt$. Igitur compositis rationibus (Elem. 296) fiet $E\varepsilon : \varepsilon e = E : e = FTT : ftt$.

62. Scholium II. Experientia constat, corpora versus superficiem Planetæ descendentia motu uniformiter accelerato cadere; diciturque vis acceleratrix, quæ hunc effectum producit, *gravitas*. Quin certis experimentis & legitimo ratiocinio detectum est, corpora circa Telluris superficiem libere cadentia, & quibus aer sensibiliter non resistit, intra primum minutum secundum lapsus $15\frac{1}{10}$ ped. conficere. In formulis igitur præcedentibus poni potest $f = 15,1$. ped. quando t in minutis secundis habetur, & corpora prope Telluris superficiem supponuntur esse.

63. Scholium III. Concipi quoque potest *vis retardatrix uniformis*, quæ quovis tempusculo æquali in mobile agat æqualiter, & directione contraria ejus motui, ut adeo mobile æqualibus tempusculis æquales celeritatis gradus amittat. Atque talis vis retardatricis eædem erunt proprietates, sed opposite sumptæ, ac vis acceleratricis, temporibus & spatiis iis computatis, quibus vis retardatrix totum corporis motum extinxit. Ita si lapis in altum projiciatur, ejus gravitas fit vis retardatrix, ejus ascensum impediens; at postquam totum ejus motum sursum extinxit, fit rursus vis acceleratrix uniformis, qua corpus iisdem accurate celeritatis gradibus descendit, iisdemque temporibus, quibus ascendit.

64. Theorema VII. *Si duæ vires quæcumque eodem instanti temporis impellant idem corpus juxta eandem rectam directione* {*eadem* vel *opposita*}; *corpus movebitur motu æquabili in eadem recta versus plagam directionis* {*communis* vel *fortioris*}; *& celeritas ejus erit æqualis* {*summæ* vel *differentiæ*} *celeritatum, quas singulæ vires separatim communicarent. Idem intelligendum est, de viribus quotcunque impellentibus, quæ juxta eandem rectam agerent.*

Hæc necessario ex I Axiomate (41) consequuntur.

65. Corol-

65. Corollarium. Quoniam actiones duarum virium secundum eandem rectam, & directione eadem mobile impellentium in unam summam adduntur, & ex actionibus directe oppositis minor destruitur, ita ut tantum differentia majoris supersit, sequitur, quod si duarum virium directiones sub aliquo angulo concurrant, actiones nec simpliciter conspirent, nec etiam simpliciter oppositæ sint, sed partim conspirent, partim opponantur invicem, adeoque etiam ex parte addendæ sint, ex parte altera ab altera subtrahenda, prout scilicet rectæ directiones obliquas exhibentes partim ex situ eodem, partim ex opposito participant.

66. Lemma. *Si* (fig. 17) *sumatur* C B *pro radio, qui concurrat oblique cum plano* D B (respectu cujus consequenter nec coincidit, nec parallelus est, nec perpendicularis, sed ex utroque situ participat) *sinus* C A *anguli obliquitatis* C B A *exprimet id, quod radius* C B *ex situ perpendiculari participat respectu plani* D B; *& sinus complementi ejusdem anguli* A B, *exprimet id, quod habet ex situ congruente, seu parallelo.*

Recta B C situm quendam medium inter parallelum & perpendicularem ad planum D B obtinet; & concipi potest, quasi describeretur progressibus momentaneis alicujus puncti, qui alternatim sint perpendiculares & paralleli ad hoc planum D A, ita ut hi progressus figuram graduum seu scalæ cujusdam efforment, quamvis ob exilitatem singulorum eorum collectio unicam rectam exhibeat. In hac hypothesi autem liquet, summam omnium progressuum ad A B perpendicularium æquari rectæ A C; & summam omnium progressuum momentaneorum parallelorum plano, esse æqualem rectæ A B: quare A C exhibet id, quod C B participat ex situ perpendiculari; & A B, quod ex parallelo ad D B habet; & sumpta C B pro radio, est C A sinus anguli obliquitatis C B A; A B vero cosinus; igitur &c.

67. Theorema VIII. *Si corpus* C *impellatur simul a duabus viribus* (fig. 18) *quæ sint ut* A C, *&* C D, *ita ut si a sola vi* A C *impelleretur, tempore* T *describeret motu æquabili rectam* C A; *& si a sola vi* C D *impelleretur, eodem tempore percurreret æquabiliter rectam* C D; *corpus motu æquabili eodem tempore* T *describet diagonalem* C B *parallelogrammi, cujus latera sunt* C A *&* C D.

Quoniam directiones C A & C D angulum aliquem efficiunt, actiones virium impellentium corpus C partim conspirant, & per duas rectas congruentes exprimi debent; partim oppositæ sunt, & exhibendæ per rectas ad directionem partium conspirantium perpendiculares, sed oppositas. Et quia corpus de se nullam vim habet ad motum vel directionem aliquam, evidens est, primo, illud moveri non posse, nisi partes actionum impellentium oppositæ ex integro destruantur, id, quod fieri nequit, nisi eæ partes inter se æquales sint, & per perpendiculares æquales exprimantur. Secundo corpus nec posse sequi directionem C A, nec directionem C D, sed tantum directionem partium conspirantium; itaque prorsus debere in ea directione moveri, ac si ab unica summæ earum æquali impelleretur, & hinc debebit etiam tempore T motu æquabili rectam describere, quæ æquatur summæ linearum, actiones conspirantes exponentium. Quod si jam A D jungens puncta A & D bisecetur in I, & per C & I ducatur indefinita C B, erit hæc directio actionum conspirantium.

Nam perpendicula A E & D F ex punctis A & D in rectam C B demissa hac ratione fient æqualia, ob triangula A E I, I F D æqualia, in quibus omnes tres anguli, singuli singulis, & hypotenusæ A I & I D æquantur. Quare eadem perpendicula

A E

AE & DF partes oppofitas actionem virium AC & DC exhibebunt, ut oportet; & itidem rectæ coincidentes CE & CF repræfentabunt partes confpirantes. Unde fi fiat CB=CE+CF, corpus C motu æquabili tempore T defcribet rectam CB. Sed quia CB=CE+CF, erit EB=CF; & ob triangula FID, IEA rectangula & æqualia, & FI=IE, eft quoque CI=IB. Ductis itaque AB & DB, in quadrilatero CABD diagonales AD, CB fe invicem bifecant, & utrinque triangula fimilia & æqualia efficiunt; quare hoc quadrilaterum parallelogrammum effe debet (Elem. 522).

68. Corollarium I. Cum diagonalis femper fit in plano parallelogrammi, corpus a duabus viribus fimul impulfum movebitur in eodem plano, in quo funt directiones virium impellentium.

69. Corollarium II. Vis unica, quæ corpus tempore T ex C ufque in B movere poffet, eundem affectum præftaret, ac vires CA & CD fimul agentes. Quare illa pro his fubftitui poterit; & *vicisfim vi cuilibet duæ aliæ fubftitui poffunt, quarum fingulæ corpus per fingula latera contigua parallelogrammi eodem tempore impellerent, quo illa per diagonalem.* Quando ejusmodi fubftitutio fit, vis illa, pro qua aliæ furrogantur, *in duas refolvi dicitur.*

70. Corollarium III. *Si vis finita agit directe in planum immobile, vel, quod idem eft, in corpus, cujus maffa infinita fit, ejus actio in preffionem illi vi æqualem definit, quin aliquem motum finitum communicet.*

Quia enim actio illius vis finitæ diftribui debet in partes finitas magnitudine, fed numero infinitas corporis infiniti impellendas, quælibet pars finita non nifi infinite parvum impulfum fentire poteft, confequenter non nifi motum infinite parvum, id eft nullum, acquirit. Atque fic etiam actio talis vis in preffionem plani immobilis definit.

71. *Sed fi vis finita, & per CB (fig. 19) expreffa, agit in planum immobile AE directione obliqua CB, illud tantum premit, quantum CB ex directione perpendiculari participat.* Atque hinc *refolvitur in duas, quarum una CA perpendicularis, altera CD plano parallela*, ita, ut CB fit parallelogrammi ACDB diagonalis. *Recta CA repræfentat illam, quæ in planum agit, & per ejus refiftentiam deftruitur; CD vero alteram parallelam, quæ nihil agit, adeoque nec deftruitur.* Quod fi itaque potentia quævis, quæ tempore finito T corpus ex C in B ufque moveret, ageret in idem corpus in B fuper plano immobili AE collocatum, eidem non plus motus communicaret, quam ut tempore hoc T rectam BE, alteri CD parallelam & æqualem, percurreret; attamen illud fimul plano vi per CA exhibita apprimeret.

72. Scholium. Diximus quidem in demonftratione hujus Theorematis, partes virium oppofitas per AE, DF (fig 18) repræfentatas ex integro deftrui; verum apparet facile, effectum realem harum actionum directe oppofitarum effe, ut corpus in diagonali CB retineant: AE nempe impedit, ne corpus verfus D defcendat, & illud verfus A extrudit; per DF vero fit, ne afcendat verfus A, fed verfus D repellatur: hinc corpus perpetuo in diagonali manere cogitur; & proprie loquendo, nulla pars actionis ita prorfus deftruitur, ut nullum effectum realem habeat.

G 2 THEO-

73. THEOREMA IX. *Corpus a duabus simul viribus impulsum, quarum directiones angulum efficiunt, describit lineam rectam, si vires impellentes sint ejusdem rationis*, hoc est, utraque æquabiliter agat: vel utraque eadem lege acceleret vel retardet; *sed si sint diversæ rationis, describet curvam aliquam (quæ generali vocabulo* Trajectoria *appellatur) cujus natura a virium impellentium ratione, qua singulis momentis agunt, dependet.*

Demonstratio. Sint vires duæ quævis corpus C (fig. 20 & 21) directionibus CD & CA impellentes, quarum una tempusculis tribus minimis illud ex C in D; altera ex C in A moveret. Si CD & CA dividantur singulæ in tres partes secundum rationem, quæ inter vires, quas exponunt, intercedit; & parallelogramma GE, HF & AD compleantur, patet *primo*, corpus in fine primi tempusculi fore in I; post secundum in K, & denique finito tertio in B. Cum enim tempuscula sint minima, utraque vis durantibus singulis æquabiliter agit. Quare cum in primi principio corpus impellatur a duabus viribus, quarum una separatim agente veniret ex C in E, & altera sola impellente ex C in G, eodem tempusculo elapso in I esse debet. Sed quia prima duo tempuscula simul sumpta adhuc tempus infinite parvum constituunt, præscindendo a primo tempusculo supponi potest, corpus impelli in ipso motus initio a duabus viribus, quarum una ex C in F, altera eodem tempore ex C in H illud promoveret, & hinc corpus in fine hujus temporis in extremo diagonalis CK puncto esset. Simili ratione quoniam omnia tria tempuscula non nisi tempus infinite parvum simul efficiunt, insuper habitis primis duobus tempusculis supponi potest, corpus ab initio moveri a duabus viribus, ab una versus D, ab altera eodem tempore versus A, ita ut in fine temporis in B esse debeat.

74. Patet *secundo*, quod viribus ejusdem rationis existentibus (fig. 20), rectæ CA, CD sint similiter divisæ, adeoque CE, CF, CD sint proportionales partibus CG, CH, CA, & quia in parallelogrammis GE, HF, AD anguli CEI, CFK, CDB æquantur, & latera EI, FK, DB æqualia sunt lateribus CG, CH, CA, consequenter proportionalia lineis CE, CF, CD, triangula CEI, CFK, CDB similia sunt (Elem. 559); & hinc cum eorum anguli ad C æquales sint, & latera CE, CF, CD in eadem recta, etiam latera CI, CK, CB in eadem recta esse debent, adeoque & puncta C, I, K, B. Quare si vires impellentes ejusdem sint rationis, corpus in linea recta movetur.

75. Verum si vires sint diversæ rationis, uti si (fig. 21) CD repræsentet vim æquabiliter agentem; CA vero vim uniformiter motum accelerantem, rectæ EI, FK, DB non sunt proportionales

nales rectis C E, C F, C D; nam C G minor eſt, quam G H; dum C E alteri E F æquatur: hinc etiam triangula C E I, C F K, C D B haud quaquam ſunt ſimilia; & angulis eorum ad E, F, D æqualibus exiſtentibus, anguli ad C inæquales ſunt. Quare cum eorum latera C E, C F, C D in eadem recta jaceant; latera C I, C K, C B nequeunt eſſe in una recta, & hinc neque puncta C, I, K, B.

76. Si C A accipiatur pro diametro Curvæ C I K B, erunt C G, C H, C A abſciſſæ, & parallelæ G I, H K, A B ſemiordinatæ; aut vero ſi curva ad rectam C D referatur, parallelogramma G E, H F, A D erunt facta ex ſemiordinatis in abſciſſas, ſeu parallelogramma coordinatarum (Elem. 775). Jam vero (Elem. 767) natura curvæ dependet a ratione conſtante, quam habet functio quæpiam abſciſſarum ad functionem ſemiordinatarum; igitur natura curvæ dependenter a duabus viribus ſimul agentibus, & diverſæ rationis, deſcriptæ pendet a ratione, quæ quovis inſtanti inter illas vires intercedit.

Exempli cauſa, in hypotheſi priore (75) curva C I K B eſt parabola. Cum enim vis per C D exhibita æquabiliter agere ſupponatur, ſpatia C E, C F, C D ſunt ut tempora, adeoque eadem, vel æqualia G I, H K, A B exponent tempora ab initio motus elapſa. Et quia vis directione C A agens uniformiter motum accelerat, ſpatia C G, C H, C A ſunt inter ſe ut quadrata temporum (per 59), ſeu ut quadrata rectarum G I, H K, A B. Quare Curva C I K B talis naturæ eſt, ut abſciſſæ C G, C H, C A ſint inter ſe ut quadrata ſemiordinatarum G I, H K, A B, ſive eſt Parabola (Elem. 821).

77. Quod ut in exemplo generali magis pateat: ſit (fig. 22) *corpus* P *impulſum a duabus viribus, altera æquabili*, per cujus actionem corpus nitatur continuare motum eadem directione, quam in fine cujuslibet tempuſculi habet; *altera, ut libet, variabili, ſed perpetuo verſus punctum fixum* S *tendente, verſus quod etiam corpus* P *continuo impellit; deſcribet hoc corpus curvam* P Q p O, *quæ ſemper cavitatem puncto* S *obvertit.*

Nam ſi tempus quodvis finitum, quo motus iſte durat, dividatur, in tempuſcula infinite parva & æqualia, ſupponaturque corpus P primo tempuſculo percurriſſe ſpatium P Q, atque in principio ſecundi recipere actionem verſus S, quæ ſit ut Q G; evidens eſt, corpus P, quod ſola vi æquabili agente ſecundo tempuſculo deſcripſiſſet Q F = P Q, & in eadem directione, percurrere motu compoſito diagonalem Q p parallelogrammi Q F p G, ac in fine hujus tempuſculi fore in p. Eadem ratione elapſo tertio tempuſculo corpus foret in E, ita ut p E = Q p, niſi in p no-

va actione, quæ fit ut pH, versus S impelleretur, (est autem pH = QG, si vis versus S tendens est constans; sed si variabilis est, pH & QG erunt inæquales) atque ideo diagonalem pO describere cogetur. Hunc in modum vis æquabilis cum altera, corpus versus punctum S perpetuo impellente, concurrens facit, ut curvam versus S cavam describat, cujus natura itidem a ratione harum duarum virium inter se, & directione, qua singulis instantibus agunt, dependet. Vis autem illa, quæ corpus continuo versus punctum aliquod fixum, tanquam centrum, urget, propterea *vis centralis*, vel *centripeta* dicitur.

78. Si v. g. SQ (fig. 23) sit perpendicularis ad PF, sive directionem vis æquabilis, & quantitates PI, QG, pH, quibus singulis instantibus corpus P versus S retrahitur a vi centrali, sint æquales quantitatibus QR, pF, OE, quibus sequendo directionem vis æquabilis ab eodem puncto S recedere conatur, manifestum est, Curvam PQpO, esse circulum, cum viribus compositis corpus perpetuo in eadem a puncto S distantia maneat.

79. Apparet itaque, motum astrorum circa solem viribus simili ratione inter se compositis posse attribui; unde leges ejusmodi motuum compositorum examinandæ sunt, ut, num phænomenis congruant, statui possit.

Articulus IX.

De proprietatibus motus compositi ex vi insita, seu æquabiliter agente, & centrali.

80. Theor. I. *Trajectoria vi insita & centrali descripta non potest habere punctum flexus contrarii, vel regressus* (cum semper cavitatem (77) puncto eidem fixo obvertere debeat) *sed ceteris paribus tanto majorem habet curvaturam, quanto majorem rationem vis centralis ad vim insitam habet; & vicissim.*

Sic arcus PQp (fig. 22) magis curvus est, quam arcus QpO, cum vis centralis in Q per QG exposita majorem rationem habeat ad QF, quam vis centralis in p per pH designata ad vim insitam pE, consequenter vis centralis in Q magis corpus a recta retrahit, quam in p.

81. Hoc ut universim obtineat, necesse est, ut vis insita æquabilis in omnibus curvæ punctis eadem quantitate exprimatur, & ut directio vis centralis cum directione vis insitæ eundem semper faciat angulum. Atque hoc intelligendum est sub conditione in Theoremate adjecta: *si cætera sint paria.*

82. Theo-

82. Theorema II. *Trajectoria viribus expositis descripta, est semper in eodem plano cum centro* S, *& prima directione vis insitæ* P F.

Etenim cum Q p sit diagonalis parallelogrammi lateribus Q G, Q F descripti, in eodem cum Q G (seu Q S) & Q F est plano. Similiter p O est in eodem plano cum p H, seu p S, & p E, sive Q E, hoc est in eodem cum Q p. Idem est de ceteris.

Observa. Quando dicimus *vis æquabilis; vis constans*, *aut uniformis*, *vel vis projectionis*, *aut insita æquabilis vel constans*, non intelligimus, eam vim æquali tempore semper æqualem actionem habere: quin manifestum est, rectas Q F, p E, per quas actiones illæ exponuntur, inæquales esse.

Nam quovis instanti per concursum vis centralis afficitur, & aliter, aliterque determinatur, fitque novi semper parallelogrammi diagonalis. Atque hinc etiam provenit inæqualitas celeritatum. Constantem igitur eo solum fine hanc vim appellamus, ut a centrali, quæ semper est vis acceleratrix, quemadmodnm deinceps videbimus, distinguamus.

83. Theorema III. *Area arcu quovis trajectoriæ, & duobus radiis ex centro virium* (qui *Radii Vectores* dicuntur) *ad extrema arcus puncta ductis comprehensa, est semper ut tempus, quo arcus is describitur.*

Nam *primo* areæ triangulorum S P Q, S Q F, verticem communem S, & bases P Q, Q F æquales habentium, æquales sunt. Sed etiam triangulorum S Q F, S Q p super basi eadem S Q, & inter parallelas S Q, & p F existentium areæ æquantur (Elem. 593); Quare etiam triangulorum S Q P, S Q p areæ æquales sunt. Eodem modo demonstratur, aream S Q p esse æqualem areæ S p O: & hinc areæ, quas æquali tempore radius vector verrit, æquales sunt.

Secundo. Si tertium tempusculum, quo corpus P motu composito percurrit p O, esset duplum secundi, quo descripsit Q p; tempusculo tertio corpus P vi insita percurreret p E, duplam de Q p, & hinc area trianguli S p E, (vel æqualis S p O) esset etiam dupla trianguli S Q p. Idem est de quavis alia ratione temporis.

Observa: cum area quævis finita sit summa infinitarum areolarum infinite parvarum, quarum quælibet tempusculo correspondenti proportionalis est, sintque totidem elementa areæ, quot tempuscula, sequitur, aream finitam esse tempori correspondenti finito proportionalem.

84. Corollarium I. *Tempus, quo describitur arcus* P Q (fig. 24), *est ad tempus, quo percurritur arcus* r m, *ut sector* P S Q *ad sectorem* S r m. Atque hæc est una ex celebratis duabus legibus a Keplero statutis.

85. Corollarium II. Si arcus P Q est admodum parvus, sector P S Q a triangulo rectilineo non differt, & arcus P M, centro S, radio S P descriptus pro ejus altitudine haberi potest. Si igitur *t repræsentet tempus valde parvum, quo percurritur* P Q, erit $t = PM.SQ$; vel

vel $t = SR.PQ$. Nam (Elem. 594) facta haec funt ut area trianguli SPQ.

86. THEOREMA IV. *Celeritas corporis in quovis trajectoriae puncto* Q (*fig.* 24.) *est reciproce ut perpendiculum* SR, *e centro virium ad tangentem in puncto* Q *demissum; id est* $u = \frac{1}{SR}$.

Nam $t = SR.PQ$; & fimul, ob t admodum exiguum, eft $t = \frac{PQ}{u}$; adeoque $SR.PQ = \frac{PQ}{u}$; inde fit $u = \frac{1}{SR}$.

87. THEOREMA V. *Celeritas corporis in diverfis orbitae* MLQ *locis* L, l, λ (fig. 25) *vel uniformiter acceleratur, vel uniformiter retardatur, prout radius vector cum curva (vel ejus tangente) angulum acutum*, CLS; *rectum*, ClO; *vel obtufum* CλR *fecerit verfus* Q, *quo tendit motus corporis.*

Demonftratio. Dum radius vector ad tangentem obliquus eft, velut CL ad LS, vis centralis per LF defignata refolvi debet in duas partes; alteram Fm, five nL, ad tangentem normalem quae exponit veram vis centralis actionem in loco L, qua corpus in orbita retinetur; alteram Fn, feu mL, cujus directio mL eft eadem, cum directione, quam corpus per vim infitam fequitur, adeoque ejus celeritatem auget. Sed in puncto λ pars φν, vel μλ, vis centralis φλ directionem oppofitam habet directioni corporis ex vi infita; quare ejus celeritas hac parte imminui debet. Tandem in puncto l, ubi radius vector ad tangentem perpendicularis, vis centralis fl non amplius refolvi poteft.

88. Corollarium. *Celeritas corporis in circulo revoluti viribus centralibus ad centrum circuli tendentibus, manet femper aequabilis.* Nam radii vectores ad hanc curvam funt femper perpendiculares (Elem. 459).

89. I. *Velocitas angularis vera* corporis tempore dato, eft angulus, quem ad centrum virium radii vectores, arcum dato tempore defcriptum intercipientes, comprehendunt.

90. II. *Motus medius*, vel *velocitas angularis media* vocatur, quam haberet corpus, cujus motus refpectu centri virium effet femper aequabilis. Invenitur itaque pro tempore dato ex hac analogia: *ut tempus revolutionis integrae ad* 360°, 0′, 0″; *ita tempus datum ad motum medium ei competentem.*

91. Lemma I. *Ut angulus quispiam* P (fig. 52); *arcus, a quo menfuratur*, A; & *radius hujus arcus* R, *inter fe comparari poffint*, *fequentes habentur formulae* $A = P.R$; $P = \frac{A}{R}$; & $R = \frac{A}{P}$.

Demonftratio. Sit alter angulus p, ejus arcus a, radius r, erit $A : a = P.R : p.r$. Nam fi accipiatur arcus Q radio R defcriptus, qui etiam metitur angulum p, eft (Elem.

(Elem. 581) $Q : a = R : r$; jam quia arcus Q & A eodem radio descripti sunt, est quoque $A : Q = P : p$; ergo compositis his duabus utrinque rationibus, fiet $A. Q : a. Q = R. P : r. p$, sive $A : a = P. R : p. r$, & hinc $A = P. R$.

Lemma II. *Si duæ quantitates habeant exiguam differentiam, media inter eas Geometrice proportionalis est eadem cum media Arithmetice proportionali*; & ideo *quadratum mediæ Arithmetice proportionalis æquabitur facto extremarum.*

Demonstratio. Inter quantitates, x, & $x + \frac{1}{\infty}$, media arithmetice proportionalis est $x + \frac{1}{2\infty}$ (Elem. 274); & media geometrice proportionalis est $\sqrt{\left(xx + \frac{1}{\infty}\right)}$ sive (quia $\frac{1}{4\infty\infty}$ est infinitesima 2di ordinis) $\sqrt{\left(xx + \frac{x}{\infty} + \frac{1}{4\infty\infty}\right)} = x + \frac{1}{2\infty}$.

92. THEOREMA VI. *Celeritas angularis vera* u *corporis arcum exiguum* P Q *tempore eodem admodum parvo describentis* (fig. 24) *est reciproce ut quadratum distantiæ* S I *puncti* I, *in quo erat corpus in medio temporis, a centro virium* S; *sive* $u = \frac{1}{SI^2}$.

Demonstratio. Velocitas angularis u exponitur per angulum P S Q, cujus mensura est arcus P M circularis centro S descriptus. Quare (per 91) est $u = \frac{PM}{SP}$. Sed si tempora sint eadem, & admodum parva, sector P S Q in quovis trajectoriæ loco pro triangulo rectilineo ejusdem ubique areæ haberi debet (85); cujus propterea altitudo P M est in ratione reciproca basis S Q (Elem. 596); hoc est $PM = \frac{1}{SQ}$; unde facta substitutione est $u = \frac{1}{SP.SQ}$; atqui sumpto tempore admodum parvo, radiorum S P & S Q differentia est valde exigua; Hinc (per Lemma II) $SP.SQ = SI^2$; & $u = \frac{1}{SI^2}$.

93. Corollarium. *Igitur si observentur anguli ad centrum virium a planeta in sua trajectoria temporibus exiguis descripti*, qui v. g. sint tantum 500ma vel 600ma pars totius revolutionis periodicæ; *ratio distantiarum ab eodem centro inveniri poterit, consequenter figura traiectoriæ determinari.*

Manifestum est, rationes distantiarum & figuram orbitæ ea solum accuratione determinari, qua celeritas angularis vera tempore admodum exiguo determinatur. Sed enim fere impobissile est, ut hæc exacte determinetur ex immediata motus Planetæ per tam breve tempus observatione, cum quævis observatio, non obstante quacunque sollicitudine & deligentia, exiguis quibusdam erroribus obnoxia sit, quocumque etiam instrumento fiat. Iam vero error exiguus in angulo exiguo dimetiendo commissus, in distantia magna, quæ inde deducitur, admodum sensibilem producit errorem. Quare in negotio adeo lubrico effectus errorum in observationibus inevitabilium quantum possibile est, diminui debent.

Optima autem methodus, quæ adhiberi possit ad determinandum motum angularem verum alicujus planetæ, est, si per temporis intervalla fere æqualia, uti singulis, vel alternis diebus, observentur tria, vel quatuor loca planetæ, ita ut differentiæ singulorum se se consequentium octo vel novem gradus non excedant. Postea *interpolantur* hæ observationes, vel eorum differentiæ successivæ; hoc est, differentiæ per observationes erutæ in minores & plures dividundur, minoribus temporis intervallis respondentes, ita tamen, ut sequantur eandem legem, quæ in integris (antequam ita dividerentur) observatur. Hac ratione errores observationum in majorem multo numerum distributi singulas partes minus afficiunt, & fere insensibiles fiunt. Explicabimus itaque hanc methodum, cujus frequens admodum in Mathesi practica est usus.

Methodus interpolandi

95. Methodus, & formulæ, quæ sequuntur, eædem fere sunt cum illis, quas dedit D. Mayer. (vid. Monument. Academ. Petropolit. Tom. 2. pag. 180.)

Sint duæ series quantitatum quarumcunque $\begin{matrix} m & n & p & q & r & s \\ a & b & c & d & e & f \end{matrix}$.

Ita, ut cuivis termino seriei superioris respondeat terminus in serie inferiore, certa lege e superiore deductus. Terminos superioris seriei appellabimus *radices*, inferioris vero terminos vocabimus *functiones* superiorum correspondentium. Duplex de his institui potest quæstio, *primo*; si detur radix quævis alia x: quæ sit ejus functio? *Secundo* si detur aliqua alia functio y: quæ radix ei correspondeat? Problema utrumque per methodum interpolandi solvitur.

Quod si daretur lex, qua functiones ex radicibus suis determinantur, omnis difficultas sublata esset; illud igitur hic agendum, ut ipsa lex reperiatur, quam series datæ sequuntur. Newtonus rem Theoremate generali absolvit: nos viam paucis exponemus.

Ponatur, *primo*, quamvis seriem tantum duobus terminis constare, $\left\{\begin{matrix} m & n \\ a & b \end{matrix}\right.$ legemque, qua ex radice functio determinatur, hac formula $g + hx$ contineri, in qua x exponit radicem quamvis; g, & h, quantitates constantes, quarum valor a valore quantitatum a & b dependet, quique sequente methodo instituto calculo determinatur. Fiat primo $x = m$; habebitur æquatio $g + hm = a$. Dein ponatur $x = n$; & altera æquatio dabitur $g + hn = b$. Eruatur per substitutionem ex his duabus æquationibus valor de g, & h, habebitur $g = \frac{an - bm}{n - m}$; & $h = \frac{b - a}{n - m}$. Unde lex $g + hx$ erit $\frac{an - bm}{n - m} + \frac{(b - a)}{(n - m)}x$.

Ponatur *secundo*, quamvis seriem constare terminis tribus, $\left\{\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix}\right.$ & legem formula generali exprimi $g + hx + kxx$.

Eodem modo quæretur valor de g, h, k ope trium æquationum, nempe $g + hm + kmm = a$; $g + hn + knn = b$; $g + hp + kpp = c$.

Factis debitis substitutionibus reperietur

$$g = \frac{an - bm}{n - m} + \left(\frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}\right) mn.$$

$$h = \frac{b - a}{n - m} + \left(\frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}\right)(- n - m).$$

$$k = \frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}.$$

Ex

Ex quibus facile lex generalis $g + hx + kxx$ deducitur.

Ponatur *tertio*, quamvis seriem habere quatuor terminos, & legem generalem esse $g + hx + kxx + lx^3$: fient quatuor æquationes, posita x successive æquali radicibus m, n, p, q, ex quibus, ut supra factum est, valores constantium g, h, k, l, deducentur. Et sic deinceps.

Supponi potest cum Newtono, per quamvis radicem exhiberi abscissam alicujus curvæ, & per ejus functionem designari correspondentem semiordinatam: atque hac ratione resolvetur problema: *Curvam parabolici generis per data quotcumque puncta transeuntem describere.*

Ut usum interpolationum faciliorem redderemus, valorem constantium g, h, k, l, pro diversis casibus, qui emergere possunt, calculavimus, formulasque ad inveniendas radices maximis vel minimis functionibus respondentes, & vicissim, dedimus, juxta methodum de maximis & minimis. En illas:

I. *Formula pro datis tribus radicibus, & tribus functionibus.*

96. Formula generalis est $kx^2 + hx + g$; formula pro maximo vel minimo $x = -\frac{h}{2k}$.

CASUS I.

Si dentur $\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix}$

$$k = \frac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)}$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} - k(n+m)$$

$$g = \frac{an-bm}{n-m} + kmn$$

CASUS II.

$\begin{matrix} o & n & p \\ o & b & c \end{matrix}$

$$k = \frac{cn-bp}{pn(p-n)}$$

$$h = \frac{bpp-cnn}{pn(p-n)}$$

$$g = o$$

CASUS III.

$\begin{matrix} o & 1 & 2 \\ o & b & c \end{matrix}$

$$k = \tfrac{1}{2}c - b$$

$$h = 2b - \tfrac{1}{2}c$$

$$g = o$$

II. *Formula pro quatuor radicibus, & quatuor functionibus.*

97. Formula generalis est $lx^3 + kx^2 + hx + g$; formula pro maximo vel minimo $x = \pm\sqrt{\left(\frac{kk}{9ll} - \frac{h}{3l}\right)} - \frac{k}{3l}$.

CASUS I.

Si dentur

$m\ n\ p\ q$

$a\ b\ c\ d$

$$l = \frac{\left\{ \begin{array}{l} a(q-p)(p-n)(q-n) - b(q-p)(q-m)(p-m) \\ + c(n-m)(q-m)(q-n) - d(p-m)(p-n)(n-m) \end{array} \right.}{(p-m)(n-m)(q-p)(p-n)(q-m)(n-q)}$$

$$k = \frac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} - l(m+n+p)$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} - l(mm+nn+mn) - k(n+m)$$

$$g = \frac{an-bm}{n-m} + lmn(n+m) + kmn$$

CASUS II.

$o\ n\ p\ q$

$o\ b\ c\ d$

$$l = \frac{cnq(q-n) - bpq(q-p) - dnp(p-n)}{npq(p-n)(q-p)(n-q)}$$

$$k = \frac{cn-bp}{pn(p-n)} - l(n+p)$$

$$h = \frac{b}{n} - lnm - kn$$

$$g = o$$

CASUS III.

$o\ 1\ 2\ 3$

$o\ b\ c\ d$

$$l = \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} c + \tfrac{1}{6} d$$

$$k = 2c - \tfrac{5}{2} b - \tfrac{1}{2} d$$

$$h = 3b - \tfrac{3}{4} c + \tfrac{1}{3} d$$

$$g = o$$

98. III. *Formula pro duabus seriebus* - - $\left\{ \begin{array}{l} o.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4. \\ o.\ b.\ c.\ d.\ e. \end{array} \right.$

Lex $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4$.

$$f = \tfrac{1}{24} e - \tfrac{1}{6} d + \tfrac{1}{4} c - \tfrac{1}{6} b$$

$$l = -\tfrac{1}{4} e + 1\tfrac{1}{6} d - 2c + 1\tfrac{1}{2} b$$

$$k = \tfrac{11}{24} e - 2\tfrac{1}{3} d + 4\tfrac{3}{4} c - 4\tfrac{1}{3} b$$

$$h = -\tfrac{1}{4} e + 1\tfrac{1}{3} d - 3c + 4b$$

$$g = o.$$

99. IV. *Formula pro duabus seriebus* - - $\left\{ \begin{array}{l} o.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \\ o.\ b.\ c.\ d.\ e.\ \varphi. \end{array} \right.$

Lex $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4 + \lambda x^5$.

$$\lambda = \tfrac{1}{120} \varphi - \tfrac{1}{24} e + \tfrac{1}{12} d - \tfrac{1}{12} c + \tfrac{1}{24} b$$

$$f = -\tfrac{1}{12} \varphi + \tfrac{11}{24} e - d + \tfrac{13}{12} c - \tfrac{7}{12} b$$

$$l = \tfrac{7}{24} \varphi - \tfrac{41}{24} e + \tfrac{49}{12} d - \tfrac{59}{12} c + \tfrac{131}{24} b$$

$$k = -\tfrac{5}{12} \varphi + \tfrac{61}{24} e - \tfrac{13}{2} d + \tfrac{467}{12} c - \tfrac{167}{12} b$$

$$h = \tfrac{1}{6} \varphi - \tfrac{5}{4} e + \tfrac{10}{3} d - 35c + 10b$$

$$g = o$$

Ex

Exempla, & usus præcedentium formularum.

100. I. Si quæratur locus orbitæ, in quo Mercurius fuit tempore dato, v. g. die 27. Iunii hora 7; is invenietur per casum primum secundæ formulæ, interpolando observationes 25, 26, 27 & 28 Iunii, & ponendo $m = 25$, $n = 26$, $p = 27$, $q = 28$; item $a = 2^s. 5°. 39'. 51''$; $b = 2^s. 12°. 2'. 51''$, $c = 2^s. 18°. 26'. 18''$; $d = 2^s. 24°. 48'. 38''$. Posthæc quæritur per casum primum hujus formulæ $lx^3 + kx^2 + hx + g$ functio radici respondens $27\frac{7}{24} = x$. Verum calculus fit admodum prolixus. Ut igitur brevior reddatur, primo omitti ubique potest 2^s, habita solum graduum, minutorum & secundorum ratione. *Secundo* quia radices 25, 26, 27, 28 sunt in progressione arithmetica, iis sequentes substitui possunt: 0, 1, 2, 3, illo probe notato, quod 0 respondeat diei 25 Iunii, 1, 2, & 3, sequentes tres, nempe 26tum, 27mum, & 28vum ejus mensis exhibeant. *Tertio* compendiosior adhuc fiet, si ponatur functio prima $a = 0$, accepta pro b differentia $6°. 23'. 0''$ inter primam & secundam functionem; pro c differentia $12°. 46'. 27''$ inter primam & tertiam; pro d differentia $19°. 8'. 47''$ inter functionem primam & quartam: his omnibus ad secunda reductis, habetur $b = 22980''$, $c = 45987''$; $d = 68927''$; & res ad casum III formulæ II reducta est. Si substitutiones dictæ pro inveniendis valoribus constantium l, k, h, fiant, reperietur $l = 15\frac{2}{3}$; $k = 60\frac{1}{2}$, $h = 22935\frac{1}{6}$, $g = 0$: ita formula legis interpolandi abit in hanc $-15\frac{2}{3}x^3 + 60\frac{1}{2}x^2 + 22935\frac{1}{6}x$; in qua per hypothesin quæstionis propositæ est $x = 2d. 7.h.$ vel $x = 2\frac{7}{24}$, aut $x = 2.29167$; hoc valore in formula substituto, ea reducitur ad $52689''$, sive $14°. 38'. 9''$. Atque hæc est differentia inter primam & quæsitam functionem: quod si igitur addantur $2^s. 5°. 39'. 51''$, invenitur locus Mercurii pro tempore dato $2^s. 20°. 18'. 0''$.

II. Si quæratur velocitas angularis Mercurii pro eodem tempore, seu, quod idem est, si petatur arcus apparens, quem Mercurius intra tempus breve (cujus dimidium diei 27 Iunii horam septimam præcedit, dimidium sequitur) descripsit, v. g. ab hora 6 usque ad 8vam; in eadem formula fiat primo $x = 2\frac{6}{24}$, aut $x = 2\frac{1}{4}$; & formula erit $51732''$; postea ponatur $x = 2\frac{8}{24}$, sive $x = 2\frac{1}{3}$; & formula reducetur ad $53645''\frac{3}{4}$; inter has differentia est $1913''\frac{3}{4} = 31'. 53''. 45'''$, quæ est celeritas angularis Mercurii tempore duarum horarum pro die 27 Iun. 7 *h.*

101. Simili ratione velocitas angularis pro tempore quovis dato reperietur, v. g. pro die 25 Iun. 15 h. Si scilicet primo fiat $x = \frac{14}{24}$, & secundo $x = \frac{16}{24}$: facta substitutione obtinetur uterque locus verus Mercurii in sua orbita pro die 25 Iun. 14 h. & 16 h quorum differentia est velocitas angularis vera competens Mercurio ad d. 25 Iun. 15 h.

102. III. Si quæratur tempus, quo Mercurius fuit in loco dato orbitæ (quod inversum problematis prioris) v. g. $2^s. 20°. 18'. 0''$; subtrahenda est prima functio $2^s. 5°. 39'. 51''$, residuo ad secunda reducto fiat æquatio cubica $-15\frac{2}{3}x^3 + 60\frac{1}{2}x^2 + 22935\frac{1}{6}x = 52689$, cujus radices sunt $x = 2\frac{7}{24}$; $x = 39\frac{1}{10}$; $x = -37\frac{1}{3}$: apparet autem solam primam esse quæsitam; reliquæ ad solutionem nihil conferunt: Quare Mercurius fuit in loco dato $2^s. 20°. 18'. 0''$ die 27 Iun. 7 h. $0'. 0''$.

103. Si extractio radicum nimis longa videatur; aut difficulter statui possit, quænam ex inventis radicibus solutioni serviat? hoc incommodum sequente ratiocinio evitari potest: cum Mercurius die 27. Iunii in ipso meridie fuerit $2^s. 18°. 26'. 18''$, distabat tunc a loco dato $1°. 51'. 42''$; tempus igitur, quo fuit in loco dato, incidit in eundem diem post meridiem, & radix x debet esse 2 plus fractione, quæ invenitur proxime ex hac analogia: ut motus Mercurii $6°. 22'. 20''$ a die 27 usque ad 28 Iun. ad diem unum, ita $1°. 51'. 42''$ ad 0.292 proxime. Quare si ponatur $x = 2.292$, & in primo æquationis membro hic valor substituatur, prodit 52696.6, quod secundum membrum 52689 excedit $7''. 6$. Ex quo colligitur, radicem assumptam esse ju-

 sto

ſto majorem. Unde fiat $x = 2.291$; & facta ſubſtitutione fit æquatio 52673. 7, juſto minor. Denique inferatur: ut differentia æquationum duarum ex aſſumptis radicibus reſultantium 22. 9, ad differentiam ipſarum radicum aſſumptarum 0. 001; ita exceſſus primæ æquationis 7″. 6, ad exceſſum radicis primæ aſſumptæ 0. 00033. Quare hoc exceſſu a prima radice ſubtracto ea reperitur $x = 2.29167$,

104. Obſerva I. Data radice functio reperitur per ſolam ſubſtitutionem; at ſi functio detur, correſpondens radix non niſi per æquationem invenitur.

105. II. Quando tam radices, quam functiones datæ certa lege & admodum uniformiter creſcunt, vel decreſcunt, ſatis erit ad interpolandum, ſi ex utraque ſerie tres termini accipiantur, ſeu dein radices creſcant functionibus decreſcentibus; ſeu his creſcentibus decreſcant illæ. Verum ſi radicum aut functionum differentiæ ſint valde inæquales; aut ſi etiam ſat æquales quidem ſint, attamen ab initio creſcant, & poſtea decreſcant, vel viciſſim; aut denique ſi differentiæ ſint partim poſitivæ, partim negativæ, tum ſaltem quatuor radices, totidemque functiones, vel etiam plures ex utraque ſerie termini adhibendi ſunt; id quod, ut vidimus, ſæpe per formulas præcedentes fieri poteſt. Totus enim hic calculus non niſi approximatio quædam eſt: ex quantitatibus æquis intervallis acceptis ratio earum, quæ interjacent inter illas, eruitur ex hypotheſi, quod inæqualitas earum certam legem ſequatur: qua ratione eo propius ad verum acceditur, quo intervalla minora ſunt, & inæqualitas terminorum datorum minus irregularis, aut lex reperta veræ vicinior, quam reipſa incrementa illa vel decrementa ſequuntur.

106. Interpolari etiam poſſunt differentiæ radicum datarum, tum ut inveniatur radix tempori dato correſpondens, tum ut reperiatur maxima vel minima omnium, quæ dari poſſint, ope formularum pro maximo vel minimo. Hac ratione plures obſervationes calculum ingrediuntur, quo interpolatio accuratior evadit. v. g. in ſequente tabula

Jun.	*Loca Mercurii*	*Differentiæ primæ.*	*Differentiæ ſecundæ*
die 24.	1ˢ. 29°. 19′. 2″		
25.	2. 5. 39. 51	. . . 6°. 20′. 49″	
26.	2. 12. 2. 51	. . . 6. 23. 0	. . . + 2′. 11″ = a = 0′. 0″
27.	2. 18. 26 18	. . . 6. 23. 27	. . . + 0. 27 = b = 1. 44
28.	2. 24. 48. 38	. . . 6. 22. 20	. . . − 1. 7 = c = 3. 18
29.	3. 1. 8. 6	. . . 6. 19. 28	. . . − 2. 52 = d = 5. 3

acceptæ ſunt ſex obſervationes a die 24 uſque ad 29 Iunii, cum 5 earum differentiis, quæ *differentiæ primæ* appellantur, & 4 harum differentiarum differentiis, quæ *differentiæ ſecundæ* dicuntur. Manifeſtum autem eſt *primo*, terminum, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, inter hos ſex dies contineri. *Secundo* quatuor differentias ſecundas reſpondere diebus 25, 26, 27 & 28 Iunii. *Tertio* quoniam primæ duæ ex his ſecundis differentiis ſunt poſitivæ, reliquæ duæ negativæ, tempus, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, debere illud fuiſſe, quo differentia ſecunda fuit æqualis zero, ſive 2′. 11″ decrevit. Unde ſi e regione dierum 25, 26, 27 & 28 Iun. ſcribantur 0, 1, 2, 3, & a, b, c, d pro differentiis ſecundis, ponaturque prima $=0$, a reliquis autem tribus ejus differentiæ accipiantur; habebitur pro interpolatione per caſum III formulæ ſecundæ Generalis (97) $l = -3\frac{1}{2}$, $k = 15\frac{1}{2}$, $h = -116$, $g = 0$. Quare his in æquatione cubica ſubſtitutis, fiet $-3\frac{1}{2}x^3 + 15\frac{1}{2}x^2 - 116x = 131''$; cujus radix $x = 1.286$ dat tempus, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, quod itaque reſpondet diei 26 Iun: 6 h. 52′.

107. THEOREMA VII. *Si ex centro virium* S (fig. 28) *deſcribatur circulus* T M N, *cujus area æqualis areæ a trajectoria quavis* A N P M *in ſe redeunte comprehenſæ*; primo *dum corpus trajectoriam deſcribens eſt in*

punctis

punctis M *&* N, *ubi circulus trajectoriam secat, ejus velocitas angularis vera est æqualis mediæ: minor vero in omnibus punctis trajectoriæ extra circulum existentibus; major in illis, quæ cadunt intra circulum.* Secundo *dum corpus circa interfectionum puncta versatur, eo citius ejus velocitas angularis vera a media discrepabit, quo angulus intersectionis major fuerit.*

Demonstratio. Quoniam centrum circuli TMN coincidit cum centro virium, & ejus area æquatur areæ a trajectoria comprehensæ; patet (88), quod si corpus moveretur in hoc circulo, eumque describeret eodem tempore, quo trajectoriam, consequenter etiam circuli radius verreret sectores æquales sectoribus, quos eodem tempore radius vector verrit in trajectoria; ejus velocitas angularis vera foret semper æqualis velocitati mediæ: jam vero, quando corpus versatur in punctis N vel M suæ trajectoriæ, idem est, ac si in circulo tum moveretur; quare ejus velocitas angularis vera mediæ æqualis esse debet. Verum dum corpus suæ trajectoriæ arcum NAM percurrit, radii vectores longiores sunt radiis circuli, adeoque cum areæ sectorum trajectoriæ semper æquales sint areis, quas in circulo radius verreret eodem tempore, radii vectores eas areas comprehendentes ad centrum S angulum minorem efficere debent. Unde toto tempore, quo corpus in parte orbitæ NAM versatur, ejus celeritas angularis vera minor est, quam media. Oppositum prorsus evenire debet, dum corpus arcum NPM percurrit. Sunt itaque *puncta* N *&* M *termini accelerationis & retardationis motus angularis veri respectu motus medii.* Et hinc velocitas angularis vera nullibi accurate æquatur mediæ, præterquam in dictis punctis N & M; nec etiam æqualitas inter has velocitates ad sensum habetur, nisi quatenus exigui arcus ad N & M trajectoriæ congruunt ad sensum cum arcubus exiguis circuli: Sed quo angulus curvilineus ANM major est, eo minus trajectoria cum circulo congruit; itaque quo major est angulus, quo trajectoria circulum intersecat, eo citius circa puncta N & M velocitas angularis vera a media discrepet, est necesse.

108. Theorema VIII. *In omni trajectoria regulari* (hoc est in tali, in qua radii vectores SB, SE; vel SG, SF; vel SD, SC, (fig. 26) qui cum linea apsidum PSA utrinque ad S angulos æquales efficiunt, inter se quoque æquales sunt) *est* primo: *tempus, quo corpus ab una apside* P *ad alteram* A *pervenit, semirevolutioni periodicæ accurate æquale.* Nam ob æqualem utrinque a linea apsidum distantiam, celeritas in D & C; in G & F; in E & B eadem esse debet, iisdemque momentis per arcum PGA decrescere, quibus per alterum AFP crescit. Secundo *tempus, quo a quovis alio puncto* E *ad oppositum* C *pervenit, est semirevolutione longius, si interea per apsidem superio-*

riorem tranſire debet; ſed idem eſt ſemirevolutione brevius, ſi per apſidem inferiorem P *tranſit*. Etenim quando ex E in C per apſidem ſuperiorem A tranſit, celeritas motus per totum arcum E G A decreſcere debet, & non creſcit, niſi per exiguum arcum C A; ex oppoſito vero, dum ex C per apſidem imam P ad E tranſit, celeritas per totum arcum C F P augetur, & ſolum per exiguum arcum P E decreſcit.

109. Corollarium I. Hinc eruitur expedita methodus determinandi tempus tranſitus planetæ alicujus per lineam apſidum, & poſitionem ejusdem lineæ. Exempli cauſa, quoniam notum eſt (38), orbitam Mercurii eſſe admodum regularem, & ejus motum circa apſides ſatis æquabilem, ex inſpectione obſervationum, quas ſupra (poſt 36) retulimus, illico apparet, Mercurium fuiſſe in perihelio circa diem 26 Junii, & in aphelio verſus 9 Auguſti, quoniam motus diurnus a 26 ad 27 fuit 2°. 44′. 20″, quæ velocitas eſt omnium minima; & a 9 Auguſti uſque ad 10 fuit 6°. 23′. 27″, quæ eſt velocitas omnium maxima. En igitur rationem, qua calculus ineundus.

26 Jun. in Meridie locus ☿ - - -		2ˢ.	12°.	2′.	51″.
9 Aug. in Meridie - - - - - - -		8.	13.	9.	12
	Differentia	6.	1.	6.	21

Hæc differentia oſtendit Mercurium a 26 Junii uſque ad meridiem 9 Auguſti ultra ſex ſigna integra confeciſſe 1°. 6′. 21″. Quærendum jam eſt, qua hora diei 26ᵗᵃ Junii ☿ fuerit in loco oppoſito illi, in quo fuit 9 Auguſti in ipſo meridie, ſive qua fuerit in 2ˢ. 13°. 9′. 12″. Itaque facienda eſt hæc proportio: ut 6°. 23′. 27″. ad 24 h. 0′. 0″; ita 1°. 6′. 21″ ad 4 h. 9′. 10″. quare reperitur Mercurius fuiſſe in oppoſito puncto meridiei nonæ Auguſti die 26 Jun. 4 h. 9′. 10″. Hoc intervallum temporis eſt 43 d. 19 h. 50′. 50″, quod a dimidia revolutione deficit 3 h. 46′. 56″, exiſtente ſemirevolutione 43 d. 23 h. 37′. 46″. Itaque hoc temporis intervallo Mercurius non tranſiit per ſuum aphelium, nec illud nona Auguſti in meridie adhuc attigit. Ut igitur ſciatur, qua hora ad illud pervenerit, fiat hæc analogia: ut 3°. 39′. 7″, ſcilicet exceſſus velocitatis diurnæ Mercurii in perihelio ſupra velocitatem ejusdem diurnam in aphelio, ad 6°. 23′. 27″. ſeu ad velocitatem diurnam in perihelio; ita 3 h. 46′. 56″, ad 6 h. 37′. 8″, ſive ad tempus, quo die 9 Auguſti per aphelium tranſiit. Cum vero Mercurius tunc motum diurnum habuerit 2°. 44′, 20″; ſequitur, quod 6 h. 37′. 8″ fuerit in 8ˢ. 13°. 54′. 31″: & hinc aphelium Mercurii eſt in 8ˢ. 13ˢ. 54′. 31″.

110. II.

110. II. Accuratius inveniretur tempus & locus perihelii per interpolationem observationum dierum 25, 26, 27 & 28 Junii, & dierum 8, 9, 10 & 11 Augusti. Reperiretur quippe die 26 Jun. 4 h. locus Mercurii 2ˢ. 13°. 6′. 46″; & 8 h. idem inveniretur 2ˢ. 14°. 10′. 41″. 5, adeoque velocitas angularis vera intra 4 horas haberetur 1°. 3′. 55″. 5, quæ est velocitas maxima Mercurii in perihelio. Eodem modo locus Mercurii die 9 Aug. 4 h. prodiret 8ˢ. 13°. 36′, 35″; & 8 h. esset 8ˢ. 14°. 3′. 58″, & hinc velocitas angularis vera intra 4 horas 27′. 23″. 1, quæ est minima Mercurii in aphelio. Unde concluderetur, transitum Mercurii per Perihelium contigisse die 26 Jun. 6 h. 59′. 27″; & perihelium ejus esse in 2ˢ. 13°. 54′. 30″.

111. Quoniam veritas præcedentium theorematum a nullo systemate Astronomico dependet, restat, ut examinemus, quæ nam curvæ a planetis describerentur, si moverentur viribus altera quidem constante & æquabili; altera vero acceleratrice & versus solem tanquam centrum tendente.

Articulus X.

De curvis, ad quas Planetarum trajectoriæ revocandæ.

112. Curva, quæ se prima offert, est circulus; & quia observatum est, (34) planetas singulis momentis mutare distantiam a sole, nequaquam supponi potest, solem in centro existere.

113. Trajectoria itaque Mercurii nequit esse circulus, nisi saltem supponatur solem existere in aliquo puncto S extra centrum C sito (fig. 27), ex quo rectæ ad circumferentiam ductæ exhibeant diversas Mercurii a sole distantias. Ut autem cognoscatur, num hæc hypthesis cum phænomenis congruat, ducenda est *primo* per S & C linea apsidum PA, in qua PS exponit minimam; AS vero maximam Mercurii a sole distantiam; perihelio ejusdem in P; aphelio in A existente. *Secundo* puncto S tanquam centro, radio = CA, describendus est circulus MTNIM, cujus area consequenter æquatur areæ a trajectoria assumpta comprehensæ, quique trajectoriam in M & N secet. *Tertio* summa, qua fieri potest, accuratione determinanda est ratio rectarum SP, SA, SN vel SM, id, quod independenter ab hypothesi trajectoriæ circularis ex solis observationibus hunc in modum fieri potest. Etenim manifestum est, maximam velocitatem angularem Mercurii esse in P; minimam in A, & mediam (107) in N: est vero velocitas angularis maxima tempore 4 horarum inventa 1°. 3′. 55″. 5; & minima

 eodem

eodem tempore 27'.23''.1; & ut media habeatur, fiat (90): ut 87 d. 23 h. 15'. 32'', five tempus revolutionis integræ Mercurii, ad 360°. 0'. 0''. 0'''; ita 4 h. 0' 0'' ad 40'. 55''. 4 feu velocitatem angularem mediam tempore 4 horarum.

114. Hinc facile reperietur ratio rectarum SN, SP, SA. Supponatur enim SN 1000 partium, erit (per 92) ut velocitas maxima 1°. 3'. 55''. 5 ad velocitatem mediam 40'. 55''. 4; ita SN^2 ad SP^2; invenitur SP partium 800. 111, qualium SN eft 1000. Similiter eft velocitas minima 27'. 23''. 1 ad velocitatem mediam 40'. 55''. 4, ut SN^2 ad SA^2. Hinc SA eft 1222. 441 partium ejusmodi.

115. Quod fi jam trajectoria PNAM fit circulus æqualis alteri TNIM, fumma rectarum SP, SA æquari debet duplo radio SN, quod evidenter cum obfervationibus pugnat, deberet enim effe 2022. 552 = 2000. Quare trajectoria MPNA circulus effe nequit.

116. Et alias etiam nota circuli proprietas eft (Elem. 563) quod fegmenta rectarum quarumvis extra centrum fe interfecantium fint in ratione reciproca. Sic eft SA : SB = SD : SP. Et (Elem. 308) $SA^2 : SB^2 = SD^2 : SP^2$. Interpolando jam obfervationes 16^{tæ}, 17, & 18 Julii, reperitur velocitas vera angularis Mercurii pro quatuor horis (quæ nempe ei competit duabus horis ante, & duabus poft tranfitum per 6^s. 2°. 13'. 51'', qui locus verfus D fitus eft) æqualis 38', 11''. 5; & interpolando obfervationes 9, 10, & 11 Septembris invenitur velocitas vera angularis pro duabus horis ante, & duabus poft tranfitum per 0^s. 2°. 13'. 51'' (qui locus priori ad D oppofitus verfus B jacet) æqualis 49'. 41''. Quare debet effe (per 92) 38'. 11''. 5 : 49'. 41'' = $SB^2 : SD^2$. Sed eft quoque 1°. 3'. 55''. 5 : 27'. 23.1'' = $SA^2 : SP^2$; unde fi trajectoria eft circulus, habetur hæc proportio: 1°. 3'. 55.'' 5 : 38'. 11''. 5 = 49'. 41'' : 27'. 23''. 1. Quod evidenter falfum; factis extremorum & mediorum inæqualibus prodeuntibus. Et ut æqualia forent, terminus ultimus effe deberet 29'. 41. Multum igitur abeft, ut Trajectoria Mercurii fit circulus.

117. Difcrimen ejus a circulo utcunque advertitur, fi attendatur, quod cum diftantia media SN fit minor, quam femifumma rectarum SP, SA, curva, quam Mercurius defcribit, ad puncta M & N magis compreffa effe debeat, quam verfus A & P; atque hæc curvaturæ diverfitas magis ellipfi, quam circulo, convenit, cujus eadem femper eft curvatura. Hujusmodi argumento utebatur Keplerus, ut evinceret, ellipfin circulo, quo omnes ante eum Aftronomi utebantur, fubftituendam effe.

118. Altera curva, quæ circulum excipit, ellipfis eft. Et quia finguli planetæ durante una revolutione tantum femel veniunt ad aphelium, & femel ad perihelium, evidens eft, folem

non

non posse in centro ellipsis collocari: id enim si esset, dictum phaenomenon bis singulis revolutionibus eveniret: nam essent planetae bis in aphelio, dum per extrema axis majoris transirent; & bis in perihelio, dum extrema axis minoris attingerent. Quare sol alibi collocandus est; & locus, qui velut connaturaliter se offert, videtur alteruter focus esse.

Posito itaque sole in foco S ellipsis PMAN (fig. 28), ex observationibus dimensiones hujus ellipsis deducere oportet, ac videre, an omnes inter se congruant.

119. Liquet autem *primo*, axem majorem AP ellipseos debere esse aequalem summae distantiarum Aphelii SA, & perihelii SP: quod si igitur centro S describatur circulus TNM, cujus area areae ellipsis aequalis sit, axis major AP juxta calculum paullo ante (115) initum debet esse partium 2022. 552, qualium radius SN 1000 continet. *Secundo* cum area circuli areae ellipticae aequalis ponatur, ejus diameter debet esse media proportionalis inter axes ellipseos (Elem. 898). Et hinc reperitur axis minor ellipseos Bb partium 1977. 699; & parameter Kk (quae (Elem. 817) est tertia proportionalis ad AP & Bb) partium 1933. 84.

120. His positis, si orbita Mercurii sit elliptica, sequitur, quod dum tribus signis, sive 90 gradibus utrinque a linea apsidum distat, ejus distantiae a sole SK & Sk inter se aequales sint, & simul sumptae aequentur (Elem. 801) parametro axis majoris. Cum itaque linea apsidum transeat per $2^s. 13^\circ. 54'. 31''$, & per $8^s. 13^\circ. 54'. 31''$. (109), velocitas angularis vera Mercurii in $5^s. 13^\circ. 54'. 31''$, & $11^s. 13^\circ. 54'. 31''$ aequalis esse debet. Quod si jam observationes 12, 13, & 14 Julii; nec non 5, 6 & 7 Septembris interpolentur, reperitur Mercurius fuisse in $5^s. 13^\circ. 54'. 31''$ die 11 Julii 11 h. $30'\frac{1}{2}$ cum celeritate $43'. 44''.7$ intra 4 horas; & in $11^s. 13^\circ. 54'. 31''$ die 6 Septemb. 1 h. 42' cum celeritate $43'. 44''. 5$ intra quatuor horas. Unde si fiat (92) ut $43'. 44''. 6$ ad velocitatem angularem mediam $40'. 55''. 4$; ita SN^2 ad Sk^2 vel SK^2, invenitur SK = 966. 972, cujus duplum, seu Kk, est 1933. 94, quae a 1933. 84 non nisi quantitate vix sensibili differt.

121. Si etiam per alterum focum I ducantur semiordinatae IR, vel Ir, quarum quaevis aequatur semiparametro (Elem. 801) sive 966. 92 partibus, in triangulo rectangulo SIr vel SIR datur IR, seu Ir, & IS (id est differentia inter SA & SP) = 422. 330. Hinc reperitur angulus RSI, ves rSI $66^\circ. 24'. 18''$, sive $2^s. 6^\circ. 24'. 18''$. Et quia linea SA transit per $8^s. 13^\circ. 54'. 31''$; linea Sr transibit per $6^s. 7^\circ. 30'. 13''$; & SR per $10^s. 20^\circ. 18'. 49''$. Quodsi trajectoria sit ellipsis, velocitas angularis in $6^s. 7^\circ. 30'. 13''$, & $10^s. 20^\circ. 18'. 49''$

eadem esse debet ; & SR+RI, vel Sr+rI æquatur axi majori AP (Elem. 795). Interpolando vero observationes dierum 16, 17 & 18 Julii, item 30 & 31 Augusti, ac 1 Septembris, in iis locis velocitas angularis reperitur utrobique 36′. 44″. 5; & inde distantia SR vel Sr eruitur 1055. 373 partium, cui si addatur RI=966. 92, fiunt 2022. 293; quod ab axe majore 2022. 552 sensibiliter non differt.

122. Ex his igitur apparet, per observationes licere, omnia puncta A, P, M, N, K, k, R, r in ellipsi collocare, in cujus foco S sol existat.

123. Alter modus experiundi, an præsens hypothesis observationibus conformis sit, est, si accipiantur tria planetæ loca in orbita, & ratio distantiarum iisdem correspondentium a sole per velocitates angulares, quas ibi planeta habet, determinetur; postea sectio conica, in cujus foco sol existat, per illa tria loca transiens describatur (Elem. 882). Quod si hæc sectio ellipsis fuerit, ejusque dimensiones cum dimensionibus jam prius determinatis conveniant, dubium esse haud poterit, Mercurium reipsa ellipsin descripsisse. Verum quia solutio usitata hujus problematis generalis in praxi parum tuta est, quando ellipseos axes parum inter se differunt; nos hac methodo deinceps non alio fine utemur, nisi ad determinandas dimensiones orbitarum planetariarum, ubi jam constiterit, eas ellipticas esse.

124. Postquam observator noster similes observationes aliorum planetarum fecerit, iisdemque eas pertractaverit calculis, concludet tandem: *omnes Planetas primarios moveri in ellipsibus, quarum focum communem sol occupat; velocitatum vero inæqualitates ejusmodi esse, ut areæ inter radios vectores, & arcus cujusvis ellipsis comprehensæ, sint proportionales temporibus, quibus ii arcus describuntur.* Vide tabulam Artic. XIII, qua dimensiones ellipsium omnium planetarum exhibentur.

125. Observa I. Distantia foci S, in quo est sol, a centro C ellipsis, quam planeta describit, CS, vocatur *eccentricitas* orbitæ: atque æquatur semidifferentiæ distantiarum Aphelii SA, & perihelii SP.

126. In praxi Astronomica semiaxis major orbitæ ellipticæ alicujus planetæ poni solet = 1; aliæ dimensiones in fractionibus decimalibus exprimuntur. Hunc morem si sequamur, erit in orbita Mercurii CA seu CP = 1, SN sive SM = 0. 98885; SA = 1.20881; SP = 0.79119; & hinc eccentricitas CS = 0.20881; CB = 0.977824.

ARTI-

Articulus XI.

De ratione distribuendi inæqualitates planetarum in diversis orbitæ locis.

127. Determinatis ex observationibus ellipsium, quas singuli planetæ describunt, dimensionibus, nec non eorum apheliis, atque epocha, qua per aphelium quisque transiit, constituta, nihil amplius deest observatori, quo minus locum planetæ cujuslibet in sua orbita pro tempore dato calculare possit, quam ut reperiat methodum assignandi angulum ad solem inter aphelium, & radium vectorem ad locum planetæ ductum, in quo tempore dato existit, comprehensum. Angulus iste dicitur *Anomalia vera.*

128. Ponamus igitur, calculandum esse locum verum Mercurii ad meridiem diei 26 Augusti An. 1740.

Differentia temporis dati & epochæ transitus Mercurii per suum aphelium (quæ est 9 Aug. 1740. 6 h. 37′. 0″) (vid. tabulam Articul. XIII) est 16 d. 17. h. 23′. 0″. Sit AMPHA (fig. 30) orbita Mercurii, cujus axis major AP, minor GH, aphelium in A, perihelium in P, Sol in foco S. Supponamus locum verum Mercurii in sua orbita esse in M: inveniendus est angulus, seu anomalia vera ASM.

129. In circulo ADPE super axe majore AP tanquam diametro descripto, quem *eccentricum* vocabimus, accipiatur arcus AD, qui invenitur ex hac analogia, ut tempus revolutionis integræ planetæ est ad 360°. 0′. 0″; ita tempus ab ultimo transitu ejusdem per suum aphelium usque ad datum elapsum (quod in casu nostro est 16 d. 17 h. 23′.) ad arcum AD, 68°. 26′. 28″. Hic arcus *Anomalia media* Mercurii dicitur.

130. Ducatur radius DC. Evidens est, quoniam areæ, quarum unum latus æquale, vel idem est, sunt in ratione reliquorum laterum (Elem. 595) esse sectorem ACD ad circulum integrum, ut est arcus AD ad integram peripheriam, sive ut 16 d. 17 h. 23′. 0″ ad 87 d. 23 h. 15′. 32″. Sed cum per hypothesin M sit locus verus Mercurii, area ASM est ad ellipsin integram in eadem ratione temporum expositorum: quare erit etiam area ASM ad aream ACD, ut est area tota elliptica ad aream totam circularem; id est (Elem, 895) ut GH ad PA.

131. Per punctum M ducatur semiordinata MI, quæ producta secet eccentricum in N. Erunt etiam areæ ASM, ASN inter se ut GH ad AP (Elem. 896). Unde habetur ASM : ACD = ASM : ASN; adeoque (Elem. 306) area ACD = ASN.

132. Componitur vero ACD ex sectoribus ACN, & NCD; & ASN ex sectore ACN & triangulo NCS: quare ablato sectore communi ACN, manet NCD = NCS. Sed NCD = ½ NC·ND; & NCS = ½ NC. ST; igitur erit arcus ND rectæ ST, ad NC productam perpendiculari, æqualis.

133. At quoniam nec circuli, nec ellipseos quadratura habetur Geometrica, recta ST arcui ND exacte æqualis inveniri non potest: interea per approximationem ad libitum continuandam sequente methodo res utcunque conficitur.

134. Inveniendum est primo, cui arcui eccentrici eccentricitas CS æqualis esset, si quidem in circulum curvaretur. Et quia radius circuli æquatur 57°. 17'. 44''⅘; (id quod patet ex hac analogia: ut 355 ad 180°. 0' 0''; ita 113. ad 57°. 17' 44''⅘) facienda est sequens proportio: u CA (= 1): CS (= 0.20881) = 57°. 17'. 44''⅘: 11°. 57'. 50''. 2. Quartus terminus erit valor CS ad gradus circuli reductæ. Ulterius inveniendus est valor arcus AN talis, ut sit æqualis cum AD — ST. Hunc in finem assumatur valor aliquis, qui commodus judicabitur, v. g. ponatur AN = 60°; erit in triangulo rectangulo CST angulus C 60 graduum, & latus CS 11°. 57'. 50''. 2; reperietur ST (Elem. 747) 10°. 21'. 40''. Inde porro prodit AD — ST = 58°. 4'. 48''; indicio scilicet, arcum AN esse justo majorem assumptum. Ponatur itaque AN = 58°. 4'. 48''; & resumpto calculo trianguli CST reperietur ST = 10°. 9'. 17''; hinc AD — ST = 58°. 17'. 11'', justo minor; ex quo colligitur, AN aliquantulum augendum esse. Hinc si tertio sumatur AN = 58°. 17'. 11'', & resolvatur iterum triangulum CST, obtinetur ST = 10°. 10'. 39'', & AD — ST = 58°. 15'. 49''. Quare in hac tertia suppositione excessu peccatum est. Unde si quarto ponatur AN = 58°. 15'. 49'', repetitus calculus dat ST = 10°. 10'. 30'', & AD — ST = 58°. 15'. 58'', ubi apparet, valorem AN justo minorem assumptum fuisse. Denique arcu AN = 58°. 15'. 58'' assumpto, fit ST = 10°. 10'. 31'', & AD — ST = 58°. 15'. 57''; iterum justo major. Apparet autem, valores assumptitios alternatim excessu, & defectu peccare quidem, sed ita, ut tamen propius semper ad verum valorem arcus AN accedant. Et certe si ponatur AN = 58°. 15'. 57'', invenitur ST = 10°. 10'. 31''; & AD — ST = 58°. 15'. 57''. Qui valor etiam in secundis cum vero congruit; adeoque in ultima suppositione non nisi unico secundo erratum fuit. Arcus hic quæsitus; sive angulus ACN, cujus mensura est, dicitur *Anomalia vera Eccentrici.*

135. Centro M, radio MF describatur semicirculus, cui occurrat SM producta in O; erit (Elem. 564) SO (sive SM + MF

MF=2CA): SR (seu SF+FR=2CS+2FI=2CI=2 *cos* ACN)=SF:SQ (sive 2CS:SM−MF). Unde est etiam 1: *cos* ACN=CS: $\frac{1}{2}$SM−$\frac{1}{2}$MF=CS×*cos*ACN. Et hinc (Elem. 232) SM=1+CS×*cos*ACN. Hoc posito est (Trig. 41) $\frac{1-cos\,ASM}{1+cos\,ASM}=tang^2\,\frac{1}{2}\,ASM$. Jam vero in triangulo rectangulo SMI habetur (Elem. 747) SM (seu 1+CS×*cos*ACN): R=SI (seu CS+CI=CS+*cos*ACN): $cos\,ASM=\frac{CS+cos\,ACN}{1+CS\times cos\,ACN}$. Quare $\frac{1-cos\,ASM}{1+cos\,ASM}=\frac{1+CS\times cos\,ACN-CS-cos\,ACN}{1+CS\times cos\,ACN+CS+cos\,ACN}=\frac{1-CS-cos\,ACN\times(-CS+1)}{1+CS+cos\,ACN\times(CS+1)}=\frac{SP-cos\,ACN\times SP}{SA+cos\,ACN\times SA}=\frac{SP}{SA}\times\frac{1-cos\,ACN}{1+cos\,ACN}=\frac{SP}{SA}\times tang^2\,\frac{1}{2}\,ACN$. Ex duobus his valoribus de $\frac{1-cos\,ASM}{1+cos\,ASM}$ inter se comparatis eruitur $tang^2\,\frac{1}{2}\,ASM=\frac{SP}{SA}\times tang^2\,\frac{1}{2}\,ACN$. Unde est SA:SP=$tang^2\,\frac{1}{2}$ACN:$tang^2\,\frac{1}{2}$ASM, hinc $\sqrt{SA}:\sqrt{SP}=tang\,\frac{1}{2}\,ACN:tang\,\frac{1}{2}\,ASM$. Ex hac analogia invenitur ASM=48°. 32′. 30″; & hic angulus additus ad positionem lineæ apsidum SA, 8s. 13°. 54′. 30″, exhibet locum lineæ SM, sive Mercurii, 10s. 20°. 27′. 0″, qui non nisi 22″ differt ab eo, qui in tabula post articul. 5 notatur.

136. Observa I. Differentia inter anomaliam mediam & veram vocatur *æquatio centri planetæ*. In exemplo proposito est æquatio centri 19°. 53′. 58″; sive angulus CKS. Quod si jam supponantur rectæ CD, SM circa puncta C & S ita rotari, ut simul ab aphelio usque ad perihelium perveniant; inde rursus eodem tempore redeant ad aphelium, evidens est, angulum anomaliæ mediæ ACK per totum semicirculum ADP fore externum respectu anguli ASK anomaliæ veræ; sed in altero semicirculo PEA, angulus PCK anomaliæ mediæ erit semper internus respectu anguli PSK anomaliæ veræ. Unde si anomalia semper versus eandem partem sumatur, anomalia media excedit veram ab aphelio usque ad perihelium; sed vera excedit mediam a perihelio usque ad aphelium. Ex quo conficitur, *æquationem centri*, qua cum anomalia media utimur ad inveniendam anomaliam veram, *esse subtractivam ab aphelio usque ad perihelium, sive in primis sex signis anomaliæ mediæ; & eandem esse additivam a perihelio usque ad aphelium, sive in posterioribus sex signis anomaliæ mediæ.*

137. II. Quando eccentricitas planetæ est valde parva, arcus DN sensibiliter a recta non differt, & sector NCD pro triangulo

lo rectilineo haberi poteſt; quod cum æquale ſit triangulo N C S, eandemque habeat baſin, etiam altitudinem eandem habere debet. Itaque D N & S T in tali caſu ſunt perpendicula æqualia, & D S parallela ad T N. Unde ducta D S in triangulo D C S nota ſunt C D, C S, angulusque comprehenſus D C S, qui eſt complementum ad duos rectos anomaliæ mediæ A C D, quare in hac hypotheſi ex unica analogia inveniri poteſt angulus D S C æqualis angulo N C A, cujus menſura eſt arcus A N. Imo ut prolixitas calculi in planetis, quorum orbitæ ſunt magis eccentricæ, evitetur, ab hac ipſa analogia initium faciendum eſt potius, quam ut valor arcus A N fortuito aſſumatur.

In exemplo: in calculo ſuperiore repertus fuiſſet angulus D S C ſeu arcus A N, primo 58°. 13′. 0″, & hinc S T = 10° 10′ 11″.5; deinde 10°. 10′. 33″; tandem 10°. 10′. 31″.

Verum ne attentio in tot ſimul partes diſtrahatur, quando ſimiles calculi ineundi, obſervator noſter, quidquid ſuperioribus ratiociniis expoſitum eſt, ſequentibus regulis comprehendet.

Regulæ calculi, ſive analogiæ, ope quarum anomalia media reducitur ad veram in orbita elliptica.

138. I. *Ut diſtantia Aphelii ad diſtantiam perihelii, ita tangens dimidiæ anomaliæ mediæ ad tangentem arcus addendi ad dimidiam anomaliam mediam.*

Summam hinc ortam vocabo *anomaliam approximatam eccentrici.* Analogia modo expoſita inſtituitur ſequente ratione: logarithmus diſtantiæ aphelii ſubtrahitur a logarithmo diſtantiæ perihelii, differentia eſt logarithmus conſtans, qui ſemper addendus eſt logarithmo tangentis dimidiæ anomaliæ mediæ, ut reperiatur logarithmus tangentis arcus quæſiti.

Si anomaliæ approximatæ ſic inventæ & anomaliæ mediæ differentia non ſit major $1\frac{1}{2}$ gradu, eadem anomalia approximata ab anomalia vera eccentrici non differet 1 ſecundo, ideoque N T & S D quam proxime erunt parallelæ, quippe angulo A C N anomaliæ veræ eccentrici nequidem 1 ſecundo integro ab angulo A S D differente. Unde in hoc caſu opus non eſt ulteriore calculo; ſed ſolummodo analogia § VI. facienda.

II. *Ut ſemiaxis major ad eccentricitatem; ita* 57°. 17′. 44″.8 (ſive 206264″.8, cujus logarithmus eſt 5.3144251) *eſt ad numerum ſecundorum, quem* A *voco.*

III. *Ut radius ad numerum ſecundorum* A; *ita eſt ſinus anomaliæ eccentrici approximatæ* (§. I. inventæ) *ad numerum ſecundorum, qui ſubductus ab anomalia media dat alteram anomaliam approximatam eccentrici.*

IV. Ut

IV. *Ut radius ad numerum ſecundorum A; ita eſt ſinus anomaliæ ſecundæ approximatæ eccentrici ad numerum ſecundorum, qui ſubtractus ex anomalia media dat tertiam anomaliam approximatam eccentrici.*

V. Hæc analogia tamdiu repetitur, accepto ſemper pro tertio termino ſinu anomaliæ approximatæ ultimo repertæ, donec inveniantur duæ conſequenter anomaliæ approximatæ accurate æquales, quæ erunt anomalia vera eccentrici.

VI. *Ut radix quadrata diſtantiæ aphelii ad radicem quadratam diſtantiæ perihelii; ita eſt tangens dimidiæ anomaliæ veræ eccentrici ad tangentem dimidiæ anomaliæ veræ quæſitæ.*

Analogia ultima inſtituitur addendo dimidium logarithmi conſtantis (§. I. reperti) ad logarithmum tangentis dimidiæ anomaliæ eccentrici.

ARTICULUS XII.

Varia problemata de motu Planetarum in orbitis Ellipticis.

139. Problema I. *Datis ellipſeos dimenſionibus, anomaliam veram datam convertere in anomaliam mediam.*

Reſolutio. Fiat: *Ut radix quadrata diſtantiæ perihelii ad radicem quadratam diſtantiæ aphelii; ita eſt tangens dimidiæ anomaliæ veræ ad tangentem dimidiæ anomaliæ eccentrici.* Fiat ſecundo: *ut radius ad ſinum anomaliæ eccentrici modo repertæ; ita eſt eccentricitas orbitæ ad ſecunda reducta*, (exiſtente ſemiaxe majore 57°. 17′. 44″. 8) *ad numerum graduum, minutorum & ſecundorum, addendum anomaliæ eccentrici, ut habeatur anomalia media.* Utraque analogia inverſa eſt earum, quæ præcedente articulo ſunt expoſitæ.

140. Problema II. *Datis dimenſionibus ellipſeos* A G P H, *invenire diſtantiam* S M, *quæ anomaliæ veræ datæ* A S M *competit.*

Reſolutio. $SM = \dfrac{\text{diſtant. perih.} \times \text{diſt. aphel.}}{\text{diſt. perihel.} + \text{eccentricitate} \times 2\,\text{ſin}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{anom. veræ}}$;

vel vero $SM = \dfrac{\text{diſt. perih.} \times \text{diſt aphel.}}{\text{ſemiax. major.} - \text{eccentricitate} \times \text{coſ. anom. veræ}}$.

Demonſtratio. Jungantur M & F; erit $\tfrac{1}{2}SM + \tfrac{1}{2}SF + \tfrac{1}{2}FM = SA$. Eſt vero (Trig. 127) $SF \times SM$, ſive $2CS \times SM : SA - SF \times SA - SM$, ſeu $SP \times SA - SM = 1 : ſ^2 \tfrac{1}{2} ASM$. Igitur $SM = \dfrac{SP \times SA}{SP + 2CS \times ſ^2 \tfrac{1}{2} ASM}$. Et quia (Trig. 40) $R - coſ = 2ſ^2 \tfrac{1}{2}$; habetur $2CS \times ſ^2 \tfrac{1}{2} ASM = CS - CS \times coſ ASM$: ergo $SM = \dfrac{SP \times SA}{SP + CS - CS \times coſ ASM} = \dfrac{SP \times SA}{CP - coſ\, ASM \times CS}$.

 141. Scho-

141. Scholium. Conſtructa juxta regulas articulo præcedente traditas tabula æquationum centri alicujus planetæ, ſi quis etiam tabulam logarithmorum diſtantiarum a ſole condere velit, is commode ſequente analogia utetur: *Sinus anomaliæ veræ in ellipſi eſt ad ſinum anomaliæ veræ eccentrici, ut ſemiaxis minor ad diſtantiam quæſitam.*

142. Problema III. *Datis ſemiaxibus ellipſis*, v. g. (fig. 32) C A = 1, & C G = 0. 977824, *invenire punctum* M *cui competit æquatio centri maxima, ipſamque hanc æquationem maximam.*

Reſolutio. *primo* Accipiatur radix differentiæ quadratorum ſemiaxium C A, C G, quæ erit eccentricitas C S = 0. 20881. Ex foco S tanquam centro, radio S M = 0 98885, quæ eſt media proportionalis inter C A & C G, deſcribatur arcus ſecans ellipſin in M; etit M locus verus planetæ pro tempore, quo maxima æquatio centri ei competit.

Secundo. Ex puncto M ducatur ad alterum focum recta M F, dabuntur in triangulo F M S tria latera; ſcilicet S F æquale duplæ eccentricitati, S M, & M F, quod æquatur exceſſui axis A P ſupra S M: ex his itaque invenitur angulus A S M, anomaliæ veræ pro tempore æquationis maximæ, 80°. 57′. 26″. (Trig. 127); adeoque anomalia media correſpondens eſt 105°. 0′. 29″. 5, & utriuſque differentia dat æquationem centri quæſitam 24°. 3′. 3″. 5.

173. Problema IV. *Ex obſervationibus alicujus Planetæ invenire ejus æquationem maximam.*

Reſolutio. Non alia re opus eſt, quam ut determinentur duo tempora, ſcilicet ante, & poſt tranſitum planetæ per lineam apſidum, quibus erat in duobus ellipſeos locis, ad quæ ductus radius vector eſt medius proportionalis inter ſemiaxes; id, quod difficile non eſt, quoniam tunc ejus velocitas vera æquatur velocitati mediæ (107). Exempli cauſa, ex tempore revolutionis ſcitur velocitas media Mercurii diurna 4°. 5′. 32″. 5; invenire itaque oportet bina tempora, quibus velocitas vera Mercurii eadem eſt intra 24 horas.

Ex tabula obſervationum ſuperius (poſt articulum 5) relata apparet, motum diurnum Mercurii circa 15 Julii & 4 Septembris fuiſſe 4°. 5′. Interpolandæ itaque ſunt differentiæ obſervationum dierum 13, 14, 15 & 16 Julii, ut inveniatur tempus, quo differentia eſſe debuit 4°. 5′. 32″. 5: & reperietur id eſſe a die 14 Julii, 2 h. 49′, uſque ad diem 15, 2 h. 49′; Unde ipſum temporis momentum, quo accurate diſtantiam mediam habuit, fuit die 14 Julii 14 h. 49′. Et ſi interpolentur loca vera Mercurii obſervata diebus 14, 15, & 16 Julii, invenitur die 14 Julii 14 h. 49′ fuiſſe in 5ˢ. 22°. 57′. 27″.

Simi-

Similiter interpolando differentias inter observationes dierum 3, 4, 5, & 6 Septembris, & loca vera Mercurii diebus 3, 4 & 5 observata, invenitur habuisse distantiam mediam die 3 Septembris 22 h. 14′ ½, in 11ˢ. 4°. 49′. 10″.

Differentia inter hæc duo loca vera est 5ˢ. 11°. 51′. 43″, quæ est motus verus, sive summa velocitatum, quas Mercurius habuit toto intervallo, inter unam & alteram distantiam mediam. Tempus autem, quo hoc intervallum percurrit, est 52 d. 7 h. 25′ ½, & quo motu æquabili confecisset 6ˢ. 29°. 58′. 33″ (quippe cum intra 87 d. 23 h. 15′. 32″ percurrat 12 signa). Differentia est inter duos hos motus 48°. 6′. 50″, cujus dimidium 24°. 3′. 25″ est summa inæqualitatum Mercurii a transitu per lineam apsidum usque ad terminum, quo inæqualitas velocitatum mediæ & veræ evanescit, consequenter est æquatio maxima quæsita.

144. Observa. Si orbita sit parum eccentrica, interpolatione opus non est, ut momentum temporis obtineatur, quo planeta distantiam mediam habuit: satis est, si ejus motus verus diurnus, quem successive habet, comparetur, quippe diei intervallo celeritate media vix discrepante a vera. In exemplo a meridie 14 Iulii usque ad meridiem 4 Septembris motus verus Mercurii erat 5ˢ. 14°. 43′. 43″, & medius 7ˢ. 20° 48′. 7″; ex quo maxima æquatio est 24°, 2′. 12″. Item a meridie diei 15 Julii usque ad meridiem 4 Septembris motus verus erat 5ˢ. 10°. 37′. 15″; & medius 6ˢ. 28°. 42′. 35″, adeoque æquatio maxima est 24°. 2′. 50″, quæ a priori non differt, nisi propter notabilem inæqualitatem velocitatis Mercurii intervallo inter 14 & 15 Julii: at in orbitis parum eccentricis hæc inæqualitas ab uno usque ad alterum diem vix est sensibilis.

145. Problema V. *Data æquatione maxima planetæ, invenire ejus eccentricitatem, aliasque ellipsis, quam describit, dimensiones.*

Ex calculo Problematis III, & constructione figuræ 30, vel 32, quæ ad inveniendam æquationem centri adhibetur, liquet, quod, dum ea æquatio maxima est, perpendiculum ST fere congruat cum eccentricitate CS, & quod eccentricitas ad arcum circuli reducta paullo minor sit (134) dimidia æquatione maxima, ita, ut quo minor est orbitæ eccentricitas, eo hæ quantitates propius ad æqualitatem accedant. Unde fieri potest hæc proportio: *ut 57°. 17′. 44″. 8 ad dimidiam æquationem maximam planetæ; ita semiaxis ellipseos major ad terminum quartum, qui in orbitis parum eccentricis sensibiliter ab eccentricitate non differt; in iis autem, quæ magis sunt eccentricæ, eccentricitate paullo minor est.*

146. Ut itaque vera eccentricitas in casu posteriore reperiatur, instituendus est sequens calculus, qui deinceps pro norma erit.

Data æquatione maxima Mercurii 24°. 3′. 3″.5, fiat: ut 57°. 17′. 44″. 8 ad 12°. 1′. 31″. 7; ita femiaxis major ellipfis Mercurii (qui pro 1 affumitur) eft ad C S fere. Invenietur o. 209881. Hoc valore de C S tanquam vero affumpto, quærenda eft per Problema præcedens æquatio maxima centri, nam fi hæc inveniretur 24°. 3′. 3″. 5, eccentricitatis C S valor o. 209881 verus fuiffet affumptus; fed æquatio illa major prodire debet; & quia æquationes maximæ funt fere ut eccentricitates, valor affumptus de C S imminuendus eft, prout æquatio maxima reperta, & cum vera collata, exiget.

147. Hunc in finem determinetur radius S M, medius proportionalis inter femiaxes C A, C G; quod fiet, fi accipiatur S M $= \sqrt[4]{(1 - CS^2)}$. Nam $CG^2 = CA^2 - CS^2$: eft vero C A : S M = S M : C G, five 1 : S M = S M : $\sqrt{(1 - CS^2)}$; igitur $SM^2 = \sqrt{(1 - CS^2)}$ (Elem. 316) & $SM = \sqrt[4]{(1 - CS^2)}$. Unde fi ponatur C S = o. 209881, invenietur S M = o. 9888004.

148. His pofitis, reperietur angulus M S F 80°. 53′. 32″, & anomalia media correfpondens 105°. 4′. 1″ (139), hinc maxima æquatio prodit 24°. 10′. 29″. Quare fiat denique: ut 24°. 10′. 29″ ad 24°. 3′. 3″. 5, ita eccentricitas affumpta o. 209881 ad eccentricitatem veram o. 2088066.

149. Obferva. Quamvis hic calculus eccentricitatis indirectus fit, præftat tamen methodo deducendi dimenfiones ellipfium Planetarum ex diftantiis per velocitates angulares cognitis, quoniam errores, qui in obfervatione velocitatum angularium admittuntur, longe magis influunt in diftantias inde deductas, quam errores in obfervanda æquatione maxima contingentes influant in eccentricitatem. Nam ratio diftantiarum aphelii & perihelii Mercurii (114) determinata eft ex collatis inter fe arcubus 1°. 3′. 55″½ & 27′. 23″, nempe exiguis, quorum alter vix alterius duplum excedit; cum potuiffet reperiri ex inæqualitate 48°, pendente ex fola eccentricitate, tempore dimidiæ revolutionis Mercurii.

150. Problema VI. *Dato tempore revolutionis planetæ, & tribus locis veris in orbita, invenire eccentricitatem, lineam apfidum, & tempus tranfitus proximi per eandem lineam.*

Loca ad folutionem maxime opportuna funt, fi obferventur duo vicina illis, quæ habent diftantiam mediam; & tertius prope lineam apfidum.

151. Solutio directa hujus problematis magnis premitur difficultatibus; & quoniam ufum non habet, nifi in planetis, quorum theoria fatis cognita eft, methodum indirectam quidem, fed expeditam, & fummæ accurationis capacem adferemus. Fundatur in pofitione falfi, qua fcilicet problema proxime folutum fumitur.

Sint

Sint igitur exempli causa loca data Mercurii ex observationibus sequentibus:

	Locus verus				*Differentia*		
die 15 Julii . . .	5ˢ.	24°.	30′.	54″	70°.	24′.	3″.
6 Aug. . . .	8.	4.	54.	57			
7 Sept. . . .	11.	18.	1.	40	103.	6.	43.

Ex tempore revolutionis periodicæ Mercurii invenitur, quod intervallo 22 dierum, scilicet a 15 Julii usque ad 6 Augusti, motu medio percurrat 90°. 2′. 0″; & a 6 Augusti usque ad 7 Septembris 130°. 57′. 27″. Hoc posito res eo recidit, ut inveniatur eccentricitas, & positio axis majoris alicujus ellipseos, in qua 90°. 2′. 0″ motus medii respondeant 70°. 24′. 3″ motus veri: item 130°. 57′. 27″ motus medii dent 103°. 6′. 43″ motus veri.

152. Sit I A *p* (fig. 34) orbita quæsita, *p a* linea apsidum; I, A & P loca tria per observationes data, S sol; erunt anguli I S *a*, A S *a*, *a* S P anomaliæ veræ temporibus singularum observationum respondentes. Manifestum autem est, inventa una ex his anomaliis, haberi etiam reliquas, ob angulos I S A, A S P cognitos. Quæratur itaque ab initio circiter situs lineæ S *a* respectu horum angulorum, sive inveniatur, intra quæ ex datis tribus locis cadat aphelium: unde fiat: ut 70°. 24′ ad 90°. 2′; ita sunt 103°. 7′ ad 131°. 53′. Quartus terminus, major quam 130°. 57′, ostendit, 130°. 57′ habere ad 103°. 7′ minorem rationem, quam 90°. 2′ ad 70°. 24′, atque ideo motum verum fuisse tardiorem a 6 Augusti usque ad 7 Septembris, quam a 15 Julii usque ad 6 Augusti: & quoniam ex theoria fere cognita hujus planetæ scitur, Mercurium 6 Augusti non procul fuisse ab aphelio, recte infertur, quod eo die nondum illud transierit, ideoque linea S *a* intra S A & S P cadere debeat. Præterea notum est, eccentricitatem ellipsis, quam describit Mercurius, esse circiter = 0, 21, semiaxe majore supposito = 1. Ex quo assumatur primo eccentricitas = 0. 205, & fiat duplex hypothesis anguli A S *a*; in una statuatur 8 graduum, in altera novem; erit angulus I S *a* ex prima hypothesi 78°, 24′. 3″, ex secunda vero 79°, 24′. 3″; & in priori quidem hypothesi 8°, & 78°. 24′. 3″ respondentes anomaliæ mediæ facile (139) reperiuntur 11°. 50′. 55″, & 101°. 58′. 52″, quarum differentia 90°. 7′. 57″ excedit 90°. 2′. 0″ quantitate 5′. 57″, scilicet erroris primæ hypotheseos. Similiter in altera hypothesi angulis 9°, & 79°. 24′. 3″ competunt anomaliæ mediæ 13°. 19′. 25″, & 102°. 59′. 51″; & earum differentia est 89°. 40′. 26″, quæ a 90°. 2′ deficit 21′. 34″, nempe errore secundæ hypo-

 the-

thefeos. Quoniam hi duo errores contrarii funt, alter nempe pofitivus, negativus alter; inferatur, ut fumma eorundem 27'. 21'' ad 1°. 0'. 0'', feu differentiam anomaliarum pro veris affumptarum in duplici hypothefi; ita error ex hypothefi prima emergens 5'. 57'' ad 12'. 59'', qua quantitate angulus A S *a* augendus eft, ut error dictus corrigatur. Hinc facienda eft tertia hypothefis, & angulus A S *a* ponendus 8°. 12'. 59'', confequenter I S *a* = 78°. 37'. 2''; erunt anomaliæ mediæ refpondentes his duobus angulis 12°. 10'. 5''; & 102°. 12'. 5'', quarum differentia 90°. 2'. 0'' accurate, qualem intervallum inter primas duas obfervationes exigit: atque problema folutum effet, fi anomalia vera *a* S P ad mediam reducta, additaque anomaliæ mediæ 12°. 10'. 5'', daret 130°. 57'. 27'' pro motu medio correfpondente angulo A S P; fed quia fubtractis 8°. 12'. 59'' ex 103°. 6'. 43'', anomalia media refiduo 94°. 53'. 44'' competens invenitur inito calculo 117°. 50'. 13''. quæ addita ad 12°. 10'. 5'' efficit 130°. 0'. 18''; fequitur, quod licet primo affumpta quantitas eccentricitatis congruat cum primis duabus obfervationibus, in tertia tamen errorem 57'. 9'' producat.

153. Affumatur igitur *fecundo* eccentricitas = 0. 21; & pofito A S *a* prima vice = 8°, deinde = 9°, calculus in utraque hypothefi ad modum prioris repetatur: invenietur, debuiffe A S *a* = 9°. 12'. 43'' ftatui, & I S *a* = 79°. 36', 46'', ut anomaliæ mediæ prodirent 13°. 45'. 48'', & 103°. 47'. 48'', quarum differentia 90°. 2'. 0'' intervallo temporis a 15 Julii ad 6 Augufti competit. Ut hypothefeos hujus veritas examinetur, fubducantur 9°. 12'. 43'' ex 103°. 6'. 43''; habebitur *a* S P = 93°. 54'. 0'', cui anomalia media convenit 117°. 28'. 47''. Huic addantur 13°. 45'. 48'', fiet 131°. 14'. 35'', quod excedit motum medium 130°. 57'. 27'' angulo A S P refpondentem quantitate 17'. 8'': adeoque eccentricas nunc affumpta quamvis fatisfaciat primæ & fecundæ obfervationi, in tertia tamen hunc relinquit errorem per exceffum. Qui ut tollatur, fiat: *ut* 1°. 14'. 17'' *(feu fumma errorum ex utraque eccentricitatis affumptitia quantitate emergentium) ad* 17'. 8'', *feu errorem ex affumptione fecunda enatum; ita* 0. 005, *id eft differentia eccentricitatum affumptarum, ad* 0. 001153, *id eft ad errorem eccentricitatis fecundo affumptæ; Et ita etiam eft differentia anomaliarum pro veris affumptarum in utraque hypothefi, nempe* 59'. 44'', *ad* 13'. 46'', *feu errorem hypothefeos fecundæ.* Hinc ut fecunda hypothefis corrigatur, affumenda eft eccentricitas = 0. 208847; & A S *a* = 8°. 58'. 57''. ex quibus reperitur, anomaliis A S *a* = 8°. 58'. 57'', & I S *a* = 79°. 23'. 0'', nec non *a* S P = 94°. 7'. 47'', refpondere anomalias medias 13°. 23'. 38''; 103°. 25' 43'', & 117°, 33', 45'', ex quibus obtinentur 90°. 2'. 5'' & 130°. 57'. 23'' motus medii, fere ut ex tempore periodico deducuntur.

154. Quod

154. Quod si itaque anomalia vera $ASa = 8^{\circ}. 58'. 57''$ addatur loco vero $8^{s}. 4^{\circ}. 54'. 57''$, habetur locus verus aphelii in $8^{s}. 13^{\circ}. 53'. 54''$. Et si fiat *ut* 360° *ad tempus revolutionis Mercurii; ita anomalia media* $13^{\circ}. 23'. 38''$ *est ad* 3 d. 6 h. 33'; reperitur, quod Mercurius per aphelium suum transierit die 9 Augusti 6 h. 33'. Denique eccentricitas orbitae = 0. 28847; quae omnia cum praecedentibus fere congruunt.

ARTICULUS XIII.

De lege in genere, secundum quam vis centralis agit in planetas in trajectoriis conicis motos; & peculiariter de iis, quae orbitis ellipticis sunt propria.

155. Quoniam motus planetarum aequabilis non est, vis centralis, qua in orbitis suis retinentur, variabilis sit, oportet. Et quamvis res per se scitu digna sit lex illa, secundum quam in diversis distantiis vis centralis agit; ex eo tamen capite praesens disquisitio se se praecipue commendat, quod magnam utilitatem conjunctam habeat, ut diversi planetae inter se comparari possint. Hac animadversione excitatus observator noster, examen theoriae virium centralium sequentibus theorematis prosequetur.

156. THEOREMA I. *Vis centralis variabilis quaecunque, tempore admodum exiguo pro uniformi acceleratrice habenda est.*

Hoc Theorema demonstrabitur, si ostendatur, quod spatia, quae corpus dependenter a vi centrali quacunque versus centrum describeret, sint inter se ut quadrata tempusculorum, ex quibus tempus aliquod datum *t* (59) & admodum breve, compositum est.

Sint P, Q, p (fig. 33) tria puncta arcus infinite parvi trajectoriae cujuscunque APD. Cum hic arcus tempore admodum parvo *t* motu aequabili describatur (56), spatia PQ, Pp sunt inter se ut partes temporis a puncto P computati. Sit PK tangens ejusdem arcus, adeoque directio, quam corpus in P constitutum sequeretur, si vi centrali destitueretur, solaque vi insita constante impelleretur. Ex centro virium S per puncta P, Q, p ducantur radii vectores SP, SQ, Sp, qui producti occurrant tangenti in R & F. Patet *Primo*, partes QR, pF inter arcum, & tangentem interceptas exponere actiones vis centralis, cum sint spatia, quibus corpus a via rectilinea PK deflexit, & versus centrum S accessit. *Secundo* quia radii vectores, & hinc etiam particulae interceptae QR, pF, sunt infinite propinquae, esse easdem inter se parallelas.

157. Per

157. Per eadem puncta P, Q & p describatur circulus curvam osculans, cujus arcus cum arcu curvæ infinite parvo congruet (Elem. 468): sit hujus circuli diameter PN ad tangentem communem (Elem. 459) perpendicularis. Denique ducantur per Q & p, QI, pi ad tangentem PK; tum etiam QE, pH ad diametrum PN normales; & conjungantur Np, NQ.

His ita constitutis, triangula PQN, PpN pro rectilineis habenda sunt (Elem. 568), arcubus tam exiguis PQ, Pp a rectis nil differentibus: atque ideo est (Elem. 561) $EP:PQ = PQ:PN$; & $PH:Pp = Pp:PN$: consequenter (Elem. 316) $PQ^2 = PE.PN$; & $Pp^2 = PH.PN$; & $PQ^2:Pp^2 = PE.PN:PH.PN = PE\ (= QI):PH\ (= pi)$ (Elem. 296); ut adeo habeatur $PQ^2:Pp^2 = QI:pi$. Sed ob QI, pi, & QR, pF parallelas, triangula RQI, Fpi similia sunt; quare est $QI:pi = QR:pF = PQ^2:pP^2$. Igitur si corpus viribus altera insita æquabili, altera centrali quacumque describit trajectoriam quamvis APD, effectus vis centralis (per QR, pF expositi) per arcum quemcumque admodum exiguum Pp, sunt ut quadrata temporum per QP, pP exhibitorum, quibus partes illius arcus describuntur.

158. Corollarium I. Viribus igitur centralibus applicari possunt formulæ motus uniformiter accelerati (60), & vis centralis f quævis tempore admodum parvo t agens ita generatim exprimi, $f = \frac{e}{tt}$. Et quia isthic pF repræsentat spatium, quo a tangente versus centrum S hæc vis corpus admovit tempusculo descripti arculi Pp, eadem formula ita exhibenda est: $f = \frac{pF}{tt}$.

159. Corollarium II. Unde si tempuscula t sumantur æqualia, erit $f = pF$, hoc est: *tempusculis infinite parvis æqualibus vires centrales sunt inter se ut rectæ* pF *inter extremum* p *arculorum descriptorum, & tangentem curvæ in altero extremo* P, *interceptæ, & ad radium vectorem* SP *parallelæ.*

160. Corollarium III. Inde porro deducuntur *aliæ formulæ generales diversæ, vim centralem exprimentes.* Nam *primo:* cum tempora exhibeantur per areas inter duos radios vectores, & arcum descriptum comprehensas (83); tempus infinite parvum quo corpus percurrit arculum PQp, exprimi poterit per triangulum SPp, sive quia tangens PF ob pF infinite parvam ab arculo Pp non differt, per triangulum SpF; sunt autem (Elem. 594) areæ horum triangulorum ut facta SP. pM, & ST. PF; hinc $tt = SP^2.pM^2 = ST^2.PF^2$; unde habentur formulæ, $f = \frac{pF}{SP^2.pM^2} = \frac{pF}{ST^2.PF^2}$.

161. *Secun-*

161. *Secundo* Productis PS & FS, donec occurrant circumferentiae circuli osculatoris PBN, fiet (Elem. 565) pF : PF = PF : pB; & cum pP per hypothesin sit arcus infinite parvus, chordae PV, pB sunt infinite propinquae, adeoque PV = pB; & hinc $pF = \frac{PF^2}{PV}$. Hic valor in secunda praecedentium duarum formularum substituatur pro pF, fiet nova formula $f = \frac{1}{ST^2 \, PV}$.

162. *Tertio* denique in triangulis rectangulis similibus STP, PVN habetur SP : ST = PN (= 2 PG) : PV; adeoque $PV = \frac{ST.2PG}{SP}$; & $PV.ST^2 = \frac{ST^3.2PG}{SP}$. Si in ultima formula hic valor substituatur, ea abit in hanc, $f = \frac{SP}{SP^3.2PG}$.

163. THEOREMA II. *Vis centralis ad focum sectionis conicae tendens est in ratione reciproca duplicata radii vectoris.*

Demonstratio. Exhibeat ellipsis APHL (fig. 35) sectionem conicam a corpore P descriptam vi centrali f, ad focum S tendente. Demonstrari debet, esse $f = \frac{1}{SP^2}$.

Etenim *Primo* ob triangula SPT, QPV similia habetur SP : ST = PQ : QV; & SP + PQ : ST + QV = SP : ST. Est vero (Elem. 796) SP + PQ = 2 CA; & ST + QV = 2 CK, quia ob CS = CQ, perpendicularis CK est inter perpendiculares alias QV, ST media arithmetice proportionalis: ergo etiam 2 CA : 2 CK = SP : ST = CA : CK seu PD. Porro (Elem. 863) CA : PD = CN : CB; quare SP : ST = CN : CB; & hinc $ST = \frac{CB.SP}{CN}$.

Secundo. Sit PG radius osculi seu curvaturae in P sectionis conicae; erit (Elem. 886) $PG = \frac{CN^2}{PD}$. Est autem $PD = \frac{CA.CB}{CN}$; ergo $PG = \frac{CN^3}{CA.CB}$. His positis

Substituatur valor de ST & PG in formula generali $f = \frac{SP}{ST^3.2PG}$, eadem pro sectione conica, ad cujus focum S vis centralis tendit, erit $f = \frac{SP.CN^3.CA.CB}{SP^3.CB^3.2CN^3} = \frac{CA}{SP^2.CB^2.2} = \frac{CA}{SP^2.2CB^2}$ & omissis constantibus CA, 2CB², $f = \frac{1}{SP^2}$.

164. Præcedens demonstratio facile equidem hyperbolæ applicatur; at non item Parabolæ, cui unicus tantum focus. Ne igitur veritas theorematis in parabola sine demonstratione relinquatur, sit (fig. 71.) parabolæ APR semiordinata PO, radius osculi PG, diameter ad punctum P, PQ: erit ex natura hujus curvæ (Elem. 827) AH = AO, & (Elem. 807) Anguli QPR, SPH, SHP æquales, adeoque (Elem. 499) SH = SP. Et quoniam perpendiculum ST in basin trianguli isoscelis demissum ex vertice HSP, eandem bisecat, est HT = TP. Igitur ob $HA = \frac{1}{2}HO$ & $HT = \frac{1}{2}HP$, erit $DP = 2TS$, & propterea (Elem. 297) HA : HT = HO : HP. Unde ducta AT, triangula HTA, HPO similia (Elem: 559) & rectangula sunt, cum PO sit semiordinata ad axem. Est igitur AT perpendiculum ex angulo recto STH in hypotenusam HS demissum; & ideo (Elem. 561) SH (sive SP): ST = ST : SA, adeoque $ST^2 = SP.\,AS$, & $ST^6 = SP^3.\,AS^3$. His positis, radius curvaturæ in P, nempe PG, est (Elem. 887) $= \frac{DP^3}{4AS^2}$ sive ob $DP = 2ST$, $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$, & $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Unde facta substitutione in formula $f = \frac{SP}{ST^3.\,2PG}$, fiet $f = \frac{SP.\,AS^2}{ST^3.\,4ST^3} = \frac{SP.\,AS^2}{4ST^6} = \frac{SP.\,AS^2}{4SP^3.\,AS^3} = \frac{1}{4SP^2.\,AS}$; & omissis constantibus, $f = \frac{1}{SP^2}$.

165. THEOREMA III. *Si plura corpora viribus centralibus ad focum communem tendentibus, quæ sint in ratione reciproca duplicata distantiæ, sectiones conicas describant circa centrum virium, erunt*

I. *Areæ, quas radii vectores æquali tempore verrunt, in ratione subduplicata parametrorum axium principalium cujusvis sectionis.*

Sit enim parameter axis principalis $= \pi$, erit (Elem. 817) $\pi = \frac{2CB^2}{CA}$ (Fig. 35). Adeoque $f = \frac{CA}{SP^2.\,CB^2}$ reducitur ad hanc expressionem $f = \frac{1}{SP^2.\,\pi}$; quod idem pro parabola ex formula $f = \frac{1}{4SP^2.\,AS}$ invenitur, si π pro 4 AS substituatur (Fig. 71). Est autem (160) $f = \frac{pF}{SP^2.\,pM^2}$; adeoque $\frac{1}{SP^2.\,\pi} = \frac{pF}{SP^2.\,pM^2}$. Sed per hypothesin est pF (quod exponit vim centralem) (163) $= \frac{1}{SP^2}$; hinc $\frac{pF}{\pi} = \frac{pF}{SP^2.\,pM^2}$, & $\pi = SP^2.\,pM^2$, seu $\sqrt{\pi} = SP.\,pM$. Atqui $SP.\,pM$ est ut sector PSp &c.

166. II. *Celeritas corporis cujusvis est in quovis puncto trajectoriæ in ratione directa subduplicata parametri axis principalis, & reciproca simplici perpendiculi ex foco demissi ad tangentem in puncto, in quo est corpus; sive* $u = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$. (Fig. 35 & 71.)

Etenim celeritas tempore infinite parvo est ut arcus pP eo tempusculo descriptus; & ob triangula rectangula SPT, pMP similia,

milia, eſt $ST : SP = pM : pP$, ſive $pP = \frac{SP.\ pM}{ST}$. Eſt autem (165) $SP.\ pM = \sqrt{\pi}$; adeoque pP, ſive $u = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$.

167. III. *Si trajectoriæ, in quibus corpora moventur, ſint ellipſes, area tota cujuslibet eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata parametri axis majoris, & ſimplici temporis revolutionis integræ; ſeu* $a = t\sqrt{\pi}$.

Nam tempus t revolutionis periodicæ eſt tanto majus, quo area tota ellipſeos major eſt, & quo minorem ejus partem tempore dato corpus deſcribit. Quare tempus revolutionis eſt ut area integra a ellipſeos directe, & ut ſector s, quem tempore dato deſcribit, reciproce, id eſt, $u = \frac{a}{s}$. Eſt autem (165) $s = \sqrt{\pi}$; ergo $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$, & $t\sqrt{\pi} = a$.

168. IV. *Si trajectoriæ ſint ellipſes, tempus periodicum t cujusvis corporis eſt ut radix quadrata cubi axis majoris d ellipſeos; ſive* $t = \sqrt{d^3}$.

Sit axis minor $= b$, parameter axis majoris $= \pi$; erit (Elem. 817) $d\pi = bb$; & $d^3\pi = b^2 d^2$. Eſt vero area ellipſis ut rectangulum axium, hoc eſt (Elem. 899) $a = bd = t\sqrt{\pi}$ (167), conſequenter $b^2 d^2 = tt\pi$, & hinc etiam $d^3\pi = tt\pi$, ac $d^3 = tt$, ſive $t = \sqrt{d^3}$.

169. Corollarium I. Eſt itaque $d = \sqrt[3]{tt}$, imo etiam $\frac{1}{2}d = \sqrt[3]{tt}$, quæ formula etiam locum habet in circulo, vi centrali ad centrum circuli tendente.

170. Corollarium II. Hinc ſequitur, quod *ex temporibus revolutionum planetarum datis deduci poſſit ratio axium majorum ellipſium, quas ſinguli deſcribunt:* Quare ſi ratio dimenſionum in ſingulis ellipſibus per obſervationes determinetur, omnes eæ dimenſiones in partibus ſcalæ alicujus communis exhiberi poſſunt. Atque hæc eſt altera binarum legum Kepleri.

Exempli gratia: Accipiatur axis major ellipſis, quam percurrit tellus, pro menſura communi ſive ſcala dimenſionum omnium aliarum orbitarum, & ponatur diviſus in 20000 partes æquales; fiat dein: ut tempus periodicum telluris 365d. 6h. 9′. 15″, ad tempus periodicum Mercurii 87d. 23h. 15′. 32″, ita radix quadrata de 8000000000000, cubo ſcilicet axis orbitæ telluris 20000, ad 681204, radicem quadratam de 464039000000, ſive de cubo axis majoris orbitæ Mercurii, cujus radix cubica eſt 7742. Item fiat: ut 2, axis major orbitæ ☿ ſuperius (126) determinatus, ad 7742; ita axis minor 1.855648, & eccentricitas 0.20881 ſunt ad 7570, axem minorem; & 810, eccentricitatem ejusdem in partibus ſcalæ communis. Hac ratione reperiuntur dimenſiones ſequente tabula exhibitæ.

Tabula exhibens elementa Theoriæ Planetarum e Sole ſpectatorum.

		Mercurii.	Veneris.	Telluris.	Martis.	Iovis.	Saturni.
Tempus revolutionum periodicarum.		87 d. 23 h. 15½′	224 d. 16 h. 48⅓′	365 d. 6 h. 9¼′	686 d. 23 h. 30½′	4332 d. 12 h.	10759 d. 8 h
Dimenſiones ellipſiũ, ſuppoſita diame. circ. inter axes media proportio. & in 2000000 partes æquales diviſa.	axis major	2022555	2000022	2000142	2004343	2001161	2001624
	axis minor	1977696	1999971	1999857	1995669	1998839	1998377
	eccentricitas	211165	7141	16881	93134	48188	56982
Dimenſiones ad axem majorem orbitæ Telluris, tanquam ad ſcalam cōmunem relatæ.	axis major	7742	14466	20000	30474	104020	190758
	axis minor	7570	14465	19997	30342	103899	190448
	eccentricitas	810	152	168	1415	2505	5430
	diſtant. media	3872	7233	10000	15203	51980	95302
Situs aphelii a ſtella ♈ Arietis computatus.		s ° ′ ″ 7. 13. 54 30.	s ° ′ ″ 9. 7. 49. 20	s ° ′ ″ 8. 8. 42. 45	s ° ′ ″ 4. 1. 49. 50	s ° ′ ″ 5. 10. 30. 40	s ° ′ ″ 7. 29. 26. 15
Epocha tranſitus per aphelium.		9 Aug. 1740 6 h. 37′ 0″	23 Ian. 1743 15 h. 33′ 30″	29 Dec. 1744 3 h. 1′ 0″	12 Ian. 1745 8 h. 41′ 0″	9 April. 1744 13 h. 0′ 0″	5 Sept. 1723 0 h. 0′ 0″
Diametri ex ſole in diſtantia media viſæ.		21″	29″	21″	12″	37″	16″
Ratio	diametrorum verarum	0, 38	1, 00	1	0, 87	9, 16	7, 26
	ſuperficierum	0, 15	1, 00	1	0, 75	83, 87	52, 73
	ſoliditatum	0, 05	1, 00	1	0, 65	768, 10	382, 80

171. Scholium I. Ratio itaque diſtantiarum ſingulorum planetarum a ſole beneficio calculi obtenta eſt, quæ per ſolas obſervationes haberi nequaquam poterat.

172. Scholium II. Quod ſi obſervetur angulus, ſub quo diameter planetæ apparet, quando eſt in diſtantia aliqua in partibus ſcalæ communis cognita, etiam ratio ſuperficierum, & ſoliditatum obtinetur. *Primo* enim liquet, diametrum veram planetæ eſſe tanto majorem, quo majorem arcum in ſphæra cœleſti ſubtendere videtur, & ſimul quo major eſt ejus diſtantia; ut adeo *diametri veræ planetarum ſint inter ſe ut facta arcuum, quos in cœlo ſubtendunt, in diſtantias eorum ob oculo obſervatoris.*

173. *Secundo* patet, cum ſuperficies ſphærarum ſint inter ſe (Elem. 705) ut quadrata; & ſoliditates (Elem. 718) ut cubi diametrorum verarum; *ſuperficies veras planetarum eſſe ut facta quadratorum arcuum a diametris ſubtenſorum in quadrata diſtantiarum eorundem ab obſervatore; ſoliditates autem veras eſſe ut facta cuborum arcuum, quos diametri ſubtendere videntur, in cubos diſtantiarum ab oculo obſervatoris.*

Atque his principiis innititur calculus, quo tabula præcedente ratio diametrorum, ſuperficierum, & ſoliditatum planetarum exhibita eſt.

174. THEOREMA IV. *Si vis centralis ad focum tendens, qua corpus ellipſin deſcribit, paullo magis creſcat, vel decreſcat, quam in ratione reciproca duplicata radii vectoris; corpus non amplius eandem ellipſin deſcribet, niſi ea ſupponatur circa focum mobilis: & in hac hypotheſi axis major inclinabitur in eam partem, verſus quam corpus movetur, vel in oppoſitam, prout ſcilicet vis centralis aucta, vel diminuta ultra rationem reciprocam duplicatam radii vectoris fuerit.*

Demonſtratio. Quoniam vis inſita æquabilis, ſive projectionis, a nulla alia afficitur, quam a vi centrali (82); quamdiu vis centralis lege eadem agit, tamdiu corpus in trajectoria eadem, in eodem plano deſcripta, eundemque ſitum conſervante, moveri debet: & ſi quidem hæc trajectoria ſit ellipſis, lex vis centralis ſemper eſt (163), ut agat in ratione reciproca duplicata radii vectoris. Quod ſi itaque lex hæc mutetur, diſtantiæ corporis a centro virium in ſingulis trajectoriæ ſuæ punctis, eædem manere nequeunt cum illis, quibus puncta ellipſeos immobilis ab eodem foco diſtabant. Supponamus itaque corpus circa apſidem ſuperiorem ſuæ ellipſeos verſari, & verſus inferiorem progredi, ita, ut directione verſus focum manente, vis centralis paullo minor fiat, quam pro ratione reciproca duplicata radii vectoris: tum vero neceſſe eſt, ut radius vector longior evadat, corpore non amplius tanta vi, ac prius, verſus focum nitente. Atque ita vel corpus extra ellipſin antea deſcriptam exibit, ut aliam curvam percurrat; vel vero ſupponi debet, ellipſin ipſam circa focum ſuum ita moveri, ut talem ſemper ſitum obtineat, in quo corpus ejus circumferentiam deferere non

poſſit. Quod ſi ponatur, evidens eſt, apſidem ſuperiorem debere verſus eandem plagam, in quam tendit corpus, promoveri, cum puncta huic apſidi vicina ceteris longius a foco, in quo centrum virium eſt, diſtent. Itaque in hac hypotheſi axis major ellipſis progredi debet verſus partem, in quam corpus movetur, & quidem eo celerius, quo decrementum vis centralis majus fuerit. Oppoſitum evenire debet, ſi ponatur vis centralis augeri: tunc enim corpus majore vi, quam prius, verſus focum nitens, ellipſeos peripheriam deſereret, ac aliam curvam intra ellipſin deſcriberet, niſi ipſa ellipſis circa focum ſuum rotaretur, ut eæ circumferentiæ partes ſemper corpus attingerent, quæ diſtantiam a foco novæ vi centrali competentem habent. Facile autem perſpicitur, id fieri non poſſe, niſi apſis ſuperior a corpore removeatur, utpote circa quam diſtantiæ a foco nimis magnæ ſunt: unde in hac hypotheſi apſis in partem contrariam motui corporis tendere debet, celeritate augmento vis centralis proportionali.

175. Obſerva I. Conſideranti patet, hypotheſin ellipſeos circa focum ſuum motæ locum non poſſe in omnibus caſibus habere, quibus vis centralis mutari poteſt; unde ſi id fieri ſupponatur, neceſſe eſt, ut decrementum vel incrementum vis centralis majus non ſit, quam ut corpus ad diſtantiam aphelii, vel perihelii moveatur, ac inſuper eadem mutatio virium per motum debitum lineæ apſidum compenſetur: alias impoſſibile eſt, ut corpus ſemper in circumferentia ellipſeos maneat.

II. Quod hic de ellipſi dicitur, cum proportione alteri cuivis trajectoriæ applicari poteſt, modo mutentur, quæ curvatura orbitæ, & ſpecies vis centralis agentis mutari exigunt.

176. Corollarium. Si igitur ex obſervationibus conſtiterit, ſitum lineæ apſidum mutatum fuiſſe, id argumento erit, interea variationem aliquam in lege vis centralis contigiſſe; Et ſi quidem linea apſidum motum continuum & periodicum habeat, is effici debet per actionem aliquam, quæ perpetuo cum vi centrali concurrit, eamque modificat.

CAPUT III.

De legibus motus cometarum.

ARTICULUS I.

De phænomenis motus Cometarum ex ſole ſpectatorum generatim, & de hypotheſi phyſica, quæ eidem explicando ſerviat.

Poſt accuratum, & ſecundum omnes circumſtantias exactum examen curſus plurium cometarum, obſervator noſter ſequentia tanquam ex ipſis obſervationibus certa deducet. 177.

177. I. *Phænomenon.* Directio motus cometarum non tendit in eandem plagam, neque eorum orbitæ in eadem fere cæli regione describuntur; sed alii *directi* sunt, hoc est, moventur ab occidente versus ortum, ut planetæ; alii sunt retrogradi, sive ab ortu in occasum tendunt. Quidam a parte cæli borea versus austrum; quidam ab austro versus boream motus suos peragunt, ita ut eorum orbitæ diversissimæ versus omnem partem sese intersecent.

178. II. *Phænomenon.* Nullus cometa per integram suam revolutionem conspicuus est; sed quidam tempore apparitionis suæ describunt arcum 80, vel 100 graduum, alii majores, ut 150, 200, 250, 300 &c. graduum.

179. III. *Phænomenon.* Cometæ videntur eo majorem portionem suæ orbitæ describere, quo majorem habent velocitatem; & ex opposito.

180. IV. *Phænomenon.* Cometarum velocitas, & diameter apparens semper crescit a tempore primæ apparitionis, usque dum ad medium arcus, quem percurrunt, pervenerint; tum rursus iisdem gradibus & celeritas, & diameter minuitur, quibus accreverat; ita ut in æqualibus a medio puncto orbitæ visibilis distantiis cometarum celeritates & diametri æquales sint.

181. V. *Phænomenon.* Cometæ semper videntur moveri in circulo maximo sphæræ cælestis.

182. Universim inter motus cometarum & planetarum primariorum exactissima est analogia, & nullum discrimen nisi duabus in rebus: *Primo*, quod directio cometarum nullam certam cæli plagam respiciat, sed quaquaversum tendat, ubi ex opposito planetæ omnes eandem pene viam sequuntur. *Secundo*, quod cometæ non observentur integras revolutiones absolvere.

183. Ex omnibus autem istis observator concludet primo, *cometas non habere certum aliquem zodiacum in cælo*, ut suum habent planetæ. Secundo *eorum trajectorias non esse rectas, neque curvas, quæ convexitatem soli obvertant*, saltem si agatur de iis cometis, qui 180 gradibus plures describunt: est enim impossibile, ut recta utcunque longa, & utcunque posita, vel curva versus oculum convexa, sub angulo 180 graduum appareat: sed vero similius est, *cometarum orbitas esse curvas versus solem cavas, quarum rami utrinque in infinitum abeunt*, uti sunt parabola vel hyperbola: vel saltem *quæ in se non redeunt, nisi ad distantiam fere infinitam a sole.* Tertio *cometas ad diversas distantias prope solem transire*, eosque viciniores fieri soli, qui celerius moveri, ac majorem describere arcum videntur; & ex opposito. Quarto, *eorum orbitas esse curvas regulares, viribus motricibus certam & constantem legem sequentibus.* Quinto, *Quamvis orbitam in uno eodemque plano totam esse,*

nec

nec extra illud excurrere. Denique *admodum probabile esse, cometas moveri legibus motui planetarum analogis*, hoc est, *retineri in orbitis duplici vi, altera insita, seu projectionis, æquabili; altera acceleratrice centrali versus solem tendente, & in ratione functionis alicujus eorum distantiarum a sole variabili*, id, quod satis indicat regularis acceleratio, & retardatio motus, cavitas trajectoriæ soli semper obversa, & maxime analogia inter diametros apparentes, velocitates, & distantias.

184. Neque obest huic hypothesi duplex illud discrimen inter cometas, & planetas superius annotatum. Nam cum *Primo* motus projectionis nulli determinatæ directioni sit affixus, sed versus quamcumque plagam æqualiter fieri possit, nihil sane impedire potest, quo minus a dextra versus sinistram; a sinistra versus dextram; a meridie versus septentrionem, a septentrione versus meridiem tendat. Jam vero cum positio plani, in quo motus compositus ex projectione, & vi centrali peragitur, unice a situ centri virium, & directione primi impulsus vis insitæ dependeat; nihil certe obstare poterit, quo minus sydus aliquod in orbita longe ab aliorum orbitis diversa moveatur, præsertim cum primus astrorum motor a nulla prorsus re determinetur, ut in hanc potius ea plagam, quam in aliam impellat. *Secundo.* Si orbita alicujus planetæ sit adeo eccentrica, ut ejus diameter in aphelio constituti sub angulo infinite parvo videatur; manifestum est, eam, consequenter etiam ipsum planetam, in aphelio invisibilem esse; atque hinc apparere nequit, nisi quando circa perihelium versatur; & universim nusquam planeta visibilis esse debet, nisi in distantiis non nimium a sole remotis, & quando ejus diameter angulum aliquem sensibilem facit.

185. His ita constitutis hypothesis naturæ maxime congrua hæc interea observatori nostro videbitur, donec ulterioribus observationibus vel stabiliatur penitus, vel evertatur: *Cometas omnes moveri in ellipsibus valde eccentricis, quarum plana per solem in communi earum foco constitutum transeant; motus vero eorum iisdem legibus accelerari, & retardari, quibus planetæ subsunt.* Atque hinc theoria planetarum etiam cometis sufficit.

186. Sed quoniam calculus astronomicus in ellipsibus valde eccentricis admodum prolixus & intricatus est (138); & cometæ non apparent nisi parte exigua temporis revolutionis; denique curvatura ellipseos, cujus foci magnam habent distantiam, versus vertices axis majoris, valde vicina est curvaturæ parabolæ (est enim (Elem. 806) parabola nihil aliud, quam ellipsis, cujus foci distantiam infinitam habent): licebit *citra errorem sensibilem orbitæ cometarum visibili portionem parabolæ substituere.*

187. Ex

187. Ex hypothesi, quod orbitæ cometarum ellipticæ sint, & ejusdem naturæ cum trajectoriis planetarum, nisi quod majorem habeant eccentricitatem, consequitur, cometas debere statas habere periodos, atque ideo plures jam sæpius in reditu observari potuisse; denique reditum ipsum prædici, ac omnia futuræ apparitionis phænomena præsciri. Et sane eo jam provecta esset res Astronomica, si superiorum ætatum Astronomi accuratas nobis cometarum sibi visorum observationes transmisissent. Verum quia partem maximam cometas pro Meteoris habebant, sive pro corporibus ex diversa materia in aere temere conflatis, postea exardescentibus, ac paulatim consumtis, quæ ab aere ambiente sine certa lege deferrentur, operæ pretium se facturos haud putarunt, si eorum cursum accuratius observarent; sed satis illis fuit annotasse, hoc illove anno cometam majorem minoremve, visum esse, qui hanc, aut illam constellationem percurrerit. Fortasse etiam nullum prorsus ad nos antiquius monumentum apparentium cometarum pervenisset, nisi tanquam funesti nuncii alicujus magni infortunii imminentis fuissent habiti. Nondum duo abierunt sæcula, cum cometæ accurate observari cœperunt; & ab illo tempore non nisi 40 fuerunt, quorum motus cum necessariis circumstantiis annotati. Nil igitur mirum est, quod eorum reditus nondum prædici possit. Tempora eorum periodica longissima sunt, cum eorum velocitas circa aphelia exigua esse debeat. Si exempli causa cometæ distantia a sole in aphelio sit centies major, quam in perihelio, ejus velocitas angularis in aphelio decies millies minor est, quam in perihelio; & hinc si in perihelio tempore unius diei describat unum gradum; in aphelio 10000 diebus, seu plus 27 annis opus est, ut gradum unicum percurrat. Duo solum hucusque fuerunt cometæ, quorum tempus revolutionis utcunque sciatur, alter observatus annis 1531, 1607, & 1682, qui adeo circa annum 1758 rediturus sit; alter, qui circa finem anni 1680 valde magnus apparuit: & collatis inter se diversis historiæ monumentis, admodum vero simile videtur, eum esse eundem cum illis, qui an. 1106, 531, & circa mortem Cæsaris sunt visi, cujus tempus periodicum consequenter est 575 annorum. Rediisse autem tunc cometa censendus est, si positio & dimensio ejus orbitæ congruat proxime cum iis, quæ in jam prius observatis per calculum methodo in sequentibus exponenda (Sect. IV. Cap. II. Art. 2.) institutum deprehenduntur. Tum vero intervallum temporis inter eorum transitum per perihelium dat tempus periodicum, vel ejus multiplum, quod ex historia apparitionum cometarum superioribus sæculis visorum comprobandum est.

188. Legibus corporum in trajectoriis conicis motorum præcedente capite generatim expositis, restat solum, ut eas in particulari parabolæ & cometis applicemus.

Articulus II.

De Legibus peculiaribus corporum in trajectoria parabolica motorum, quæ simul exemplo illustrantur.

189. Theorema I. *Velocitas u in quovis loco* P *Parabolæ, est ad velocitatem* V, *qua corpus viribus centralibus circulum describeret, centro virium existente centro circuli, cujus radius æqualis radio vectori* SP (fig. 71.), *ut* $\sqrt{2}$ *ad* 1; *seu quod idem est, ut* 2 *ad* $\sqrt{2}$.

Demonstratio. $u = \frac{\sqrt{4AS}}{ST}$ (166) $= \frac{\sqrt{4AS}}{\sqrt{SP.AS}}$ (164) $= \frac{2}{\sqrt{SP}}$; igitur $uu = \frac{4}{SP}$. Est vero circulus (cujus radius SP) nihil aliud,

quam

quam ellipsis, cujus parameter est 2 SP (Elem. 801), & in hac celeritas V est constans (88); hinc $V = \frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, & $VV = \frac{2SP}{SP^2} = \frac{2}{SP}$; consequenter $uu : VV = \frac{4}{SP} : \frac{2}{SP} = 4 : 2 = 2 : 1$; & $u : V = 2 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

190. THEOREMA II. *Velocitas angularis corporis existentis in extremitate semiordinatæ ex foco, in quo est centrum virium, ad axem erectæ, est subquadrupla velocitatis, quam idem corpus habet in vertice sectionis, foco vicinissimo, si sectio sit parabola; sed major quam* $\frac{1}{4}$, *si sectio sit ellipsis; eadem denique minor, si sit hyperbola.*

Cum enim velocitates semper sint in ratione reciproca duplicata distantiæ, velocitas corporis in vertice sectionis est ad velocitatem ejusdem in extremitate semiordinatæ ex foco ductæ, ut quadratum hujus semiordinatæ ad quadratum distantiæ foci a vertice. Atqui semiordinata per focum transiens est in parabola dupla distantiæ foci a vertice; in ellipsi autem minor, quam dupla illa distantia; & in hyperbola major, quam dupla; igitur ratio reciproca duplicata distantiarum in Parabola est 4 ad 1; in ellipsi est minor, quam 4 ad 1; in hyperbola major, quam 4 ad 1.

191. Corollarium. Hinc deducitur, ex observato motu cometæ, facile posse judicium ferri, an ad sensum in ellipsi moveatur, consequenter an ejus reditus intra tempus non adeo magnum sperari possit; an vero describat parabolam, nec nisi post longum admodum intervallum rediturus sit, ex hypothesi scilicet, quod portio illa parabolæ orbitæ apparentis sit revera pars ellipseos valde eccentricæ: an denique percurrat hyperbolam, ac ideo reditus illius penitus desperandus sit. Etenim si observetur cometa, quando celeritatem maximam habet, & in distantia 90 graduum utrinque a loco celeritatis maximæ, reperiaturque, quod velocitas in ea distantia sit sensibiliter major, quam $\frac{1}{4}$ velocitatis maximæ, recte concludetur, cometam etiam ad sensum in ellipsi deferri: sed si ea deprehendatur accurate $\frac{1}{4}$ velocitatis maximæ æqualis, aut vero tam exigua sit ab hac quantitate differentia, ut merito erroribus, qui inter observandum evitari non possunt, adscribi queat, statuetur cometæ orbita ad sensum parabolica. At illud vix eveniet, ut velocitas in dicta distantia notabiliter minor inveniatur, quam $\frac{1}{4}$ velocitatis maximæ: id enim si esset, cometa corpus esset, quod in spatiis cælestibus in infinitum abiret, nec unquam ad solem reverteretur.

192. THEOREMA III. *Tempus, quo cometa ex Parabolæ vertice* A (*sive suo perihelio*) *venit in* M, *ubi* (fig. 73) *semiordinata per focum* S *transiens secat Parabolam, seu* quod eodem recidit, *tempus, quo cometa e sole* S *visus a suo peri-*

perihelio ad 90° digreditur, est ut tempus, quo percurreret circulum integrum, cujus radius foret æqualis distantiæ ejus in perihelio a sole A S.

Demonstratio. Nam tempora hæc forent inter se, ut area parabolica A S M ad aream circularem, cujus radius A S: atqui ratio harum arearum in omnibus omnino parabolis eadem est: est enim (Elem. 891) area A S M semper pars duodecima de 16 AS^2, sive $= \frac{4}{3}AS^2$, adeoque est semper ut AS^2: & area circuli radio A S descripti est itidem ut AS^2 (Elem. 609); ergo area parabolica A S M est ad aream circuli, cujus radius A S, in ratione constante.

193. Supponamus interea, arcum distantiæ veræ cometæ ab aliqua stella, per quam cometæ orbita transit, singulis diebus in ipso meridie observatum esse, uti sequente tabula annotatur:

meridie	d.	s	°	′	″	Differentiæ °	′	″
May d.	1.	0.	5.	26.	42	1.	4.	0.
	2.	0.	6.	30.	42	1.	6.	31.
	3.	0.	7.	37.	13	1.	9.	15.
	4.	0.	8.	46.	28	1.	12.	5.
	5.	0.	9.	58.	33	1.	15.	7.
	6.	0.	11.	13.	40	1.	18.	22.
	7.	0.	12.	32.	2	1.	21.	50.
	8.	0.	13.	53.	52	1.	25.	28.
	9.	0.	15.	19.	20	1.	29.	24.
	10.	0.	16.	48.	44	1.	33.	31.
	11.	0.	18.	22.	15	1.	38.	4.
	12.	0.	20.	0.	19	1.	42.	45.
	13.	0.	21.	43.	4	1.	47.	50.
	14.	0.	23.	30.	54	1.	53.	29.
	15.	0.	25.	24.	23	1.	59.	1.
	16.	0.	27.	23.	24	2.	4.	45.
	17.	0.	29.	28.	9	2.	11.	37.
	18.	1.	1.	39.	46	2.	18.	36.
	19.	1.	3.	58.	22	2.	25.	53.
	20.	1.	6.	24.	15	2.	33.	40.
	21.	1.	8.	57.	55	2.	41.	54.
	22.	1.	11.	39.	49	2.	50.	29.
	23.	1.	14.	30.	18	2.	58.	19.
	24.	1.	17.	29.	37	3.	8.	57.
	25.	1.	20.	38.	24	3.	18.	20.
	26.	1.	23.	56.	44	3.	27.	50.
	27.	1.	27.	24.	34	3.	37.	45.
	28.	2.	1.	2.	19	3.	47.	18.
	29.	2.	5.	49.	37	3.	56.	21.
	30.	2.	9.	46.	8	4.	5.	30.
	31.	2.	13.	51.	38	4.	13.	29.
Junii	1.	2.	17.	5.	7	4.	20.	33.
	2.	2.	21.	25.	40	4.	26.	27.
	3.	2.	25.	52.	7	4.	30.	52.
	4.	3.	0.	22.	59	4.	33.	46.
	5.	3.	4.	56.	45	4.	43.	55.

meridie	d.	s	°	′	″	Differentiæ °	′	″
Jun. d.	6.	3.	9.	31.	40	4.	34.	20.
	7.	3.	14.	6.	0	4.	32.	2.
	8.	3.	18.	38.	2	4.	28.	4.
	9.	3.	23.	6.	6	4.	22.	41.
	10.	3.	27.	28.	47	4.	15.	56.
	11.	4.	1.	44.	43	4.	8.	12.
	12.	4.	5.	52.	55	3.	59.	36.
	13.	4.	9.	52.	31	3.	50.	28.
	14.	4.	13.	42.	59	3.	40.	57.
	15.	4.	17.	23.	56	3.	31.	11.
	16.	4.	20.	55.	7	3.	21.	28.
	17.	4.	24.	16.	35	3.	11.	54.
	18.	4.	27.	28.	29	3.	1.	25.
	19.	5.	0.	30.	54	2.	53.	28.
	20.	5.	3.	24.	22	2.	44.	40.
	21.	5.	6.	9.	2	2.	36.	24.
	22.	5.	8.	45.	26	2.	28.	24.
	23.	5.	11.	13.	50	2.	21.	0.
	24.	5.	13.	34.	50	2.	13.	32.
	25.	5.	15.	48.	22	2.	7.	36.
	26.	5.	17.	55.	58	2.	0.	58.
	27.	5.	19.	56.	56	1.	55.	3.
	28.	5.	21.	51.	59	1.	49.	36.
	29.	5.	23.	41.	35	1.	44.	22.
	30.	5.	25.	25.	57	1.	39.	38.
Julii	1.	5.	27.	5.	35	1.	34.	59.
	2.	5.	28.	40.	34	1.	30.	45.
	3.	6.	0.	11.	19	1.	26.	45.
	4.	6.	1.	38.	4	1.	23.	1.
	5.	6.	3.	1.	5	1.	19.	29.
	6.	6.	4.	20.	34	1.	16.	11.
	7.	6.	5.	36.	45	1.	13.	3.
	8.	6.	6.	49.	48	1.	10.	12.
	9.	6.	8.	0.	0	1.	7.	16.
	10.	6.	9.	7.	16	1.	4.	50.
	11.	6.	10.	12.	6			

194. Ex consideratione harum observationum patet, cometæ velocitatem maximam fuisse inter dies quintam & sextam Junii. Determinandum itaque est ipsum temporis momentum, quo cometa velocitatem maximam habuit, & quanta ea fuerit pro tempore exiguo, veluti pro 4 horis; id, quod fieri potest interpolatione differentiarum secundarum, quæ ex observationibus dierum 3, 4, 5, 6, 7, & 8 Junii deducuntur, uti jam (106) explicatum est; aut vero interpolari poterunt quatuor consequenter observationes æqualibus intervallis ante & post diem 6 Junii acceptæ, & duplex tempus quæri, quo cometa eandem habuit velocitatem angularem. Utraque hac methodo reperietur, quod cometa die 5 Junii 16 h. 0′. 0″ per suum perihelium transierit, quod fuit 3^s. 8°. 0′. 0″, existente velocitate angulari intra 4 horas 45′. 50″.

195. His positis, ordinata ad axem per focum parabolæ, quæ describi a cometa assumitur, transiens secat parabolam in 0^s. 8°. 0′. 0″ ex una; & ex altera parte in 6^s. 8°. 0′. 0″, quibus in locis cometa circa 3 May & 9 Julii fuit. Ac interpolando observationes 2, 3 & 4 May, reperitur fuisse in 0^s. 8°. 0′. 0″ die 3 May. 8 h. 0′. 0″, cum velocitate angulari intra quatuor horas 11′. 28″. Similiter ex interpolatione observationum 8, 9 & 10 Julii invenitur velocitas angularis die 9 Julii in ipso meridie (quo nempe fuit in 6^s. 8°. 0′. 0″) fuisse 11′. 27″. 5. pro quatuor horis. Ex quo apparet, has velocitates non modo esse sensibiliter æquales, sed etiam fere subquadruplas velocitatis in perihelio 45′. 50″. Quare hæc tria puncta trajectoriæ cometæ, in quibus fuit 3 May 8 h., 5 Junii 16 h. & 9 Julii in meridie, in parabola existunt, ita ut medium sit vertex, reliqua duo in extremitatibus ordinatæ ad axem per focum transeuntis.

196. Ut sciatur, an omnia reliqua puncta trajectoriæ sint in eadem parabola, accipienda est velocitas aliqua angularis, quam inter duo ex præcedentibus punctis cometa habuit, uti dum in 5^s. 13°. 34′. 50″ fuit, sive dum a perihelio 65°. 34′. 50″ abfuit die 24 Junii; quæ quidem per interpolationem reperitur 22′. 53″ pro duabus horis ante, & totidem post meridiem. Supponatur dein APM (fig. 73) orbita parabolica, in cujus vertice A perihelium, sol in foco S, directrix parabolæ BC, locus cometæ die 24 Junii in P, angulo PSA 65°. 34′. 50″ existente; erit velocitas cometæ in A 45′. 50″; & in P 22′. 53″. Inde ratio distantiarum SA, SP erui potest: posita enim SA 1000 partium, fiat: ut 22′ 53″ ad 45′ 50″; ita SA^2 est ad $SP^2 = 2002913$, cujus radix est 1415. Datis itaque in triangulo rectangulo PSQ latere $SP = 1415$, & angulo ad $S = 65°. 34′. 50″$, invenitur $SQ = 585$. Est autem ex natura parabolæ $PS = PC = BQ$, adeoque $PS + SQ = BS = 2SA$; & hinc summa de PS & SQ debebit

bebit esse dupla distantiæ SA; & id quidem ita habet; nam 1415 + 585 = 2000.

197. Observa. An hypothesis recte assumta sit, ita etiam indagari potest: nempe ex tribus velocitatibus angularibus haberi possunt tres rectæ magnitudine & positione datæ: quæritur dein, quænam e sectionibus conicis, & cujus dimensionis, per earum extrema transeat. (Elem. 882).

Pluribus cometis ad hujusmodi calculos revocatis, noster observator inferet

198. I. *Orbitas cometarum esse ad sensum parabolicas, in quarum foco sol existat, quæque iisdem prorsus legibus describantur, quibus Planetæ suas percurrunt.*

199. II. *Diversorum cometarum orbitas discerni posse* primo *ex ratione velocitatum, quas habent in suis periheliis: ex his enim eruitur ratio parametrorum parabolarum, quæ sunt quadruplæ distantiarum in periheliis.* Secundo *ex loco cæli, vel vicinia alicuius stellæ fixæ, prope quam cometæ fuerunt in perihelio.* Tertio *ex constellationibus, per quas semitæ cometarum transeunt, consequenter ex positione planorum circulorum maximorum, in quibus orbitæ describuntur.* Quarto denique *ex diversitate diametrorum, quando cometæ sunt in perihelio.* Unde cometa unus, idemque censendus est, dum idem fuerit locus perihelii, eadem velocitas maxima in perihelio, idem planum orbitæ, eadem diameter apparens in iisdem trajectoriæ locis.

200. III. *Ipsum denique numerum cometarum per longam observationum seriem determinari posse, collatis inter se diversis orbitarum dimensionibus ex ipsis observationibus deductis.* Verum id non nisi plurium sæculorum labore præstari potest.

ARTICULUS III.

De ratione distribuendi inæqualitates Cometarum in diversis orbitarum parabolicarum locis.

201. Quoniam cometæ iisdem legibus subsunt, quas planetæ observant, liquet jam, eorum inæqualitates in diversis orbitæ locis ita distribuendas esse, ut sint areæ, quas radius vector verrit, temporibus proportionales. Itaque iisdem principiis calculus eorum anomaliæ veræ innititur, quibus pro planetis usi sumus; & illud præterea observandum, quod hæ anomaliæ computari debeant ab ipso perihelio, temporibus itidem a transitu per illud sumtis. Unde huc res redit, ut solvatur problema sequens: *Datis parametro parabolæ, differentia inter tempus datum, & transitum cometæ per suum perihelium, positione perihelii, sive axis parabolæ, invenire anomaliam*

veram cometæ, hoc eſt angulum ad ſolem inter perihelium, & locum cometæ pro tempore dato interceptum. Verum hoc problema ad tria alia reducitur, quæ ſubjicimus:

202. PROBLEMA I. *Invenire æquationem, quæ exprimat rationes inter anomaliam veram cometæ; inter tempus, quo eandem conficit; & inter tempus, quo 90° a ſuo perihelio digreditur.*

Reſolutio. Sit t tangens dimidiæ anomaliæ alicujus veræ A S P (fig. 73), ſit a tempus, quo cometa a perihelio ad 90° digreditur; b tempus, quo ab eodem ad locum P pervenit; diſtantia in perihelio a ſole S A = 1: dico, æquationem quæſitam eſſe $3\,a\,t + a\,t^3 = 4\,b$.

Demonſtratio. Ex puncto P erigatur perpendicularis ad tangentem P D, ducatur etiam ſemiordinata P Q, & jungatur P A, erit *Primo* angulus P D A = $\frac{1}{2}$ A S P. Nam demiſſo ad P T perpendiculo S N, ob triangulum P S T iſoſceles, eſt angulus P S N = $\frac{1}{2}$ A S P; & ob triangula rectangula P S N, T P D ſimilia, eſt P D A = N S P = $\frac{1}{2}$ A S P. *Secundo* erit $\frac{1}{2}$ P Q = t. Etenim ſi D Q accipiatur pro radio, eſt P Q tangens anguli P D Q. Eſt autem (Elem. 824) D Q = 2 A S, ergo A S accepto pro radio, eſt P Q dupla tangentis anguli P D Q, ſeu P Q = $2t$; ergo $\frac{1}{2}$ P Q = t. Erit *tertio* A Q = tt. Nam in triangulo rectangulo T P D habetur (Elem. 561) Q D : P Q = P Q : Q T, conſequenter Q T = 2 tt: eſt vero (Elem. 827) 2 A Q = Q T, adeoque A Q = tt. Erit *quarto* area ſectoris parabolici A S P = $t + \frac{1}{3}t^3$. Quippe area trianguli rectanguli Q A P = $\frac{1}{2}$ P Q. Q A = $t \times tt = t^3$; & hinc area ſegmenti A O P A = $\frac{1}{3}t^3$. Nam (Elem. 889) hæc area eſt $\frac{1}{6}$ P Q. Q A = $\frac{1}{6}$ de $2\,t.\,tt = \frac{1}{3}t^3$. Similiter area trianguli A P S = $\frac{1}{2}$ A S. P Q = $\frac{1}{2} \times 2t = t$: ergo area ſectoris A S P = $\frac{1}{3}t^3 + t$. Erit *quinto* area ſectoris A S M O A = $\frac{4}{3}$; eſt enim (Elem. 888) = $\frac{2}{3}$ A S. S M, ſive $\frac{2}{3}$. 1. 2; ergo = $\frac{4}{3}$. Denique tempus a eſt ut eadem area A S M O A; & tempus b ut A S P O A. Habetur igitur hæc proportio: $a : \frac{4}{3} = b : t + \frac{1}{3}t^3$; & inde æquatio $3\,a\,t + a\,t^3 = 4\,b$.

203. Corollarium I. *Datis temporibus* a *&* b *reperitur tangens dimidiæ anomaliæ veræ* P S A, *ſi reſolvatur hæc æquatio tertii gradus* $t^3 + 3\,t = \frac{b}{\frac{1}{4}a}$, id quod in praxi facile hunc in modum præſtatur. Sit triangulum A B C ad A rectangulum (fig. 72), cujus unum latus A B ponatur = 1, alterum A C = $\frac{b}{\frac{1}{2}a}$; quæratur ejus hypotenuſa B C, & inveniantur duæ mediæ proportionales inter B C + A C & B C — A C; harum differentia erit valor t.

204. Opor-

204. Oporteat exempli caufa invenire locum verum cometæ pro meridie diei 21 Junii. A tranfitu ejus per perihelium die 5 Junii 16 h. (194) ufque ad 21 Junii merid. intercedunt 15 d. $\frac{1}{3}$; adeoque $a = 33\frac{1}{3}$, $b = 15\frac{1}{3}$; hinc $t^3 + 3t = \frac{15\frac{1}{3}}{8\frac{1}{3}}$. Ponatur A C $= \frac{15\frac{1}{3}}{16\frac{2}{3}} = 0.92$; ergo (Elem. 756) hypotenufa B C = 1.3588; B C + A C = 2.2788; & B C — A C = 0.4388: duæ mediæ proportionales funt 1.3159, & 0.7599; earum differentia 0.5560; cujus logarithmus 9.7450748 eft idem cum logarithmo tangentis 29°. 4′ 27″$\frac{1}{2}$, cujus duplum eft angulus P S Q = 58°. 8′. 55″; qui additus ad 3ˢ. 8°. 0′. 0″, verum locum perihelii, dat locum verum cometæ pro meridie diei 21 Junii 5ˢ. 6°. 8′. 55″.

205. Corollarium II. Si formula $3at + at^3 = 4b$ reducatur ad hanc $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t = \frac{b}{a}$, eruitur, quod *fi in diverfis parabolis fit eadem anomalia vera, tempus, quo in fingulis a perihelio ad eam corpus pervenit, fit ut tempus, quo ab eodem perihelio ad diftantiam 90° digreditur, & viciffim.* Nam fi eadem fit utrobique anomalia vera, eft $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ quantitas conftans; adeoque $\frac{b}{a}$ exprimit rationem conftantem temporum, quibus eadem anomalia vera in utraque parabola percurritur, ad tempora, quibus cometæ ad diftantiam 90° a perihelio perveniunt.

206. Corollarium III. Data anomalia vera, & tempore, quo cometa a perihelio ad 90° digreffus eft, invenitur tempus refpondens anomaliæ datæ ex æquatione $b = \frac{3}{4}at + \frac{1}{4}at^3$, feu $4b = 3at + at^3$.

207. Corollarium IV. Data anomalia vera, & tempore correfpondente, reperitur tempus, quo cometa a perihelio ad 90° pervenit, ex æquatione $a = \frac{4b}{3t + t^3}$. Quod fi itaque inveniendum fit tempus, quo cometa, cujus diftantia in perihelio fit eadem cum diftantia media telluris a fole, a perihelio ad 90° pervenire poffit, fequens calculus fiat.

208. Quoniam tellus intra dies 365, horas 6, minuta 9 orbitam percurrit: ejus velocitas intra horam unam eft 2′. 27″. 50‴. 5. Eft autem, ob diftantias per hypothefin æquales a centro virium, velocitas in parabola ad velocitatem in circulo, ut $\sqrt{2}$ ad 1 (189); ergo velocitas cometæ in fuo perihelio intra horam reperitur 3′. 29″. 4‴$\frac{3}{4}$; & hinc habetur $4b$ = 4 horis = $\frac{1}{6}$ diei, cujus logarithmus eft 9.2218487; & logarithmus tangentis t = 1′. 44″. 32‴$\frac{3}{8}$ eft 6.7048558: addito logarithmo de 3, habetur logarithmus de $3t$ = 7.1819771. Logarithmus vero de t^3 eft 0.1145674, cui refpondet fra-

fractio decimalis adeo exigua, ut ejus notis præfigi debeant novem zeri, quæ consequenter tuto negligitur. Unde subtractis 7.1819771 ex 9.2218487, relinquitur 2.0398716, cui logarithmo respondent 109, 6154 dies, sive valor de *a*. Cometa igitur cujus distantia in perihelio eadem foret cum distantia media telluris a sole, intra 109 dies, 14 h. 46′. 12″ a perihelio suo ad distantiam 90 graduum veniret.

209. PROBLEMA II. *Invenire æquationem, quæ exprimit rationem distantiæ cometæ in suo perihelio* S A (fig. 73), *alicujus anomaliæ veræ* A S P, & *radii vectoris, seu distantiæ a sole* S P.

Resolutio. Sit p distantia in perihelio; c cosinus dimidiæ anomaliæ veræ; r sinus totus; d radius vector, sive distantia cometæ a sole: erit $ccd = prr$.

Demonstratio. Quia S N est perpendicularis ad P T, angulus N S P æquatur dimidio A S P, consequenter S P N est complementum dimidiæ anomaliæ veræ. Quod si jam accipiatur S P pro sinu toto, habetur r : *sin* S P N $(= c)$ = S P : S N; & $r^2 : c^2 = SP^2 : SN^2$. Est vero (164) S P : S N = S N : A S; & (Elem. 318) $SP^2 : SN^2 = SP$ $(= d)$: A S (sive p): igitur etiam $r^2 : c^2 = d : p$, & $ccd = prr$.

210. Corollarium. *Si in diversis parabolis habeatur eadem anomalia vera, radii vectores ei convenientes sunt ut distantiæ in periheliis.* Cum enim ratio $cc : rr$ constans sit, erit etiam $d : p$ constans.

211. PROBLEMA III. *Distantias in periheliis diversorum cometarum in communi aliqua scala exhibere; assumta v. g. distantia media telluris a sole pro unitate.*

Resolutio. Fiat: *ut* 109 *d* 14 h. 46′. 12″ *ad tempus, quo cometa a suo perihelio ad* 90° *digreditur; ita est unitas ad radicem quadratam cubi distantiæ in perihelio, quæ quæritur.* Exempli gratia pro cometa articuli 193 erit: 109 d. 14 h. 46′. 12″ : 33 d. 8 h. = 1 : 0.304093, cujus quadratum est 0.092472552649; radix cubica 0.4522, quæ est distantia hujus cometæ in perihelio.

Demonstratio. Tempus, quo cometa a suo perihelio digrederetur ad 90°, est ut tempus, quo describeret circa solem, tanquam centrum, circulum, cujus radius p æqualis distantiæ cometæ in perihelio; quia scilicet tempora semper sunt in ratione arearum; & posita A S = p (fig. 72) area A S M O A fit (Elem. 888) $\frac{4}{3}pp$, consequenter ut pp (54), in qua ratione etiam est circulus radio A S descriptus. Est autem (168) tempus revolutionis in circulo ut radix quadrata cubi diametri, sive etiam radii; ergo tempus, quo cometa a perihelio ad 90° digreditur, est ut $\sqrt{p^3}$. Itaque si distantia cometæ in perihelio determinanda sit in partibus scalæ, in qua pro unitate assumitur distantia media telluris a sole, facienda est hæc analogia: ut 109, 6154 dies (tempus scilicet, quo a perihelio cometa pervenit

ad

ad 90° in parabola, in qua diſtantia in perihelio æquatur diſtantiæ mediæ telluris a ſole) ad tempus, quo cometa quivis alter a perihelio ſuo ad 90° digreditur; ita 1 (quia $\sqrt{1^3} = 1$) eſt ad $\sqrt{p^3}$.

212. Corollarium. Ex his, & prius demonſtratis inferes, quod *ſi anomaliæ veræ in quacunque parabola ſemel rite ſint calculatæ, eæ uſui eſſe poſſint pro quovis alio cometa, cujus diſtantia in perihelio datur.* Si enim eædem ſint in diverſis parabolis anomaliæ veræ, radii vectores d ſunt ut diſtantiæ a periheliis (210); ſive (Elem. 308) $\sqrt{d^3}$ eſt ut $\sqrt{p^3}$. Atqui $\sqrt{p^3}$ eſt (211) ut tempus; quo a perihelio ad diſtantiam 90° cometæ perveniunt: & quando anomaliæ veræ ſunt eædem (205), hoc tempus eſt etiam ut tempus, quo eædem anomaliæ conficiuntur a perihelio; igitur dum eædem ſunt anomaliæ veræ in diverſis parabolis, $\sqrt{p^3}$ eſt ut tempus, quo a perihelio ad easdem anomalias cometæ perveniunt. Unde conſtructa tabula anomaliarum verarum ad ſingulos dies a tranſitu cometæ per ſuum perihelium in parabola quacunque, v. g. in qua diſtantia in perihelio ſit æqualis diſtantiæ mediæ telluris a ſole (quæ ſupponatur = 1) ea ſervire poteſt pro inveniendis anomaliis veris alterius cujuscunque cometæ ex ſequente analogia: *ut radix quadrata cubi diſtantiæ cometæ in perihelio ad unitatem; ita eſt intervallum inter tranſitum ejusdem per ſuum perihelium & tempus quodvis aliud, ad tempus, quo cometa (pro quo tabula conſtructa eſt) ad eandem anomaliam veram pervenit.*

213. Hunc in finem ſequens tabula conſtructa eſt: cujus uſus magis ex ſequentibus patebit. Interea tamen is oſtendi poteſt in exemplo N. 204, ſi ſcilicet fiat: ut radix quadrata cubi de 0.4522, ſive 0.304093, eſt ad 1, ita $15\frac{1}{3}$ dies ad 50.4232 dies, quibus in tabula reſpondent 58°. 8'. 55'', quemadmodum ſupra directe per calculum inventum eſt.

214. Obſerva. Logarithmus radicis quadratæ cubi alicujus quantitatis obtinetur, ſi accipiatur medietas tripli logarithmi illius quantitatis. Triplum enim logarithmi alicujus quantitatis eſt logarithmus cubi ejusdem (Elem. 342); & dimidium logarithmi eſt logarithmus radicis quadratæ (Elem. 343).

Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera
	° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″
1	1. 23. 37.	51	58. 37. 2.	101	86. 49. 55.	151	101. 31. 47.
2	2. 47. 12.	52	59. 25. 1.	102	87. 13. 2.	152	101. 45. 6.
3	4. 10. 40.	53	60. 12. 15.	103	87. 35. 53.	153	101. 58. 18.
4	5. 34. 0.	54	60. 58. 44.	104	87. 58. 26.	154	102. 11. 22.
5	6. 57. 8.	55	61. 44. 30.	105	88. 20. 43.	155	102. 24. 19.
6	8. 20. 2.	56	62. 29. 32.	106	88. 42. 43.	156	102. 37. 9.
7	9. 42. 38.	57	63. 13. 52.	107	89. 4. 26.	157	102. 49. 52.
8	11. 4. 54.	58	63. 57. 30.	108	89. 25. 53.	158	103. 2. 27.
9	12. 26. 46.	59	64. 40. 28.	109	89. 47. 5.	159	103. 14. 56.
10	13. 48. 14.	60	65. 22. 45.	110	90. 8. 1.	160	103. 27. 18.
11	15. 9. 14	61	66. 4. 23.	111	90. 28. 42.	161	103. 39. 34.
12	16. 29. 43.	62	66. 45. 22.	112	90. 49. 8.	162	103. 51. 42.
13	17. 49. 39.	63	67. 25. 43.	113	91. 9. 20.	163	104. 3. 44.
14	19. 9. 1.	64	68. 5. 27.	114	91. 29. 17.	164	104. 15. 40.
15	20. 27. 47.	65	68. 44. 34.	115	91. 49. 0.	165	104. 27. 29
16	21. 45. 53.	66	69. 23. 5.	116	92. 8. 30.	166	104. 39. 13.
17	23. 3. 19.	67	70. 1. 1.	117	92. 27. 45.	167	104. 50. 50.
18	24. 20. 3.	68	70. 38. 22.	118	92. 46. 48.	168	105. 1. 20.
19	25. 36. 3.	69	71. 15. 9.	119	93. 5. 37.	169	105. 13. 45.
20	26. 51. 17.	70	71. 51. 23.	120	93. 24. 13.	170	105. 25. 4.
21	28. 5. 45.	71	72. 27. 4.	121	93. 42. 37.	171	105. 36. 17.
22	29. 19. 25.	72	73. 2. 13.	122	94. 0. 48.	172	105. 47. 25.
23	30. 32. 16.	73	73. 36. 51.	123	94. 18. 47.	173	105. 58. 27.
24	31. 44. 17.	74	74. 10. 58.	124	94. 36. 34.	174	106. 9. 23.
25	32. 55. 27.	75	74. 44. 34.	125	94. 54. 9.	175	106. 20. 14.
26	34. 5. 45.	76	75. 17. 40.	126	95. 11. 32.	176	106. 30. 59.
27	35. 15. 11.	77	75. 50. 18.	127	95. 28. 44.	177	106. 41. 39.
28	36. 23. 45.	78	76. 22. 28.	128	95. 45. 45.	178	106. 52. 13.
29	37. 31. 25.	79	76. 54. 9.	129	96. 2. 35.	179	107. 2. 43.
30	38. 38. 11.	80	77. 25. 23.	130	96. 19. 14.	180	107. 13. 7.
31	39. 44. 4.	81	77. 56. 10.	131	96. 35. 42.	181	107. 23. 26.
32	40. 49. 3.	82	78. 26. 30.	132	96. 52. 0.	182	107. 33. 40.
33	41. 53. 9.	83	78. 56. 25.	133	97. 8. 7.	183	107. 43. 50.
34	42. 56. 19.	84	79. 25. 55.	134	97. 24. 4.	184	107. 53. 54.
35	43. 58. 35.	85	79. 54. 59.	135	97. 39. 51.	185	108. 3. 54.
36	44. 59. 58.	86	80. 23. 37.	136	97. 55. 28.	186	108. 13. 48.
37	46. 0. 27.	87	80. 51. 55.	137	98. 10. 56.	187	108. 23. 38.
38	47. 0. 2.	88	81. 19. 48.	138	98. 26. 14.	188	108. 33. 23.
39	47. 58. 44.	89	81. 47. 18.	139	98. 41. 23.	189	108. 43. 5.
40	48. 56. 34.	90	82. 14. 25.	140	98. 56. 22.	190	108. 52. 41.
41	49. 53. 32.	91	82. 41. 10.	141	99. 11. 13.	191	109. 2. 13.
42	50. 49. 38.	92	83. 7. 33.	142	99. 25. 54.	192	109. 11. 40.
43	51. 44. 52.	93	83. 33. 36.	143	99. 40. 27.	193	109. 21. 3.
44	52. 39. 15.	94	83. 59. 17.	144	99. 54. 50.	194	109. 30. 22.
45	53. 32. 48.	95	84. 24. 38.	145	100. 9. 6.	195	109. 39. 37.
46	54. 25. 31.	96	84. 49. 39.	146	100. 23. 13.	196	109. 48. 47.
47	55. 17. 26.	97	85. 14. 20.	147	100. 37. 12.	197	109. 57. 53.
48	56. 8. 31.	98	85. 38. 42.	148	100. 51. 2.	198	110. 6. 55.
49	56. 58. 48.	99	86. 2. 44.	149	101. 4. 45.	199	110. 15. 53.
50	57. 48. 18.	100	86. 26. 28.	150	101. 18. 20.	200	110. 24. 47.

Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera ° ' ''	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera ° ' ''	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera ° ' ''	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera ° ' ''
202	110. 42. 23.	304	121. 35. 36.	510	132. 33. 15.	1100	144. 35. 31.
204	110. 59. 43.	308	121. 54. 23.	520	132. 54. 51.	1200	145. 42 42
206	111. 16. 49.	312	122. 12. 47.	530	133. 15. 50.	1300	146. 42. 20.
208	111. 33. 40.	316	122. 30. 51.	540	133. 36. 15.	1400	147. 35. 45.
210	111. 50. 17.	320	122. 48. 34.	550	133. 56. 7.	1500	148. 24. 1.
212	112. 6. 40.	324	123. 5. 58.	560	134. 15. 27.	1600	149. 7. 55.
214	112. 22. 48.	328	123. 23. 2.	570	134. 34. 17.	1700	149. 48. 6.
216	112. 38. 44.	332	123. 39. 48.	580	134. 52. 39.	1800	150. 25. 5.
218	112. 54. 26.	336	123. 56. 16.	590	135. 10. 33.	1900	150. 59. 17.
220	113. 9. 56.	340	124. 12. 26.	600	135. 28. 0.	2000	151. 31. 2.
222	113. 25. 13.	344	124. 28. 19.	610	135. 45. 1.	2100	152. 0. 37.
224	113. 40. 17.	348	124. 43. 57.	620	136. 1. 40.	2200	152. 28. 19
226	113. 55. 10.	352	124. 59. 17.	630	136. 17. 54.	2300	152. 54. 18.
228	114. 9. 51.	356	125. 14. 23.	640	136. 33. 45.	2400	153. 18. 45.
230	114. 24. 21.	360	125. 29. 13.	650	136. 49. 16.	2500	153. 41. 48.
232	114. 38. 40.	364	125. 43. 49.	660	137. 4. 25.	2600	154. 3. 28.
234	114. 52. 47.	368	125. 58. 10.	670	137. 19. 15.	2700	154. 24. 6.
236	115. 6. 43.	372	126. 12. 18.	680	137. 33. 44.	2800	154. 43. 46.
238	115. 20. 30.	376	126. 26. 12.	690	137. 47. 57.	2900	155. 2. 31.
240	115. 34. 5.	380	126. 39. 53.	700	138. 1. 51.	3000	155. 20. 23
242	115. 47. 31.	384	126. 53. 21.	710	138. 15. 28.	3100	155. 37. 26.
244	116. 0. 46.	388	127. 6. 37.	720	138. 28. 48.	3200	155. 53. 43
246	116. 13. 52.	392	127. 19. 40.	730	138. 41. 51.	3300	156. 9. 17.
248	116. 26. 49.	396	127. 32. 32.	740	138. 54. 40	3400	156. 24. 10.
250	116. 39. 36.	400	127. 45. 12.	750	139. 7. 15.	3500	156. 38. 27.
252	116. 52. 14.	404	127. 57. 40.	760	139. 19. 33.	3600	156. 52. 10.
254	117. 4. 43.	408	128. 9. 58.	770	139. 31. 39.	3700	157. 5. 22.
256	117. 17. 3.	412	128. 22. 6.	780	139 43. 30.	3800	157. 18. 7.
258	117. 29. 15.	416	128. 34. 2.	790	139. 55. 9	3900	157. 30. 27.
260	117. 41. 18.	420	128. 45. 49.	800	140. 6 35	4000	157. 42. 25.
262	117. 53. 13.	424	128. 57. 25.	810	140. 17. 48	4100	157. 53. 56.
264	118. 5. 0.	428	129. 8. 52.	820	140. 28 50.	4200	158. 5. 4.
266	118. 16. 39.	432	129. 20. 10.	830	140. 39 39	4300	158. 15. 51.
268	118. 28. 10.	436	129. 31. 17.	840	140. 50 18.	4400	158. 26. 16.
270	118. 39. 33.	440	129. 42. 16.	850	141. 0. 45.	4500	158. 36 22.
272	118. 50. 49.	444	129. 53. 7.	860	141. 11. 2.	4600	158. 46. 9.
274	119. 1. 57.	448	130. 3. 48.	870	141. 21. 9.	4700	158. 55. 38.
276	119. 12. 58.	452	130. 14. 21.	880	141. 31. 5.	4800	159. 4. 50.
278	119. 23. 52.	456	130. 24. 46.	890	141. 40. 52.	4900	159. 13. 45.
280	119. 34. 39.	460	130. 35. 3.	900	141. 50. 30	5000	159. 22. 26
282	119. 45. 19.	464	130. 45. 10.	910	141. 59. 58.	5500	160. 2. 39.
284	119. 55. 52.	468	130. 55. 13.	920	142. 9. 17.	6000	160. 38. 10.
286	120. 6. 18.	472	131. 5. 6.	930	142. 18. 28	6500	161. 9. 44.
288	120. 16. 38.	476	131. 14. 52	940	142. 27. 30.	7000	161. 38. 19.
290	120. 26. 52.	480	131. 24. 31.	950	142. 36. 24.	7500	162. 4. 7.
292	120. 36. 59.	484	131. 34. 3.	960	142. 45. 10.	8000	162. 27. 45.
294	120. 47. 0.	488	131. 43. 27.	970	142. 53. 48.	8500	162. 49. 26.
296	120. 56. 55.	492	131. 52. 45.	980	143. 2. 19.	9000	163. 9. 26
298	121. 6. 44.	496	132. 1. 56.	990	143. 10. 42.	9500	163. 27. 54.
300	121. 16. 27.	500	132. 11. 1.	1000	143. 18. 57.	10000	163. 45. 7.

SECTIO SECUNDA

Complectens partem primam Astronomiæ Terrestris,

Sive

Expositionem præcipuorum Phænomenorum cælestium e tellure spectatorum.

Observator noster e centro solis in Telluris superficiem translatus, præprimis ad sequentia duo generalia phænomena advertet.

215. Phænomenon I. *Cælum instar sphæræ cavæ apparet, in cujus centro oculus observatoris sit collocatus; & quamvis is in superficie telluris sit constitutus, non tamen ultra medietatem cæli videt; neque visus ad magnam superficiei telluris partem porrigitur, sed undique in circulo terminatur.*

Id phænomenon explicatu facile est. *Primo* cælum tanquam sphæra apparet, in cujus centro videtur esse oculus in superficie terræ constitutus: cujus rei eadem est ratio, ob quam cælum e sole spectatum sphæricum videretur, sole centrum occupante (3). Idem contingere deberet in quovis alio loco hujus universi, qui semper pro centro sphæræ cavæ haberetur, in cujus circumferentia omnia reliqua objecta visibilia intra universum contenta posita apparerent.

216. *Secundo.* Si concipiatur planum indefinitum per oculum, qui in centro sphæræ positus videtur, transiens, id sphæram in duo hemisphæria apparenter æqualia secare debebit; & sectio hujus plani in superficie sphæræ circulum maximum constituet (Elem. 666). Oculo jam in O constituto (fig. 36), in ipsa fere superficie telluris convexa C N L, radii visuales, qui quaquaversum ex oculo in superficiem terræ ducuntur, ejusdem tangentes fiunt, adeoque in plano tangente indefinito existunt (quod *planum horizontale observatoris* appellatur) quo cælum in duo hemisphæria æqualia dividitur, quorum alterum supra verticem observatoris semper aspectabile est; alterum vero infra ejus pedes nunquam fit visibile. Quamdiu enim oculus in O manet, nullus ad eum radius lucis infra O Q vel O P transiens pertingere potest: atque ita non solum nihil ultra cæli dimidium videri potest, sed etiam nulla alia objecta terrestria præterquam in plano tangente Q O P sita. Hinc etiam est, quod e majore distantia res in superficie terræ positæ cerni nequeant, nisi oculus ad aliquam altitudinem, v. g. ad M, elevetur: tunc enim visus longius porrigitur, & radiis L M, M N terram tangentibus, ac undique conum efformantibus, in cujus apice oculus existit, terminatur. In hoc quoque

que casu plus quam dimidium cæli videri potest. Illud etiam contingere potest, ut oculus in loco aliquo infra reliquam superficiem telluris depresso constituatur, vel vero objectis elevatioribus undique ambiatur, ut ne quidem medietatem cæli conspicere queat. Sic aspera, & inæquabilis telluris superficies in causa est, cur non semper visus circulo maximo sphæræ cælestis terminetur.

217. Sed quoniam horizon est terminus maxime opportunus, primumque obvius, ad quem motus cælestes referantur, duplex distingui debet: alter physicus, seu *sensibilis*, qui nihil aliud est, quam curva illa, quæ oculo utcunque constituto visum in cælo terminat; alter *horizon rationalis*, sive verus, estque circulus maximus sphæræ cælestis apparentis, oculo observatoris in ejus centro posito, cujus planum terram tangit, cælumque in duo hemisphæria dividit. Atque ad hunc velut terminum ascensus & descensus corporum cælestium referentur, ita ut ea dicantur *elevata*, seu *supra horizontem*, quæ in hemisphærio superiore, ac visibili existunt; illa vero *depressa*, aut *infra horizontem*, quæ sunt in altero hemisphærio. Nos deinceps hunc posteriorem intelligemus, quando simplici voce horizontis, sine alio adjecto, usi fuerimus.

218. His ita positis, si per centrum C, & per oculum observatoris in O constitutum producatur radius C O Z indefinite, is ad horizontem rationalem perpendicularis erit, cujus planum terram in O tangit; & punctum Z, per quod in cælo transire videtur, directe vertici observatoris imminebit, ac undique ab horizonte rationali æqualiter distabit; ipsa autem recta O Z (Elem. 624) plano horizontis perpendiculariter insistet. Itaque (Trig. 2) punctum Z erit polus hujus horizontis, qui *Zenith* vocatur.

219. Hujus puncti complures sunt utilitates haud contemnendæ. *Primo* enim ejus ope invenitur, quantum punctum quodvis in horizonte sensibili acceptum distet ab horizonte rationali. Nam si angulus radiis ex Zenith, & puncto illo ad oculum ductis comprehensus sit 90 graduum, inferetur, hoc punctum in utroque simul horizonte existere; at si is angulus data quantitate minor, majorve sit eo graduum numero, tantundem supra, aut infra horizontem rationalem esse illud punctum concludetur.

220. *Secundo.* Quo angulus ad oculum inter Zenith & sydus quodvis major minorve fuerit, eo illud sydus horizonti vel vicinius erit, vel ab eodem remotius, consequenter eo minorem, vel majorem altitudinem habebit: ita, ut terminus maximæ altitudinis possibilis sit ipsum Zenith. Et universim *mensura altitudinis alicujus stellæ est arcus, qui concipitur in cælo ad horizontem perpendicularis per stellam ductus, sive complementum arcus inter centrum stellæ & zenith intercepti.*

221. *Tertio.* Quamdiu obſervator in eodem loco immotus manet, eundem horizontem, idemque Zenith habet; quam primum vero locum mutat, ejus horizontale planum in alio loco, quam prius, tellurem tangit, & linea a Zenith per hoc punctum contactus ad centrum terræ ducta comprehendit angulum cum linea e priore Zenith ad idem centrum ducta, adeoque etiam in cælo alteri, a priore diverſo puncto reſpondet: duo autem horizontes iſti ſunt ad ſeſe inclinati ſub angulo, cujus menſura eſt arcus cæleſtis inter utrumque Zenith interceptus. (Trig. 15).

222. Phænomenon II. *Omnia ſydera diverſimode moveri videntur. Imprimis enim tam ſtellæ fixæ, quam planetæ, cometæ, & ipſe ſol videntur ſingulis diebus circa terram in circulis admodum inæqualibus, ad ſenſum tamen parallelis, moveri: quædam enim deſcribunt circulos adeo exiguos, ut prorſus immota appareant; alia vero magnos admodum, magnaque cum velocitate percurrunt. Quævis ſtella fixa ſemper videtur in eodem moveri circulo; at ſol & planetæ jam magnos, jam parvos, quandoque ab horizonte multum remotos, alias eidem vicinos peragrant. Denique planetæ nonnunquam in eodem ſitu reſpectu fixarum perſtant; tum quibusdam fiunt viciniores; ac rurſus ab iis in partem oppoſitam recedunt &c.*

Hæc phænomena maximam partem adſcribenda ſunt illuſionibus opticis a duplici motu telluris provenientibus, altero revolutionis annuæ circa ſolem; altero rotationis diurnæ circa axem. Conſtat enim experientia, hominem in navi conſidentem & æquabiliter provectum, omnesque recipientem directiones, quæ navi imprimi poſſunt; conſtat, inquam, talem aliquem ſibi facile perſuadere, ſe cum navi ſua immotum ſtare, & objecta vicina extra navem poſita in partem motui navis oppoſitam progredi.

223. Hæc hominis perſuaſio eo firmior erit, quo navis, qua vehitur, fuerit major: tunc enim diverſæ partes, diverſisque diſtantiis undique circa eum poſitæ, & numero plures ſunt, & eundem reſpectu ejus ſitum perpetuo ſervant. Et certe ſi ſupponamus, talem hominem ita manere quietum, ut caput immotum teneat, vultu in eandem partem ſemper verſo, imagines rerum in navi exiſtentium, quæ in oculos incurrere poſſunt, in eodem ſemper retinæ loco depinguntur: unde fieri debet, ut eas non modo tanquam quieſcentes conſideret, ſed etiam velut terminos, ad quos alia objecta viſibilia referat, & moveanturne, an ſtent, examinet: quoniam itaque progrediente navi tota, quidquid extra eam immobile & fixum eſt, omni momento ſitum reſpectu oculi illius hominis mutare debet, imagines harum rerum in oculi fundo diverſas ſucceſſive partes occupant, atque ideo hiſce etiam motus omnis, qui reipſa in navi eſt, adſcribetur. Et ſane nunquam ab errore hoc ſeſe expediet,

pediet, si judicium ex sensu ferre pergat, nec ratiociniis Geometricis animum flectat in oppositum.

224. Verum observator noster de duplici telluris motu persuasus, altero quo anni tempore ellipsin circa solem percurrit, altero, quo intra viginti quatuor horas circa axem suum vertitur, facile advertet, idem sibi in terra constituto accidere, quod homini, de quo diximus, in navi posito: & quoniam ingens rerum in horizonte sensibili collocatarum est numerus, quæ una cum observatoris oculo telluris motum participant, hæc illusio majorem multo vim habere debet.

225. Quæ cum ita sint, triplicis causæ, quæ motus cælestium corporum e superficie telluris spectanti illudit, effectus observator noster inter se distinguere debet: & primo quidem, quod ipse immotus videatur, cum tamen dietim circa tellurem vertatur. Deinde quod etiam quiescere appareat, quamvis ingentem orbitam circa solem intra annum percurrat. Tandem, quod se existimet in centro eorum circulorum constitutum, quos sydera singulis diebus circa tellurem describere videntur, cum illud non nisi ad centrum telluris sit referendum.

Caput I.

De illusionibus opticis a revolutione diurna telluris circa axem suum pendentibus.

Articulus I.

De revolutione diurna planetarum in genere, deque ejus causa.

226. Theorema I. *Si in spatiis liberis sphæra perfecte rotunda, & homogenea, simul recipiat unum vel plures impulsus juxta ejusdem sui circuli maximi planum & directionibus ad superficiem suam obliquis, ea acquiret duplicem motum, alterum æquabilem rotationis circa illius circuli maximi axem eundem semper situm conservantem; alterum translationis, itidem æquabilem, & in plano ejusdem circuli maximi.*

Demonstratio. Sit (fig. 40) globi exacte rotundi planum circuli maximi EBN, quod *planum æquatoris sphæræ vocabimus.* Exponat AB directionem, & quantitatem impulsus juxta hoc planum: evidens est, quod si AB congrueret cum aliquo axe hujus globi, adeoque perpendicularis esset ad superficiem, globus eadem directione æquabiliter moveretur; sed quia AB ad superficiem obliqua est, ea resolvi de-

debet (71) in duas alias, alteram nempe ad ſuperficiem normalem, alteram parallelam, aut potius in tangentem, ita, ut B O, B H ſint latera parallelogrammi H O, cujus diagonalis B I = A B. Illud etiam per ſe patet, quod B O exprimat eam partem impulſus A B, qua globus in plano æquatoris directione B L progreditur (68); & quod B H repræſentet alteram partem, quæ puncto ſuperficiei B imprimit niſum a centro C per tangentem B H recedendi, quæ conſequenter inſtar vis projectilis habenda eſt, punctum B verſus H impellentis: ſed quia partes omnes globi cohærent, & ſeparationi reſiſtunt, punctum B tantundem verſus centrum C retrahitur, quantum per vim B H ab eodem recedere nititur; atque ideo in circulum circa centrum C motu æquabili movebitur, aut quod idem, circa axem per C tranſeuntem. Igitur ex impulſu A B globus æquabiliter circa axem ad planum æquatoris perpendicularem rotatur, & ſimul in eodem plano motu itidem æquabili progreditur.

II. Quod ſi globo ita affecto novus addatur impulſus D E juxta idem æquatoris planum, eodem modo is debebit in duas partes reſolvi, alteram E P, globum directione E K, & celeritate E P æquabiliter moventem; alteram E F, quæ eum rurſus æquabiliter circa axem ejusdem æquatoris vertere conatur. Fiat jam C K = E P, & C L = B O, globus hac duplici vi impulſus movebitur æquabiliter per diagonalem C M (74) in plano æquatoris ſitam; & ſimul circa axem æquatoris vi E F + B H, utraque ſcilicet verſus eandem plagam conſpirante, ſitumque eundem reſpectu ſuperficiei globi obtinente.

227. Corollarium. *Motus rotationis eo majorem habet velocitatem reſpectu motus translationis, quo impulſus directio ad ſuperficiem magis obliqua eſt.*

228. THEOREMA II. *Diverſæ vis centralis actiones in globum motu uniformi translationis & rotationis præditum, non afficiunt motum rotationis, ſed ſolummodo motum translationis, juxta qualecunque circuli maximi planum eæ fiant.*

Demonſtratio. Supponatur (fig. 40) globus P I Q K, ut theoremate præcedente expoſitum eſt, circa axem ſuum P Q rotari, interea vi centrali directione C S in eundem agente, ita, ut C S per centrum tranſeat, ideoque ad globi ſuperficiem ſit perpendicularis. Manifeſtum eſt, actionem vis centralis non debere in duas alias reſolvi, quarum una ſit tangens; ſed effectum totum ejus eſſe, ut utrumque hemiſphærium I Q K, K P I, verſus S admoveat, cum in utrumque æqualiter vis iſthæc agat. Quare id ſolum præſtare poteſt, ut motum translationis vel acceleret, vel retardet, prout ad ejus velocitatem diverſam habuerit rationem: item ut ſingulis momentis ejus directionem mutet, & ut globus curvam deſcribat, motu

motu rotationis ſemper manente æquabili, juxta idem planum, circa eundem axem ſitum ſuum perpetuo conſervantem.

229. Corollarium. *Inæqualitates motus annui planetarum nihil officiunt motui diurno æquabili*, quoniam eæ a vi centrali proveniunt (163).

Articulus II.

De phænomenis generalibus a motu diurno Telluris pendentibus.

230. Quia terra ſingulis diebus circa axem ſuum volvitur, ſingula ejus ſuperficiei puncta toti ſucceſſive cælo obvertuntur, atque circulos deſcribunt, quorum plana ad axem perpendicularia, & centra omnia in eodem axe exiſtunt. Sunt itaque hi circuli omnes inter ſe paralleli, quemadmodum elementa ſphæræ concipiuntur (Elem. 661). Hinc vero ſequitur I: *Omnia ſydera debere videri ſingulis diebus circa axem telluris in circulis parallelis moveri, velut ſi forent in ſuperficie ſphæræ telluri concentricæ.*

231. Sola duo extima axis, circa quem terra volvitur, puncta locum non mutant, reliqua omnia circulos percurrunt, eo quidem majores, quo a duobus illis punctis fixis, ſive *polis*, magis diſtant, ita ut maximus ſit, qui inter eadem eſt medius, qui etiam *æquator* appellatur, eſtque circulus maximus ſphæræ terreſtris; ceteri vero paralleli, æquali a medio utrinque intervallo accepti, inter ſe ſint æquales. Porro radii horum circulorum ſunt ſinus arcuum, qui diſtantiam eorum a polo viciniore metiuntur; aut vero coſinus arcuum, diſtantiam ab æquatore metientium.

Et quoniam tota terræ ſuperficies eodem tempore, id eſt intra diem, ſemel circumagitur, diverſorum punctorum velocitates (51) ſunt inter ſe, ut ſpatia, ſive ut circulorum, quos percurrunt, peripheriæ, ſeu etiam ut eorum radii.

232. Sequitur II: *Duo debere eſſe in cælo puncta* (fig. 41) P & Q, *quæ fixa appareant, in quibus ſi qua ſtella exiſteret, ea omni motu apparente careret. Sunt autem hæc puncta, productione axis* p q *telluris* p e q z *determinata, poli circuli maximi ſphæræ cæleſtis* E Z Z, *qui ſit plano æquatoris terræ* e z z *producto. Et ſydera omnia videri debent circa hos polos, aut potius circa axem* P Q, *diverſos circulos deſcribere velocitatibus iiſdem proportionalibus.*

233. Ut methodus in expoſitione reliquorum phænomenorum ſervetur, dicemus polum P *Arcticum, Borealem*, vel *Septentrionalem*, qui plagæ boreali reſpectu eorum, qui Europam incolunt, obvertitur, ac prope conſtellationem urſæ minoris exiſtit; polum vero Q *Antarcticum, Auſtralem*, ſeu *Meridionalem*, qui priori directe opponitur, & Europæis verſus meridiem jacet.

234. Circulus sphæræ cælestis, quem intra viginti quatuor horas stella quævis describere videtur, *parallelus* illius stellæ vocatur; *declinatio* vero syderis, sive paralleli illius, est arcus circuli maximi distantiam syderis vel paralleli, ab æquatore mensurans. Si stella ex parte poli borealis P fuerit, ejus declinatio dicetur *Borealis*; si vero ex parte poli Australis Q, *Australis.*

235. Si e centro telluris C per quodvis punctum in superficie *m* ducatur recta C*m*, donec occurrat superficiei sphæræ cælestis in M, punctum M, dum terra motu diurno circumvolvitur, describet parallelum LMML, parallelo terrestri *lmml* a puncto *m* descripto respondentem: & si porro MC producatur in partem oppositam usque in T, punctum T alterum parallelum in cælo TTVV, priori LMML æqualem, & ejusdem declinationis, describet, cui in terra respondet parallelus *ttuu.*

236. Inferes autem hinc *primo*: parallelum in sphæra cælesti cum correspondente terrestri LMML & *lmml* esse parallelos inter se, & elementa similia coni eundem cum terra axem, & verticem in centro C habentis. *Adeoque parallelus sphæræ cælestis nequit esse in eodem plano cum parallelo terrestri correspondente; sed solus æquator cælestis* EZZ *cum terrestri* ezz *in eodem sunt plano*, quia utriusque planum fit ejusdem radii CZ, ad axem PQ normalis, rotatione.

237. Inferes *secundo*: Si stella aliqua motu diurno per Zenith observatoris transit, id indicio esse, parallelum stellæ correspondere parallelo observatoris. Unde si mensura arcus MZ, quo stella illa M ab æquatore cælesti distat, accipiatur, habetur etiam arcus *mz*, sive distantia observatoris ab æquatore terrestri. Et hinc *arcus qui distantiam observatoris ab æquatore terrestri metitur, est æqualis declinationi stellæ per ejus Zenith transeuntis*; ita quidem, ut si stellæ sint fixæ, & observator locum mutet, ex differentia declinationis stellarum per suum Zenith in diversis locis transeuntium scire possit, quot gradibus ad æquatorem accesserit, vel recesserit.

238. Inferes denique, *punctum sphæræ cælestis, in quo est Zenith alicujus loci in tellure, eundem locum repræsentare, ita ut per Zenith quivis locus telluris designari possit.* Etenim parallelus cælestis per hoc Zenith transiens determinat parallelum terrestrem loci; & declinatio paralleli cælestis mensurat distantiam loci ab æquatore telluris: circulus denique maximus ex hoc Zenith tanquam polo in sphæra cælesti descriptus, horizontem loci designat.

Atque hinc, quando per decursum peculiaria alicui loco telluris phænomena explicanda erunt, eum locum sæpe non aliter, quam per suum Zenith designabimus.

ARTI-

Articulus III.

De motu apparente solis e duplici motu vero telluris proveniente.

239. Quoniam sol centrum est motus annui astrorum, opportunum duximus, antequam longius progrediamur, ut quinam ejus motus apparentes sint futuri, examinemus. Dum terra motu vertiginis intra diem circa axem suum, & intra annum circa solem revolvitur, in sole, qui reipsa immobilis manet, duplex apparere debet motus, alter scilicet diurnus, & communis omnibus astris, circa axem æquatoris terræ, alter annuus circa terram in plano orbitæ telluris; hinc etiam ad terram propius accedere, & ab eadem rursus recedere videbitur, prout terra ipsa motu vero ei vicinior vel remotior facta fuerit.

240. Ut motus hic annuus apparens rite concipiatur, e centro solis S (fig. 37) radio in infinitum producto intelligatur in plano orbitæ telluris descriptus circulus A M P N, & in duodecim partes æquales, quæ totidem signa zodiaci repræsentent, divisus: sit *ampn* orbita telluris elliptica, cujus alter focus est S. Quoniam radii circuli sunt per hypothesin infiniti, diametri orbitæ terræ evanescunt, & omnia ejus puncta pro centro circuli A M P N haberi possunt.

His positis si e terra in aphelio *a* constituta ducatur recta *a* S A, sol in opposito puncto cæli A apparere debebit, sex signis distans. Postea terra in *m* translata, sol in M videbitur, eoque intervallo temporis arcum A M percurrisse. Eodem modo quando terra ad suum perihelium *p* pervenerit, sol in P, sex signorum distantia, erit, & sic deinceps. Unde constat, videri solem arcus A M, MP, P N, N A percurrere eo tempore, quo revera tellus in sua orbita arcus *am*, *mp*, *pn*, *na* respective describit. Et quoniam tellus hos arcus diversa velocitate, & mutata singulis momentis distantia a sole percurrit; etiam sol in arcubus circuli A M, M P, P N, N A eadem inæquali celeritate moveri, & jam majore, jam minore diametro videbitur, prout nempe terra vicinior, vel remotior erit, id, quod efficiet, ut sol putetur ad terram accedere, aut ab eadem recedere.

241. Ex his autem generatim sequitur *primo*, *quod quando solum agitur de diversis punctis superficiei sphæræ cælestis, in quibus sol videtur, supponi is possit in circulo infinite magno* P M A N (quem in sequentibus *Eclipticam* appellabimus) *reipsa moveri, oculo observatoris in centro constituto. Itaque ellipsis, quam terra describit, tum eum solum usum habebit, ut inveniatur ratio diversarum distantiarum terræ a sole pro tempore dato, ac vera directio radii visualis in centro solis terminati.*

Exempli cauſa quando terra ex *a* in *b* pervenit, ſol arcum eclipticæ AB percurriſſe videbitur: & anomalia vera terræ *a* S *b* determinabit anomaliam veram ſolis ASB in ecliptica; longitudo vero rectæ S *b* repræſentabit diſtantiam veram terræ a ſole. Idem intelligendum eſt de planetis & cometis, dum ad ſuperficiem cavam ſphæræ cæleſtis referuntur.

242. Sequitur ſecundo: *Dato* (ſive ex obſervatione, ſive ex calculo) *vero loco terræ in ſua orbita, dari etiam additis vel ſubtractis ſex ſignis verum locum ſolis in ecliptica*, ita, ut theoria motus ſolis e terra viſi ſit eadem cum theoria motus terræ e ſole ſpectatæ. Et quoniam nulla alia cauſa eſt, ob quam ſoli aliquis alter motus annuus apparens attribui poſſit, præter motum annuum telluris; deinceps non aliter de motu ſolis in ecliptica loquemur, quam ſi verus eſſet.

243. Sequitur tertio: *Reſpectu obſervatoris in tellure conſtituti planum eclipticæ eſſe maxime opportunum, ut ad illud motus planetarum, & cometarum in diverſis orbitis referantur;* quemadmodum etiam planum æquatoris commodiſſimum eſt, ad quod poſitio parallelorum, quos ſtellæ ob motum rotationis diurnæ telluris deſcribere videntur, exigatur.

244. Ut motus annuus terræ cum diurno recte concilietur, obſervandum eſt, quod ſi planum eclipticæ idem eſſet cum plano æquatoris, vel ſi axi ſtelluris ad planum eclipticæ foret perpendicularis; ſol quotidie eundem ob motum vertiginis terræ circulum deſcribere videretur, isque ipſe foret æquator, nec ulla ſolis haberetur declinatio: tunc enim percurrendo motu annuo eclipticam, ſucceſſive per omnes ſtellas in æquatore ſitas tranſiret, & hinc motu diurno in eodem cum illis circulo revolveretur. Sed quoniam ſingulis diebus alios parallelos deſcribere videtur, evidens eſt, planum eclipticæ aliud eſſe a plano æquatoris, atque ad hoc ſub aliquo angulo inclinari.

245. Quæ cum ſint, ſol motu annuo tempore revolutionis unius diurnæ uno fere gradu in circulo aliquo maximo, velut NBTLN (fig. 42) qui eclipticam repræſentat, & æquatorem EBZLE in duas partes æquales ſecat (Trig. 7), progredi debet. Supponamus *Primo*, ſolem die quopiam eſſe in B, communi eclipticæ & æquatoris interſectione; deſcribet igitur tunc motu diurno æquatorem, atque omni declinatione carebit. Altero die uno gradu ex B verſus A progreſſus motu diurno percurret parallelum ab æquatore paululum diſtantem; & ſic prout magis verſus A ſemper progredietur, ita longius ab æquatore recedet, declinatione boreali creſcente, & in parallelis minoribus ſingulis diebus movebitur; v. g. cum in A fuerit, eo die parallelum AIVA deſcribet. Supponatur *Secundo* ſol in T, 90 gradibus, ſive tribus ſignis ab interſectione æquatoris

toris B, ubi ante tres ſcilicet menſes fuerat: erit tunc in puncto eclipticæ ab æquatore maxime diſtante (Trig. 12), cum declinatione boreali omnium, quas habere poteſt, maxima, & viciniſſimus polo boreali; denique motu diurno circulum parallelum omnium minimum O T percurret. *Tertio*, ubi per tres inſequentes menſes ex T in L deſcendit, continuo æquatori fit vicinior, ejus declinatio borealis decreſcit, paralleli, quos dietim deſcribit, fiunt majores, & quando ad L, alteram nempe eclipticæ cum æquatore interſectionem, pervenerit, nullam habebit declinationem, & eo die æquatorem iterum percurret. *Quarto.* Sol ex L verſus N digreſſus in parte cæli auſtrali videbitur, aucta perpetuo declinatione ejus auſtrali, & parallelis diurnis decreſcentibus, donec in N, tribus ſignis ab L, fuerit, ubi maximam declinationem auſtralem attingit, minimumque omnium parallelum N D deſcribit. *Quinto.* Inde denique continuato motu ad B rurſus accedet, imminuta ſemper declinatione auſtrali, atque anno circumacto, iterum in æquatore ſine declinatione erit, novam revolutionem iisdem comitantibus phænomenis inchoaturus.

246. Quia ſol continuo in ecliptica progreditur, liquet porro, *parallelos, quos ſingulis diebus deſcribere videtur, non eſſe veros circulos, ſed ſpirales quaſdam*, quas ductus fili globo pluries circumplicati efformaret. Peracta enim revolutione diurna integra, ſol non in eodem puncto eſt, unde parallelum illius diei inchoavit, ſed aliquantum ſupra, aut infra illud, prout arcus eclipticæ, quem illo die motu annuo confecit, diverſum reſpectu æquatoris ſitum habet.

247. Minimi duo paralleli, quos ſol percurrit, O T, N D, *tropici* dicuntur, quod ſcilicet termini ſint maximæ ab æquatore elongationis, indeque iterum ad æquatorem *revertatur*. Ex his autem polo boreali vicinus appellatur *tropicus cancri*, & qui in hemiſphærio auſtrali eſt, *tropicus capricorni*, quia cum ſol in iis verſatur, vel eſt in tertio eclipticæ ſigno, quod *cancer* vocatur, vel in nono, ſeu in *capricorno*.

248. Interſectiones æquatoris & eclipticæ B & L, *puncta æquinoctialia* ob eam rationem, quam inferius adferemus (274), dicuntur; & quidem punctum B, per quod ſol a tropico capricorni ad tropicum cancri tranſit, eſt *punctum æquinoctii verni*, aut *punctum primum arietis;* alterum vero L, per quod ſol a cancro ad capricornum venit, eſt *punctum æquinoctii autumnalis*, ſive *punctum primum libræ.*

249. Puncta T, N, 90 gradibus, ſeu tribus ſignis a punctis æquinoctialibus diſtantia, ſunt *puncta ſolſtitialia*, quod ſol, quando circa ea verſatur, veluti *ſtationarius* relate ad planum æquatoris videatur. Exhibeat enim (fig. 43) B Z T medietatem æquatoris; B L T

medietatem eclipticæ; B & T puncta æquinoctialia: L punctum solstitiale: patet ex ipsius figuræ inspectione, arcum $lL\lambda$, qui aliquot gradus continet, quos sol tum in ascensu versus L, tum in descensu ab eodem, percurrit, esse ad sensum parallelum cum correspondente arcu æquatoris $zZ\zeta$: itaque toto tempore, quo arcum $lL\lambda$ describit, sol non videtur mutare distantiam ab æquatore, & per aliquot dies eandem habere declinationem.

250. Punctum T (fig. 42) quod propius est ad polum borealem, dicitur *punctum solstitii æstivi*; N vero *punctum solstitii hyemalis*, quod sol ea puncta attingat, quando Europæis æstas, ac hyems est.

251. Ut diversa astrorum positio commodius ad planum eclipticæ & æquatoris referri possit, concipiantur adhuc duo circuli maximi; alter BSLR, per polos eclipticæ R & S, & puncta æquinoctialia B & L transiens, quem contra communem Astronomorum morem *colurum æquinoctiorum* appellabo; alter RPZQE, qui rursus per polos eclipticæ R & S, & simul per polos æquatoris P & Q, transeat. Hic circulus, *colurus solstitiorum* dictus, est ad æquatorem & eclipticam (Trig. 16) normalis, simulque per puncta solstitialia T & N transit.

252. Ex diversis horum circulorum usibus illum hic referre est visum, qui coluro solstitiorum proprius est, nempe quod ob perpendicularem ad æquatorem & omnes parallelos situm, eorum distantiis, seu declinationi metiendæ serviat. Sic arcus IZ, vel VE est mensura declinationis paralleli VAI, adeoque etiam solis in puncto eclipticæ A versantis. Similiter arcus TZ vel OE, & ZD vel EN, aut denique RP, QS sunt mensura declinationis maximæ solis, sive anguli a planis æquatoris & eclipticæ comprehensi, qui *angulus obliquitatis eclipticæ* appellatur.

ARTICULUS IV.

De Phænomenis Particularibus, quorum causa est motus diurnus Telluris.

253. Ponamus I, observatorem esse in alterutro polo telluris constitutum, velut in polo arctico: linea per ejus Zenith transiens coincidet cum axe æquatoris, & ipse polus P cum ejus Zenith, horizon cum æquatore EZz (fig. 44). Hinc omnes stellæ inter hunc polum & æquatorem, sive quarum declinatio est borealis, videbuntur circa CP moveri, ad horizontem parallele; quæ vero in æquatore sunt, perpetuo horizontem radent; denique quæ declinationem australem habent, manebunt semper invisibiles.

254.

254. Unde generatim, *si observator in aliquo polo constitutus sit, non nisi medietatem stellarum videre potest; nulla stella motu diurno oritur vel occidit, nulla ascendit, vel descendit respectu horizontis, nec movetur oblique ad eundem, sed semper parallele; cujusque altitudo est semper eadem cum declinatione.*

Atque ob hunc parallelismum motuum respectu horizontis, quando observator in alterutro polo constitutus est, *sphæra parallela* dicitur.

255. Verum sol, & alia sydera, quæ in orbita propria per diversas stellas fixas transeunte moventur, plano æquatoris eam in duas partes, alteram borealem, alteram australem, secante, necessario, dum a puncto intersectionis suæ orbitæ cum æquatore semper magis recedunt, etiam parallelos diurnos singulis momentis mutant, ita ut nequeant supra horizontem observatoris apparere, quamdiu in parte australi orbitæ versantur, neque etiam possint non apparere toto eo tempore, quo partem borealem percurrunt: exempli causa sol, qui eclipticam intra annum percurrit, sex mensibus integris supra horizontem videri debet; sex aliis sub eodem latere. Supponamus enim eum imprimis in aliquo puncto æquinoctiali constitutum; videbitur motu diurno horizontem radere: postea altius semper ascendet, & motu diurno circulos ad sensum horizonti parallelos describet, prout ejus declinatio borealis in ecliptica progredientis augetur. Spatio trium mensium ad tropicum ♋ & maximam suam altitudinem supra horizontem, quæ obliquitati eclipticæ æqualis est, attinget: inde rursus tribus mensibus versus horizontem ad alterum punctum æquinoctiale descendet, quod ubi attigerit, horizontem verret: postea infra illum descendet, nec amplius spatio semestri, quo partem eclipticæ borealem conficit, videbitur. Itaque *sub polis unica tantum dies, & unica tantum nox est anni spatio, sed quarum utraque sex mensibus durat.*

Idem de planetis dicendum est, quorum orbitæ ad planum eclipticæ, quam terra percurrit, aliquantum inclinatæ, in duas partes æquales ab æquatore secantur; ita Saturnus per quindecim annos semper supra horizontem apparere debet, Jupiter per sex &c.

256. II. Ponamus observatorem in æquatore telluris constitutum. Linea CZ per ejus Zenith ducta erit in plano æquatoris cælestis, atque ideo ad ejus axem PQ perpendicularis, qui in plano horizontali observatoris jacebit. Verum hoc ipsum planum horizontale debebit per centra A, B, C, F, G, H &c. omnium parallelorum, quos astra motu diurno percurrunt, transire, consequenter eos normaliter in partes æquales secare, quarum altera versus Z, semper est supra horizontem; altera medietas versus E infra eundem.

257. Ita-

257. Itaque univerſim *ſub æquatore omnia ſydera ſingulis diebus ſex horis aſcendunt, totidemque deſcendunt, ac poſt occaſum duodecim horis ſub horizonte latent: ipſo vero ortus, vel occaſus momento horizontem perpendiculariter ſecant;* & propter hunc ſitum obſervator in æquatore conſtitutus dicitur *ſphæram rectam* habere.

258. Quod ad planetas & alia ſydera motu proprio in ſuis orbitis lata attinet, ea quoque ſex fere horis aſcendere, ſex aliis deſcendere debent, neque eorum motus ab illo, qui in ſtellis fixis apparet, alia re differt, niſi quod fixæ ſemper eosdem, hæc autem ſingulis diebus alios parallelos deſcribant, majores, minoresve, prout majorem vel minorem declinationem habent, aut etiam prout in ſuis orbitis ab interſectione cum æquatore plus minuſve remota ſunt.

259. Hinc *ſub æquatore toto anni tempore omnes dies, & omnes noctes ſunt duodecim horarum.*

260. III. Ponamus obſervatorem ab æquatore verſus alterutrum polum progredi, v. g. verſus arcticum. Videbitur linea per ejus Zenith tranſiens ſemper magis ab æquatoris plano verſus ejusdem axem, ſive partem borealem recedere, ideoque planum æquatoris magis ſemper verſus partem auſtralem telluris inclinari. Polus borealis ſucceſſive ſupra horizontem attolletur, auſtralis vero infra eundem deprimetur. v. g. ſi poſtquam obſervator 30 gradibus ab æquatore verſus boream progreſſus eſt, ſubſiſtat, linea per Zenith ducta erit C *f* (fig. 44): circulus maximus *h* F *r*, ad cujus planum C *f* perpendicularis, ejus horizon; planum æquatoris E C Z a Zenith 30 gradibus diſtabit, & ad horizontem ſub angulo 60 graduum inclinabitur, quem arcus Z C *r* metitur: polus P ſupra horizontem elevationem 30 graduum, cujus menſura eſt angulus *h* C P, habebit; & polus Q totidem gradibus erit infra horizontem depreſſus.

261. Ex his infertur I. *Quod in quocunque telluris loco obſervator conſtitutus ſit, ſemper diſtantia æquatoris a Zenith æqualis ſit elevationi poli ſupra horizontem, & elevatio æquatoris ſemper æquetur diſtantiæ Zenith a polo.*

262. II. Quod paralleli inter polum & æquatorem ſub eodem angulo ad horizontem inclinentur, qui ex parte polo ſupra horizontem exiſtenti oppoſita æquatur complemento elevationis poli. Atque inde qui inter polum & æquatorem ſitus eſt, dicitur habere *ſphæram obliquam.*

263. III. Quod *omnia ſydera motu* diurno parallelos deſcribentia *debeant videri oblique ſupra horizontem aſcendere, poſtea iterum oblique verſus eundem deſcendere.*

264. IV.

264. IV. Quod *omnes ſtellæ*, quarum paralleli viciniores ſunt polo, quam polus horizonti, hoc eſt, *quarum complementum declinationis minus eſt elevatione poli cognominis, perpetuo ſupra horizontem videantur, nec occumbere vel oriri poſſint.* Exempli cauſa ſtella, quæ deſcribit parallelum I K, nequit deſcendere infra horizontem: dum enim circa polum volvitur, punctum I, infimum illius paralleli, nondum horizontem *h* F *r* attingit. At vero *nulla ſtella in aliquo parallelo, velut* X Y, *mota, cujus complementum declinationis minus eſt altitudine poli diverſi nominis*, hoc eſt, minus depreſſione poli Q, *ſupra horizontem videri poteſt*, quia punctum Y illius paralleli ſupremum, nondum horizontem *r* F *h* attingit.

265. V. Quod omnes paralleli, qui in ſphæra obliqua ab horizonte ſecari poſſunt, ſecentur in duas partes inæquales, (excepto æquatore, utpote circulo maximo): & quoniam motus diurnus aſtrorum eſt æquabilis, tempus, quo ſingulæ ſtellæ ab ortu ſuo uſque ad occaſum ſupra horizontem manent, determinatur a numero graduum portionis paralleli ſupra horizontem extantis: (hinc etiam ea pars paralleli vocatur *arcus diurnus* ſyderis; altera, quæ infra horizontem intercipitur, *arcus nocturnus*). Arcus diurni *i* M *l*, *m* O *n*, eo plures gradus continent, quo paralleli polo P conſpicuo ſunt propiores; & ex oppoſito arcus diurni *s* S *t*, *u* V *x* eo pauciores habent gradus, quo a polo infra horizontem depreſſo minus ſunt remoti: ita quidem, ut ſolus æquator in partes æquales *p* Z *q*, *p* E *q* dividatur, quippe qui ſolus ex omnibus parallelis eſt circulus maximus.

266. VI. Quod arcus diurnus *i* M *l* alicujus paralleli ſemper ſit æqualis arcui nocturno *u* T *x* alterius, qui eandem declinationem verſus polum oppoſitum habet, cum bini quivis ejusmodi paralleli L *m* M *i* L, T *x* V *u* T inter ſe æquentur (235), & reſpectu axis P Q eundem ſitum habeant, horizonte per centrum ſphæræ transeunte, ac eam in duo hemiſphæria æqualia & ſimilia, inferius ſcilicet, & ſuperius dividente.

267. VII. Hinc *in ſphæra obliqua omnia ſydera, quæ ſunt in æquatore, duodecim horis ſunt ſupra horizontem; duodecim ſub eodem: reliqua vero eo diutius ultra duodecim horas ſunt viſibilia ſupra horizontem, quo eorum declinatio verſus polum elevatum ſupra horizontem major eſt; aut vero tanto minore duodecim horis tempore verſantur ſupra horizontem, quo majorem verſus polum depreſſum habent declinationem. Et quantum mora ſupra horizontem alicujus ſtellæ duodecim horas excedit, tantumdem, alterius eandem verſus polum oppoſitum declinationem habentis tempus apparitionis ab iis deficit.*

268. VIII. Quod ad maximam altitudinem attinet, ad quam aſtra aſcendere poſſunt, in hypotheſi, qua obſervatorem in parallelo 30 graduum collocavimus, manifeſtum eſt, eas tantummodo

ſtellas poſſe per Zenith *f* tranſire, quarum declinatio borealis eſt 30 graduum; eas autem, quarum declinatio 30° major verſus boream, debere eodem exceſſu magis verſus polum a Zenith diſtare, quando culminant; & ex oppoſito, quarum declinatio borealis 30° minor, a Zenith verſus æquatorem eadem quantitate in culminatione fore remotas. Porro quæ in ipſo æquatore ſunt, in maxima altitudine 30 gradibus a Zenith diſtant; denique quæ in hemiſphærio auſtrali ſunt, tanto majorem a Zenith verſus auſtrum habent diſtantiam, quanto major eſt earum declinatio; ita ut illæ, quarum declinatio auſtralis eſt 60 graduum, horizontem tantum radant, quin ſupra eum aſcendere poſſint. Ex dictis autem conſequitur, *altitudinem maximam, ad quam ſtella aſcendere poteſt* (quæ *altitudo meridiana* dicitur, cum ſit in medio arcus diurni) *dari, ſi detur altitudo poli reſpectu loci, in quo eſt obſervator, & declinatio ſtellæ.*

269. IX. Si concipiatur circulus maximus PZQEP per polos P & Q tranſiens, & ſimul per Zenith *f*, ejus planum ſecat plana æquatoris & horizontis perpendiculariter (Trig. 16), atque axis æquatoris PQ, omniumque parallelorum centra, debent in eodem eſſe, & hinc omnes paralleli per illud ad angulos rectos, & bifariam dividuntur. Unde arcus hujus circuli inter Zenith, & quemvis parallelum interceptus, menſurat veram diſtantiam paralleli a Zenith, ſive diſtantiam illius puncti paralleli, quod ad Zenith maxime accedit, & in quo ſtella eum parallelum deſcribens maximam habet altitudinem ſupra horizontem. Igitur altitudo meridiana ſtellæ ſemper menſuranda eſt per arcum hujus circuli inter horizontem & ſtellam, quando ad planum illius circuli motu diurno pervenit, interceptum. Atque ob hanc cauſam hic circulus *Meridianus* vocatur.

270. Eſt itaque *Meridianus circulus maximus ſphæræ cæleſtis, per polos æquatoris, & Zenith loci alicujus in tellure ductus, qui arcus diurnos omnium parallelorum in partes æquales ſecat, & ad cujus planum ſtella motu rotationis terræ pervenit eo momento, quod inter ejus ortum & occaſum medium eſt; in quo denique maximam quam habere poteſt, altitudinem ſupra horizontem loci illius attingit.*

271. Et quia terra eſt globus ſphæræ cæleſti concentricus, interſectio plani meridiani cæleſtis cum tellure efficit meridianum terreſtrem correſpondentem.

272. Hinc autem rurſus deducitur, quod quodlibet punctum ſuperficiei telluris, cum habeat ſuum proprium Zenith, debeat etiam habere ſuum proprium meridianum, tam in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, quam in ipſa tellure. Et quia omnia puncta peripheriæ meridiani in ſphæra cæleſti ſunt reipſa totidem Zenith reſpectu omnium punctorum, quibus meridianus terreſtris correſpondens conſtat, ſequi-

ſequitur *omnia puncta ſuperficiei terræ in ejusdem circuli maximi per polos æquatoris tranſeuntis plano ſita, eſſe ſub eodem meridiano tam cæleſti, quam terreſtri.*

273. X. Quoniam meridianus quemvis parallelum biſecat, & per ejus punctum maxime ſupra horizontem elevatum tranſit, ſequitur, quod etiam debeat tranſire per punctum paralleli infra horizontem maxime depreſſum. Et hinc ſtellæ, quæ ob viciniam poli ſupra horizontem elevati nunquam occidunt, quemadmodum ad maximam altitudinem pertingunt, dum inter polum P, & Zenith *f* ad planum meridiani, velut ad K appellunt; ita minimam habent altitudinem, quando poſt 12 horas ad idem planum in I inter horizontem & polum redeunt.

274. Quod ad planetas ſpectat, eorum phænomena a ſitu diverſorum parallelorum pendent, ad quos in propria orbita progredientes ſucceſſive perveniunt. Sic in quovis telluris loco, dum ſol in interſectione æquatoris, & eclipticæ verſatur, duodecim horis ſupra horizontem, & totidem infra eundem eſt, adeoque dies nocti æquatur, unde etiam ea interſectionum puncta nomen *æquinoctialium* traxerunt. At dum ſol extra hæc puncta eſt, dies erit nocte longior, vel brevior, prout arcus diurnus tum major vel minor portio paralleli fuerit.

In exemplo, ſi obſervator in hemiſphærio boreali ſit collocatus, & ſol in tropico ♑, ubi (245) maximam habet declinationem auſtralem, arcus diurnus eſt omnium per totum annum minimus, & hinc dies tunc maxime a 12 horis deficit. Verum ut magis ſemper ſol ad æquatorem accedit, ita arcus diurnus creſcit; & cum eo elapſis tribus menſibus pervenerit, dies exacte 12 horarum erit. Inde per tres conſequentes menſes dies creſcere pergit, donec ſol tropicum ♋, & maximam ſimul declinationem borealem attingat; tum vero arcus diurnus omnium eſt maximus, & dies tantum excedit duodecim horas, quantum in tropico ♑ verſante ſole defecerat. Sed ut denuo ſol ad æquatorem propius ſemper accedit, ita dies iisdem gradibus minuitur, donec in æquinoctio ſequente duodecim horas æquet: tandem dum ſol ad tropicum ♑ redierit, dies eandem, quam ab initio, longitudinem habebit.

275. Ex hac dierum inæqualitate, variaque altitudinis, ad quam ſol ſupra horizontem venit, ratione, quæ ſimilibus cauſis adſcribenda eſt, anni tempeſtatum diverſitas pendet. Dum enim ſol in tropico altero, qui polo infra horizontem depreſſo vicinus eſt, verſatur, parum admodum aſcendit, & exiguo tempore ſupra horizontem moratur: unde ejus radiorum vis modica ſentitur, tum quod admodum oblique incidant, tum etiam quod tam brevi tempore aerem calefacere nequeant, id, quod hyemem dicimus. Ex

oppoſito dum ſol in tropico altero eſt, maximam habet altitudinem, radios fere ad perpendiculum emittit, & longiore multo tempore ſupra horizontem manet, unde aer incaleſcit, quod æſtatem efficit. Denique ſole prope puncta æquinoctialia exiſtente hæc omnia medium quoddam obtinent, ac inde Ver, Autumnuſque habentur.

ARTICULUS V.

De ratione obſervandi, & calculandi accuratius phænomena motus diurni aſtrorum, prout is ad circulos cuivis telluris loco proprios refertur.

276. Ex omnibus, quæ articulo ſuperiore dicta ſunt, abunde liquet, *Phænomena particularia motus diurni aſtrorum a duabus rebus pendere, ſcilicet a ſitu obſervatoris reſpectu æquatoris terreſtris*, aut quod eodem recidit, *ab altitudine poli ſupra horizontem ; & a declinatione ſyderum.* Ut itaque regulæ certæ ſtatuantur, per quas omnia, quæ his phænomenis ad circulos alicujus loci determinati proprios, meridianum, inquam, & horizontem, relatis peculiaria ſunt, eruantur, altitudo poli, & declinatio aſtrorum nota ſint, oportet.

277. Optima autem methodus determinandi elevationem poli ex obſervatione, quando locus aliquot gradibus ab æquatore diſtat, eſt, ſi accipiatur inſtrumento in gradus, minuta, & ſecunda accurate diviſo maxima altitudo hK, & poſt 12 horas minima hI unius e ſtellis, quæ nunquam occidunt. Nam cum talis ſtella ſemper ad eandem diſtantiam circa polum circumeat, elevatio poli in medio duarum altitudinum hK & hI conſiſtere debet.

Si obſervator æquatori ſit vicinior, altitudines ſolis meridianæ, dum in uno & altero tropico verſatur, accipiendæ ſunt. Etenim ſi hæ altitudines accurate æquales ſint, locus obſervatoris eſt in ipſo æquatore; at ſi fuerint inæquales, earum ſemidifferentia erit altitudo poli ſupra horizontem, & quidem borealis vel auſtralis, ut altitudo ſolis in tropico ♋, vel in tropico ♑ major fuerit.

278. Elevationis poli ſic invnetæ complementum Pf, vel r Z eſt elevatio æquatoris (261). Declinatio vero ſyderis cujusvis facile determinatur, ſi obſervetur ejus altitudo meridiana, quod fit ope quadrantis vel ſectoris circuli exacte diviſi, cujus planum verticaliter erectum ſimul per polum tranſit: in hoc enim ſitu inſtrumentum exhibet portionem meridiani cæleſtis in ſuos gradus diviſi. Unde ſi notetur, cui gradui ſydus reſpondeat, dum ad hoc planum venit, ejus altitudo meridiana habetur, quæ cum elevatione æquatoris collata illius loci, in quo obſervatio inſtituta eſt, dat arcum meridiani inter

ter æquatorem & ſydus comprehenſum, qui declinationem ſyderis metitur.

279. Unde univerſim concluditur, *quod ſi ex his tribus duo quævis dentur, nempe elevatio poli; declinatio ſyderis, ac ejus altitudo meridiana, tertium hoc ipſo habeatur, cum ſint arcus ejusdem meridiani.*

280. Ceteræ affectiones motus diurni per calculum trigonometriæ ſphæricæ eruuntur, & poſitio ſphæræ cæleſtis pro eo tempore, pro quo calculus faciendus eſt, in aliquo ſchemate utcunque repræſentatur.

Quod ut exemplo aliquo illuſtremus, ſit HPNH (fig. 38 & 39) meridianus loci, Z ejus Zenith, P polus ſupra horizontem, HN dimidius horizon, TV dimidius æquator, erit PN elevatio poli, & ZP, ejus complementum, elevatio æquatoris. Sit ſtella quævis extra meridianum in E: ducatur per polum P & ſtellam E arcus circuli maximi PEA, qui æquatori ad angulos rectos inſiſtet (Trig. 16); arcus EA, inter æquatorem & ſtellam interceptus, æquatur declinationi, & EP diſtantiæ illius a polo. Ducatur etiam arcus circuli maximi per Zenith, & ſtellam ZEB, qui erit normalis ad horizontem HN: pars illius EB erit altitudo ſtellæ ſupra horizontem; & complementum EZ diſtantia a Zenith. Denique deſcribatur parallelus LR, quem ſtella percurrere videtur: arcus inter meridianum & ſtellam RE erit ejus diſtantia a meridiano; RC vero inter meridianum & horizontem comprehenſus, arcus ſemidiurnus. Itaque R eſt punctum meridiani, per quod ſtella tranſire debet, dum ad planum illius venit; & C punctum ortus vel occaſus in horizonte. Sed ut omnes quæſtiones complectamur, quæ de poſitione alicujus ſtellæ ex motu diurno inſtitui poſſunt, ſingulis arcubus in citato ſchemate exhibitis ſua tribuenda ſunt nomina, quod ea res magnum in praxi aſtronomica uſum habeat.

281. Quadrans circuli e Zenith ad horizontem perpendicularis, ut ZB, ZF, ZC dicitur *verticalis*, & in hoc accipienda eſt altitudo alicujus ſyderis. Ex his verticalibus ille, qui per interſectionem æquatoris & horizontis tranſit, ut ZF, appellatur *verticalis primarius*, & meridianum ad Zenith Z ad angulos rectos ſecat.

282. Arcus horizontis HB, inter meridianum & verticalem quemvis ZB interceptus, ſive angulus ad Zenith HZB a meridiano, & verticali ZB comprehenſus, eſt *azimuthum* illius verticalis, aut ſyderis in eo verticali exiſtentis.

283. *Amplitudo ſyderis* eſt arcus horizontis FC, ſive angulus FZC, inter verticalem primarium ZF, & punctum C, ubi parallelus ſyderis REL horizontem ſecat, interceptus. Dicitur autem amplitudo *ortiva*, ſeu *occidua*, prout punctum C vel ad ortum, vel ad occaſum ſyderis ſitum fuerit.

Ex

Ex conſtructione autem præcedentium ſchematum, & proprietatibus ſphæræ facile deducitur, quod ſub ſphæra obliqua

284. Primo *ſtella durante revolutione diurna omni momento ſuum azimuthum & verticalem mutet.*

285. *Secundo* quod ſydus, cujus declinatio eſt verſus polum infra horizontem depreſſum, non poſſit tranſire per verticalem primarium, nec arcum azimuthalem 90 graduum, vel majorem habere.

286. *Tertio* Quod *ſtella fixa* (quæ quotidie ad ſenſum eundem parallelum deſcribit) *non mutet amplitudinem*, ſed ſemper in eodem puncto horizontis oriatur, & occidat. *At illa ſydera, quæ in orbitis propriis motum annuum habent, perpetuo amplitudinem mutent, quæ ſingulis diebus dependet a declinatione paralleli, quem percurrunt.*

287. Quarto *quod ſtellæ, quæ in æquatore ſunt, careant amplitudine*, cum ſemper oriantur, & occidant in puncto horizontis 90 gradibus a meridiano diſtante. Hinc etiam punctum horizontis a meridiano 90 gradibus verſus ortum remotum, dicitur *punctum verum ortus*; & quod totidem gradibus a meridiano verſus occidentem diſtat, appellatur *punctum verum occaſus.*

288. Quinto *Quod duo ſydera, quæ ſunt in eodem parallelo, habeant eandem amplitudinem: ſed dum ad eandem meridiani partem verſantur, nequeunt habere idem azimuthum, nec eandem altitudinem.*

289. Sexto *Quod duo ſydera, quæ ſunt in eodem verticali, habeant idem azimuthum, ſed nequeunt habere eandem altitudinem, nec eandem declinationem, conſequenter nec eandem amplitudinem.*

290. His ita habentibus, ſi in triangulo ſphærico E Z P ex his quinque tria dentur, videlicet Z P, complementum elevationis poli; angulus Z P E, diſtantiæ ſyderis a meridiano (eſt enim (Trig. 10) ejus menſura arcus R E); latus P E, complementum declinationis ſyderis; latus Z E, complementum ejus altitudinis; angulus P Z E, complementum azimuthi ad duos rectos: ex his, inquam, ſi tria dentur, reliqua duo per calculum trigometricum facile reperientur una cum angulo Z E P qui fit ad ſydus E a verticali E Z, & circulo declinationis E P, qui angulus in pluribus calculis aſtronomicis uſui eſt.

291. Similiter in triangulo Z P C, in quo Z C eſt ſemper 90°, ſi duo dentur ex his quatuor, latus Z P, complementum elevationis poli; latus P C, complementum declinationis ſyderis parallelum R C L deſcribentis; angulus Z P C, quem menſurat arcus ſemidiurnus; angulus P Z C, complementum amplitudinis, aut vero ſumma ex amplitudine, & 90°: calculo trigonometrico ſemper reliqua duo inveniuntur (Trig. 148).

Solet

Solet autem calculus hujus ſecundi caſus inſtitui in triangulo FCG ad G rectangulo cum arcus PC per polum ductus æquatori ad G inſiſtat ad angulos rectos. Nam in hoc triangulo angulus CFG, quem horizon & æquator efficit, eſt complementum elevationis poli (261); latus GC æquatur declinationi paralleli RL; Latus FG complemento arcus ſemidiurni: eſt enim complementum arcus æquatoris TG, qui æqualis eſt (Trig. 10) arcui ſemidiurno RC; hypotenuſa denique FC eſt amplitudo ſyderis. Itaque e quatuor iſtis ſi duæ quævis partes dentur, reliquæ duæ facile reperientur.

292. Obſerva. Diſtantia ſyderis a meridiano, aut vero illius arcus ſemidiurnus, poſſunt dari vel quæri tam in tempore, quam in gradibus. Ut arcus in gradibus datus reducatur ad tempus, facienda eſt ſequens proportio: *ut* 360°. 0′. 0″ *ad gradus, minuta, ſecuncunda arcus dati; ita ſunt horæ, minuta, & ſecunda temporis, quo ſydus revolutionem integram diurnam abſolvit, ad horas, minuta, ſecunda temporis quæſiti.* Quando vero tempus in gradus convertendum eſt, dicta proportio inverti debet. Hujus rei fundamentum eſt in æquabili motu revolutionis diurnæ.

Articulus VI.

De ratione determinandi poſitionem ſyderum reſpectu circulorum fixorum ſphæræ cæleſtis.

293. Quoniam ſydera revolutione diurna ſucceſſive per plana diverſorum circulorum particularium tranſeunt, qui in cavitate indefinita ſphæræ cæleſtis concipiuntur, uti ſunt horizon & meridianus, quorum ſitus conſtans non eſt, niſi reſpectu loci determinati in ſuperficie telluris; obſervationibus in his particularibus circulis factis utendum eſt, ad determinandam poſitionem eorundem ſyderum reſpectu circulorum communium cuivis ſuperficiei terreſtris puncto, hoc eſt, reſpectu æquatoris, eclipticæ, & colurorum, qui licet motu diurno ſphæræ ſimul abripiantur, nihilominus tamen certum & conſtantem ſitum conſervant in ſphæra, e quocunque telluris loco eos obſervator conſideret.

294. Ut ſitus alicujus puncti in ſuperficie quacunque determinari poſſit, neceſſario inveniri debet ejus diſtantia a duobus aliis punctis fixis, aut a duabus lineis, quarum ſitus diverſus, attamen conſtans ſit in illa ſuperficie. Licet vero angulus, quem illæ lineæ efficiunt, poſſit eſſe rectus, acutus, vel obtuſus; eſt tamen multo commodius, ſi is rectus ſit: nam cum diſtantiæ puncti a dua-

bus

bus illis lineis ſint perpendiculares ad eaſdem, tum conſtructio, tum etiam calculus expeditior eſt. *Itaque, quamvis poſitio ſyderis determinari poſſit, reſpectu circulorum in ſphæra fixorum, per arcus duos, qui menſurent diſtantiam illius a duobus punctis fixis & determinatis reſpectu circulorum illorum, aut a duobus circulis fixis quibuſcunque; expedit tamen adhibere diſtantias a duobus circulis fixis, qui ſibi invicem ad angulum rectum inſiſtunt.*

295. Sic ut commodius ſitus ſyderis determinetur, haberi debet vel ejus diſtantia ab ecliptica & a circulo maximo eclipticam in puncto dato ad angulum rectum ſecante; vel diſtantia ab æquatore, & a circulo maximo eidem in puncto determinato perpendiculariter inſiſtente; vel denique diſtantia a duobus circulis maximis quibuſcunque fixis, & ſe ſe invicem ſub angulo recto interſecantibus, quales ſunt coluri. Sed quia motus telluris alter fit in ecliptica, alter juxta planum æquatoris, patet, priores duas methodos ceteris omnibus præferendas eſſe.

296. Sit itaque P B Q D P (fig. 45) colurus ſolſtitiorum; P, Q poli æquatoris; B C D dimidius æquator; E, T poli eclipticæ; G C I dimidia ecliptica, ejuſque interſectio C cum æquatore punctum æquinoctiale ♈; G punctum ſolſtitiale ♋, & I punctum ſolſtitiale ♑; E C T ſit medietas coluri æquinoctiorum; & quoniam eſt dimidium circuli maximi, ac in puncto dato C eclipticæ ad angulos rectos inſiſtit, ſervire debet determinationi ſitus aſtrorum juxta primam methodum. Et ſi porro per idem punctum C, & polos æquatoris deſcribatur dimidius circulus maximus P C Q, qui ad æquatorem erit perpendicularis (Trig. 16), is in altera methodo adhiberi poterit.

297. Eſto ſydus in puncto quovis A. *Primo* ſi per A deſcribatur circulus K A L non maximus, & ad eclipticam parallelus, per ejus polos vero E, T ſemicirculus maximus E A T ad eclipticam perpendicularis, determinabitur ſitus puncti A reſpectu eclipticæ per quantitatem arcus A R, qui eſt diſtantia ab ecliptica, & *latitudo* ſyderis dicitur; & reſpectu coluri E C T per arcum A N paralleli ad eclipticam, ſive per arcum ipſius eclipticæ R C eundem numerum graduum continentem (Trig. 10), qui eſt *longitudo ſyderis*.

Secundo. Si per A ducatur parallelus æquatori H A F; & per polos P, Q ſemicirculus maximus P A Q ad æquatorem normalis, ſitus puncti A reſpectu æquatoris determinatur arcu A O, ſive diſtantia illius ab æquatore, quæ *declinatio ſyderis* vocatur; reſpectu circuli conſtantis P C Q vero arcu paralleli A M, ſeu arcu æquatoris O C ejuſdem numeri graduum, qui eſt *aſcenſio recta ſyderis*.

298. *Itaque I. duplex methodus determinandi ſitum ſyderis reſpectu circulorum in ſphæra fixorum, quæ ceteris præferenda eſt, eo reducitur, ut primo*

inve-

inveniatur ejus longitudo & latitudo ; Secundo ut reperiatur aſcenſio recta, & declinatio.

299. II. *Longitudo ſyderis eſt arcus eclipticæ inter primum punctum* ♈, *& arcum per ſyderis centrum ad eclipticam perpendiculariter ductum comprehenſus.* Numeratur autem per tricenos ſemper gradus, ſeu per ſigna, initio a *o* facto uſque ad 12 ſigna, ſequendo ordinem conſtellationum Zodiaci.

300. *Latitudo ſyderis eſt arcus circuli maximi e centro ſyderis ad eclipticam perpendicularis.* Hæc eſt *borealis* vel *auſtralis*, prout ſydus vel ex parte poli eclipticæ borealis, vel auſtralis fuerit.

301. III. *Aſcenſio recta ſyderis eſt arcus æquatoris inter primum punctum* ♈, *& interſectionem circuli maximi per centrum ſyderis ad æquatorem normalis interceptus.* Numeratur per gradus, a *o* uſque ad 360°, ſervato conſtellationum ordine.

302. *Declinatio ſyderis eſt arcus circuli maximi e centro ſyderis ad æquatorem perpendiculariter ducti.* Eſt vel borealis, vel auſtralis, ut jam ſupra (234) vidimus.

303. IV. Dimidium alicujus circuli maximi, ut E A T in polis eclipticæ utrinque terminati, & per ſydus A ducti, dicitur *circulus latitudinis ſyderis*, quod in eo latitudines ſyderum accipiantur, per quæ hic circulus tranſit. Simili ratione dimidius circulus maximus per ſydus A tranſiens & polis æquatoris terminatus, vocatur *circulus declinationis ſyderis*, cum declinatio ſyderis in eo exiſtentis menſuretur per arcum illius inter æquatorem, & ſydus interceptum.

304. Ex his deducitur *primo*, quod *omnia ſydera, quæ ſunt in eodem circulo latitudinis, habeant eandem longitudinem ; & quæ ſunt in eodem circulo declinationis, habeant eandem aſcenſionem rectam.*

305 *Secundo :* Quod *aſcenſionem rectam* O C *alicujus ſyderis* A *etiam exhibeat angulus ad polum æquatoris* A P C, *a circulo declinationis* P C Q *per primum punctum* ♈ *tranſeunte, & a circulo declinationis* P A Q *per ſydus ducto comprehenſus.* Similiter *longitudo ſyderis* R C *deſignari poteſt angulo* A E C *ad polum eclipticæ, a coluro æquinoctiorum* E C T, *& circulo latitudinis ſyderis* E A T *comprehenſo.*

306. Datis igitur in triangulo P E A latere P E, ſive diſtantia poli eclipticæ a polo æquatoris, id eſt (Trig. 15) obliquitate eclipticæ; aſcenſione recta & declinatione ſyderis A, inveniri poteſt ejus longitudo, & latitudo; aut vero ſi dentur P E, longitudo, & latitudo ſyderis, reperietur ejus aſcenſio recta, & declinatio. Nam angulus A P E æquatur ſummæ ex recto E P M, & M P A, aſcenſionis rectæ ſyderis : A E P vero eſt complementum longitudinis A E C ; latus A P complementum declinationis ; & E A complementum latitudinis. Quodſi detur P E cum aſcenſione recta &

Q decli-

declinatione, in triangulo PEA habentur PE, angulus EPA, & latus PA; si præter PE detur longitudo & latitudo, in eodem triangulo nota sunt PE, AE, & angulus his lateribus comprehensus PEA. Ac generatim *si dentur tria quævis ex his quinque : obliquitas eclipticæ, ascensio recta syderis, ejus declinatio, longitudo, & latitudo, reliqua duo per regulas trigonometriæ sphæricæ inveniri possunt.*

307. Sicut vero objectum Astronomiæ practicæ illud est potissimum, ut determinetur situs astrorum in cælo pro momento temporis dato; ita facile apparet, rem eo reduci, ut hæc tria habeantur: *Primo* ut cognoscatur obliquitas eclipticæ: *Secundo* ut mensuretur tempus; *Tertio* ut observetur ascensio recta & declinatio cujuslibet syderis, cum utraque immediate e phænomenis motus diurni deducatur; inde autem ope calculi facile etiam longitudo & latitudo innotescet.

308. Cognita accurate longitudine & latitudine, aut etiam ascensione recta & declinatione duorum syderum, eorum ope etiam eadem in tertio quovis inveniri possunt, si scilicet instrumento accipiantur arcus inter priora duo & tertium intercepti : tunc enim in triangulo sphærico, quod tria illa astra constituunt, latera duo actuali mensuratione habentur, & tertium e situ respectivo duorum syderum jam cognito facile deducitur: unde per calculum locus tertii respectu priorum duorum determinatur, consequenter respectu quoque æquatoris & eclipticæ. Atque ita ferebat praxis astronomorum ante pendulorum inventionem.

ARTICULUS VII.

De obliquitate eclipticæ, & quomodo puncta illius ad æquatorem referantur.

309. Obliquitas eclipticæ res est summi momenti in Astronomia, cum omnes calculos triangulorum sphæricorum ingrediatur, ubi de æquatore & ecliptica agitur.

Evidens autem est, quod cum obliquitas eclipticæ æqualis sit (252) maximæ, quam sol habere potest, declinationi, hoc est, quam habet, dum in tropicis versatur; observanda sit instrumento exacte elaborato altitudo meridiana centri solis ipso die solstitii, & quod differentia inter hanc altitudinem, & elevationem æquatoris in loco, in quo observatio instituitur, sit declinatio tropici. Aut vero, quod accuratius, observanda est altitudo meridiana solis in utroque tropico, e quo facile distantia tropicorum innotescit, cujus dimi-

dimidium eſt diſtantia cujusvis tropici ab æquatore, ſive obliquitas eclipticæ. Exemplum, altitudo vera centri ſolis in tropico capricorni A. 1751 in promontorio Bonæ Spei obſervata fuit 79°. 33′. 3″; & in tropico cancri A. 1752, eadem fuit 32°. 36′. 31″; differentia 46°. 56′. 32″ dat intervallum tropicorum; & dimidium illius 23°. 28′. 16″ eſt obliquitas eclipticæ.

310. Obſerva I. Ex ſequentibus apparebit, obliquitatem eclipticæ variationi cuidam periodicæ 18″ obnoxiam eſſe, propter quam obliquitas ex obſervatione modo relata ad finem An. 1751 debuit 4″½ minor evadere, quam non computata ea variatione fuiſſet; ita ut obliquitas media eclipticæ tum reipſa fuerit 23°. 28′. 20″½.

311. II. Extra dubium videtur, obliquitatem eclipticæ valde lente decreſcere, uno circiter minuto intra 130 vel 140 annos. Nam in obſervationibus ſuperioribus ſæculis omnibus tum a Græcis, tum ab Arabibus & Sinenſibus inſtitutis reperitur aliquot minutis major, quam nunc obſervetur. Obſervationes conſtantes ſæculi proxime elapſi definiunt eam ſaltem 23°. 29′; nulla e modernis eam 23°. 28′. 40″ majorem ſtatuit. Si medium accipiatur magni numeri obſervationum ſolſtitialium in Meridiana S. Petronii Bononiæ in Italia factarum ab An. 1667 uſque ad 1670, omniaque rite expendantur, variationis quoque ſuperius annotatæ ratio habeatur, ea pro An. 1668 prodit 23°. 28′. 54″; Et collatis magno item numero ſimilibus obſervationibus eodem inſtrumento accurate rectificato ab A. 1731 uſque ad 1734 inſtitutis, & ad eadem principia reductis, pro A. 1733 reperitur 23°. 28′. 29″. Omnes hæ rationes ſufficiunt, ut diminutio obliquitatis eclipticæ tanquam certa ſumatur.

312. Obliquitate eclipticæ methodo expoſita reperta, calculo admodum ſimplici omnia ejus puncta ad æquatorem referuntur, hoc eſt, invenitur cujuslibet puncti aſcenſio recta, & declinatio. Sit exempli cauſa S (fig. 45) punctum datum eclipticæ ICG, & ab ♈ puncto primo (quod ſupponatur in C) 28 gradibus remotum. Ducatur e puncto S arcus SO ad æquatorem DCB perpendicularis, qui erit declinatio puncti S; CO vero arcus æquatoris ejus aſcenſio recta: angulus CSO eſt inclinatio circuli declinationis puncti S ad eclipticam, qui angulus in multis calculis uſum habet. Jam in triangulo rectangulo OSC, in quo angulus SCO æquatur obliquitati eclipticæ, quam hic ſuppono 23°. 28′. 20″, reperitur (Trig. 85 vel 87) declinatio OS 10°. 46′. 38″; aſcenſio recta OC (Trig. 84 vel 88) 25°. 59′. 56″; angulus CSO, ab ecliptica & circulo declinationis comprehenſus (Trig. 86 vel 89) 69°. 1′. 22″. Sed hæc & alia id genus in tabulis aſtronomicis jam ad calculum revocata habentur pro ſingulis eclipticæ gradibus.

Articulus VIII.

De menſura temporis.

313. Cum tellus circa axem ſuum motu æquabili (229) gyretur, revolutiones diurnæ aſtrorum æquali tempore abſolvuntur, adeo-

que valde opportune ad deſignandum tempus adhibentur. Sed quia hæ revolutiones non niſi ſucceſſive fiunt, & alterum ſydus poſt alterum ſuum circulum perficit, isque motus perpetuo continuatur, non modo unum aliquod præ reliquis ſeligendum eſt, cujus revolutiones pro menſura temporis adhibeantur, ſed etiam certus terminus ſtatuendus, ex quo initium ſingularum revolutionum ducatur. Jam vero ſol telluris reſpectu reliqua omnia ſplendore ſine comparatione ſuperat: atque ideo ejus revolutiones dimetiendo tempori aptiſſimas ipſa natura commendare videtur, horizonte tanquam termino, a quo eorum initium computetur, adhibito. Interea tamen cum telluris incolæ ſol non niſi reſpectu horizontis ſenſibilis oriatur & occidat, qui circulus admodum irregularis eſt, raro cum horizonte rationali congruit, ſæpe vaporibus ſolem occultantibus, ejusque radiis detortis figuram varie deformantibus oppletus eſt; ac præterea dies per horizontem terminati notabiliter creſcant ac decreſcant, adeoque nimis inæquales ſint; obſervator Meridianum præferet velut terminum revolutionum diurnarum, ac principium diei conſtituet ipſum meridiei momentum, quo ſcilicet ſolis centrum ad planum ſui meridiani appellit.

314. Itaque *dies Aſtronomicus eſt intervallum temporis elapſi inter momentum, quo centrum ſolis per planum meridiani tranſiit, & quo, peracta integra revolutione, ad idem rurſus redit.*

315. Si ſol omni motu alio apparente careret, præterquam revolutionis diurnæ, aſcenſionem rectam haud unquam mutare videretur, ſed ſingulis diebus rediret ad meridianum cum iisdem ſtellis fixis, ſive cum illis, quarum aſcenſio recta eadem foret, ac puncti illius, in quo ſol exiſteret. Sed quia præterea annuam in ecliptica revolutionem facit, ſemper verſus ortum progrediendo, ac in plagam motui diurno, qui fit ab ortu in occaſum, oppoſitam; atque propterea omni die ad aliud punctum æquatoris referri debet, manifeſtum eſt, quod ſi ſol hodie cum certa ſtella meridianum tranſit, cras eadem ſtella ad meridianum pertingente, hoc eſt revolutione diurna integre peracta, is adhuc futurus ſit ad partem orientalem meridiani eo intervallo, quo motu annuo interea ab illo æquatoris puncto, cui hodie reſpondet, receſſerit. Igitur ſol non niſi poſt aliquod tempus appulſum ſtellæ ad meridianum ſequitur, cum ſcilicet punctum novum æquatoris ei reſpondens illuc pervenerit. Die ſequente adhuc tardius ſequetur ſtellam, ita, ut elapſis ſex menſibus ea 12 horis ſolem præcedat, & poſt annum, quo ſol totum percurrit zodiacum, die integro; quippe quæ tercenties ſexageſies ſexies Meridianum tranſierit, ſole non niſi tercenties ſexageſies quinquies tranſeunte.

316. Hinc

316. Hinc dies Aſtronomicus æqualis eſt ſummæ e revolutione integra ſtellæ fixæ, & parte tercenteſima ſexageſima quinta revolutionis: ſive accuratius: *menſura diei aſtronomici ſunt 360 gradus æquatoris plus arcu ejusdem reſpondente arcui eclipticæ, quem ſol illo die percurrit*, & qui *motus diurnus ſolis in aſcenſione recta* appellatur.

317. Infertur autem hinc I, quod licet revolutiones terræ omnes ſint æquales, attamen *dies aſtronomici inter ſe aliquantum inæquales eſſe debeant*, quod motus telluris in ecliptica reipſa ſit inæqualis, quo ſingulis diebus arcus jam majores, jam minores deſcribit; quod item inæquales ſint arcus æquatoris & eclipticæ correſpondentes propter obliquitatem horum circulorum. Unde horologium, cujus motus foret maxime æquabilis, vix unquam ab uno ad alterum meridiem 24 horas elapſas oſtendere poſſet accurate, ſed aliquot ſecundis plus vel minus, prout arcus æquatoris, qui motum ſolis diurnum in aſcenſione recta metitur, ex duplici hac cauſa creſcit, vel decreſcit.

318. II. Quod ut partes temporis ope horologii, cujus motus æquabilis ſemper] eſſe debet, metiri liceat, duplex tempus, aut dies diſtingui debeat: ſcilicet dies *verus*, ſive *apparens*, qui eſt intervallum temporis inter momentum tranſitus veri centri ſolis per meridiem, & momentum reditus ejusdem; & tempus ſive dies *medius*, eſtque intervallum inter unum & alterum meridiem, quale ſemper obſervaretur, ſi motus diurnus ſolis in aſcenſione recta eſſet æquabilis. Horologia recte conſtructa tempus medium oſtendere debent; tempus verum ex obſervationibus ſolis deducitur, & per horologia ſolaria exacte elaborata determinatur.

319. Dies tam verus, quam medius, dividitur ſemper in 24 horas, ſive 86400″. Mos etiam apud Aſtronomos obtinet, ut dies ab uno meridie ad alterum numerentur, quin in horas duodecim matutinas, & totidem veſpertinas diſtribuantur: etenim horas matutinas ad præcedentem diem referunt, dicuntque exempli gratia, die 15 Januarii, hora 17; cum e more civili dicendum eſſet: die 16 Januarii, hora 5 matutina. Hinc diſtinctio inter tempus civile & aſtronomicum profluxit. Die juxta tempus medium computato per meridianum ultra 360 æquatoris gradus tranſeunt adhuc 59′. 8″, qui eſt motus diurnus medius ſolis in aſcenſione recta. Die juxta tempus verum ſumto præter 360 æquatoris gradus tranſit per meridianum *arcus competens motui diurno vero in aſcenſione recta*. Sic quando ſol eſt in apogæo, ejus motus diurnus verus in aſcenſione recta eſt 1°. 2′. 6″; igitur tunc intra diem temporis veri per meridianum tranſeunt 361°. 2′. 6″: & ſi fiat, ut 360°. 59′. 8″ ad 24 h. 0′. 0″ temporis medii; ita 361°. 2′. 6″ ad 24 h. 0′. 12″ temporis veri; reperitur ſole in apogæo verſante dies temporis veri 12″ longior die temporis medii.

 320. Dies

320. Dies temporis veri nequit æqualis esse diei temporis medii, nisi motu diurno vero solis in ascensione recta 59′. 8″ existente, id quod 11 Februarii, 14 May, 26 Julii & 1 Novembris contingit: omnibus aliis diebus differentia aliqua esse debet inter meridiem verum, hoc est, inter momentum, quo centrum solis re ipsa per meridianum transit, & meridiem temporis medii, hoc est, momentum, quo centrum solis per meridianum transiret, si ejus motus in ascensione recta æquabilis esset. Exiguæ porro differentiæ inter singulos dies temporis medii & veri, successive accrescunt, ut post tempus longius discrimen sit admodum notabile, quod nosse sane decet, si ope horologiorum tempus metiamur.

321. Calculus, quo utriusque temporis differentia ad momentum datum reperitur, facilis est: nam æquatur differentiæ in tempus conversæ inter locum medium solis in ecliptica pro tempore dato (qui est ejus ascensio recta media); & inter ascensionem rectam veram.

Apud omnes fere astronomos jam habentur tabulæ, quæ differentias istas ad calculum revocatas exhibent. Dicuntur *Tabulæ æquationis temporis*, *vel horologiorum.*

322. Ex dictis sequitur *primo*, quod si horologium accurate ad tempus medium sit ordinatum, singulis minutis secundis, quæ ostendit, arcus æquatoris 15″. 2‴. 28⁗ per meridianum transeat: est enim hic quotus e divisione 360°. 59′. 8″ per 86400″ emergens.

323. *Secundo:* Cum revolutio integra stellæ fixæ respondeat 360 gradibus æquatoris, dies vero temporis medii 360°. 59′. 8″; differentia 59′. 8″ in tempus conversa, nempe 3′. 56″, ostendit stellam quotidie tempus medium debere 3′. 56″ prævertere; aut quod idem est, revolutionem stellæ fixæ, sive rotationem telluris fieri inter 23 h. 56′. 4″ temporis medii.

324. *Tertio:* Hinc si examinandum sit, an motus horologii cum tempore medio congruat, videndum, an accurate ostendat 23 h. 56′. 4″ elapsas esse a transitu stellæ fixæ per certum terminum usque ad reditum ad eundem absoluta revolutione integra. Quantum intervallum observatum prædictum tempus excedet vel ab eo deficiet, tantum horologium supra tempus medium accelerat, vel retardat.

325. Interim ut tempus verum cognoscatur, ex observatione inveniendum est, quale momentum temporis horologium ostenderit, centro solis in meridiano existente. Est autem sol tum in meridiano, quando cessat ascendere supra horizontem, & rursus descendere incipit: & cum hæc vicissitudo e sola rotatione æquabili telluris pendeat, momentum meridiei accurate medium est inter

duo

duo alia, quibus eandem altitudinem cum in aſcenſu, tum in deſcenſu attingit. Itaque ſi aliquo ante meridiem tempore notetur tempus in horologio, quo certa altitudo centri vel limbi ſolis obſervata fuit; & poſt meridiem rurſus obſervetur tempus in horologio, quo centrum, vel idem limbus eandem habet altitudinem; medium inter illa duo tempora erit, quod horologium in ipſo meridie oſtendit. Exemplum: Pariſiis 29 Septembris 1744 ope quadrantis Aſtronomici obſervata fuit altitudo ſuperioris, ſive borealis limbi ſolis 22°, horologio monſtrante 8 h. 19′. 52″ mane, & poſt meridiem eodem oſtendente 3 h. 16′. 18″; medium inter utrumque tempus eſt 11 h. 48′. 5″: hoc igitur tempus notabatur a pendulo centro ſolis ad meridianum appellente.

Eadem methodo determinari poteſt fixarum, & planetarum tranſitus per Meridianum.

326. Obſerva. Methodus expoſita, quæ *altitudinum correſpondentium* dicitur, non modo omnium eſt ſimpliciſſima, ſed & maxime accurata, cum facile ſit determinare momentum (errore, ſi quis irrepat, ſaltem unum ſecundum non excedente), quo ſydus filum ſubtiliſſimum in foco tubi, in quadrantibus, aliisve inſtrumentis obſervandis altitudinibus deſtinatis, tenſum contingit. Obſervatio porro eo tutior eſt, quo ſydus a meridiano remotius, ſeu verticali primario vicinius fuerit, quia tunc aſcenſus vel deſcenſus illius velocior eſt. Neque in hunc finem neceſſe eſt, ut inſtrumentum ſit adeo exacte elaboratum, aut ut vera ſyderis altitudo accurate accipiatur; ſed ſufficit, modo eadem altitudo, quæcunque ea ſit, determinari poſſit; ad quod requiritur, ut radius quadrantis duobus, tribuſve pedibus non ſit minor. Præterea accipiendæ ſunt plures altitudines diverſæ tam ante tranſitum per meridianum, quam poſt eundem, ut verum tranſitus momentum veluti a pluribus principiis ſeſe mutuo verificantibus inferre liceat: & ſi qua inter ea notetur differentia, medium quoddam ex omnibus ſumitur. Verum ſi cum rigore loquamur, hæc methodus accurata non eſt, niſi pro ſtellis fixis, & illis ſyderibus, quæ declinationem intervallo temporis obſervationibus correſpondentibus interjecti non mutant. Quod ſi enim ſydus interea habuerit motum in declinatione, ut v. g. ad polum ſupra horizontem elevatum propius acceſſerit, ejuſque altitudo meridiana dietim creſcat; in deſcenſu poſt meridiem tardius ad eam altitudinem perveniet, quæ in plaga orientali in aſcenſu obſervata fuit, adeoque medium inter tempora obſervata momentum tranſitus per meridianum juſto tardius exhibet, quam reipſa fuerit. Ex opppſito ſi motus in declinatione fiat verſus polum infra horizontem depreſſum, ſydus citius a meridie attinget illam altitudinem, quæ in aſcenſu notata fuit, & medium inter utrumque tempus obſervatum verum momentum tranſitus per meridianum prævertet. Atque hoc contigit in exemplo ſuperius allato: tunc temporis ſolis motus in declinatione verſus Auſtrum fiebat, eoque deprimebatur aliquantum, ut poſt meridiem citius ad altitudinem 22 graduum perveniret, atque ideo meridies ex altitudinibus correſpondentibus ita erutus nempe 11 h. 48′. 5″, verum præceſſit.

Quamvis autem error ex mutatione declinationis ſolis nunquam excedat 30″ tempus meridiei veri, quocunque in loco quis verſetur alioqui habitabili; attamen ſi tempus verum accurate cognoſci debeat, errores iſtiusmodi ad calculum revocandi ſunt, ut meridies ex obſervationibus altitudinum correſpondentium inventus corrigi poſſit.

In hunc finem ſit RPZH (fig. 48) meridianus loci, in quo obſervatio inſtituta; Z Zenith; HR horizon; P polus; EQ æquator; S locus ſolis ante meridiem obſervatus & ad meridianum ac horizontem relatus; SD, ejus altitudo, quam in illo loco habuit.

buit. Si e puncto S ducatur ad polum arcus SP, erit SI solis declinatio, & angulus EPS æqualis ejus distantiæ a meridiano (290). Producatur DS usque ad Zenith, erit SZ complementum altitudinis observatæ. Ducatur item per S circulus minor AV horizonti parallelus (dicitur autem talis circulus *Almucantarath*); & alter RSL parallelus æquatori, qui erit parallelus solis pro tempore observationis matutinæ. Sit jam MN parallelus ejusdem pro tempore observationis pomeridianæ, ita ut MR designet distantiam horum parallelorum, sive mutationem declinationis inter utramque observationem factam: liquet, temporis momentum post meridiem observatum esse illud ipsum, quo parallelus solis MN secat Almucantarath AV, sole in T existente, cum scilicet altitudines TF, SD æquales sunt. Quod si jam per T describatur TP, erit angulus EPT distantia solis a meridiano tempore observationis pomeridianæ; hinc angulus TPS, sive arcus eum mensurans, in tempus conversus, addi in hoc casu debet tempori observationis a meridie factæ, ut meridies verus reperiatur.

Ut obtineatur angulus TPS, differentia angulorum ZPS, ZPT; observandum est, triangulum TZP non differre a triangulo PZS, nisi quatenus latus TP differt a latere SP quantitate RM, sive mutatione declinationis: itaque triangulum TPS calculari poterit ope alicujus formulæ differentialis trigonometriæ sphæricæ (Trig. 192). Neque requiritur, ut laterum PZ, PS, SZ quantitas sit exacte cognita; sufficit, si modo sciatur quantitas variationis RM. Ex his principiis ab Astronomis conditæ sunt *tabulæ Æquationis altitudinum correspondentium*, quæ passim in eorum libris occurrunt.

ARTICULUS IX.

De ascensione recta, & declinatione syderum.

327. Declinatio syderum facile cognoscitur, si observentur eorum altitudines meridianæ, & cum elevatione æquatoris loci, in quo observationes instituuntur, conferantur. Ascensio recta per mensuram temporis determinatur. Cum enim omnia sydera, quæ sunt in eodem circulo declinationis, habeant eandem ascensionem rectam (305) & circulus declinationis sit circulus maximus ad æquatorem normalis; dum tota sphæra cælestis circumvolvitur, omnia circulorum declinationum plana successive, alterum post alterum, veniunt ad planum Meridiani (qui etiam circulus maximus est ad æquatorem perpendicularis) & cum eo congruunt. Unde Primo: *Omnia sydera, quæ eodem tempore per meridianum transeunt, habent tunc eandem ascensionem rectam.* Secundo: *Quæ vero diversis temporibus veniunt ad meridianum, eorum ascensionum rectarum differentiæ sunt proportionales differentiis temporum, quibus ad meridianum singula appellunt.* Exempli causa: Stellæ fixæ revolutionem integram absolvere debent intra 23 h. 56′. 4″ penduli recte constituti (324): quod si igitur ope ejusmodi horologii, & quadrantis in plano meridiani fixi, aut quod adhuc tutius, per altitudines correspondentes observatum fuit, stellam aliquam una v. g. hora citius vel tardius per meridianum transivisse, quam aliud quodpiam sydus, invenietur, quot gradibus ascen-

ascensio recta ejus stellæ major vel minor sit quam alterius syderis, si fiat hæc proportio: ut 23 h. 56'. 4'', seu tempus revolutionis integræ fixarum, ad 360°. 0'. 0'' æquatoris, qui hoc tempore per meridianum transeunt; ita hora una differentiæ est ad 15°. 2'. 28'', differentiam ascensionum rectarum. Unde cognita ascensione recta alterutrius, etiam alterius ascensio recta per hanc observationem obtinetur.

328. Si horologium, quo utimur, non sit directum ad tempus medium, proportio hunc in modum facienda est: *Ut tempus elapsum horologii durante revolutione integra fixarum est ad 360°; ita tempus in eodem horologio inter utriusque syderis transitum per meridianum observatum est ad differentiam ascensionum rectarum.*

329. Hinc sequitur, *ad determinandam ascensionem rectam syderis cujusvis*, imo omnium, *satis esse*, *si detur ascensio recta stellæ unius*, *si habeatur horologium*, *cujus motus æquabilis sit*, *& possit determinari tempus monstratum ab eodem horologio in transitu illius syderis*, *& stellæ fixæ per meridianum.*

330. Sed en methodum optimam inveniendi ascensionem rectam stellæ alicujus primariæ, ad quam dein ceteræ referri possint. Die quadam, dum sol non longe adhuc ab æquinoctio recessit, ejusque motus diurnus in declinatione 17 vel 18 minutis minor non est, observetur ejus altitudo meridiana, & inveniatur sive per altitudines correspondentes, sive aliter, differentia ascensionis rectæ solis, & stellæ, quam quis elegerit, pro ipso meridie. Postea quando sol post proximum solstitium ad eundem parallelum redit, eadem observatio repetatur, ut nempe reperiatur arcus æquatoris (ut in sequente exemplo patebit) respondens motui solis in ascensione recta toto temporis intervallo, quo ad eundem parallelum redivit, hoc est, quo obtinuit eandem a solstitio distantiam: patet enim, cum dimidium hujus arcus sit distantia solis a coluro solstitiorum in æquatore accepta, quod etiam sit complementum ejus distantiæ a puncto æquinoctiali, hoc est, ascensionis rectæ: hac itaque ratione habebitur ascensio recta solis, & ex differentia observata in stella, dabitur etiam ascensio recta stellæ.

Exemplum: Parisiis die 12 Aprilis A. 1749. fuit altitudo meridiana centri solis 49°. 58'. 33'', & altitudinibus correspondentibus solis & Lucidæ Lyræ magno numero acceptis eorum differentia in ascensione recta pro ipso meridie deducta est 103°. 50'. 54''. Dein 30 Augusti ejusdem Anni observata fuit altitudo meridiana solis 50°. 3'. 8''; & differentia ascensionis rectæ a Lucida Lyræ reperta 241°. 43'. 26''. Discrimen 4'. 35'' inter altitudines meridianas ostendit, quod si altitudo meridiana solis, aut, quod idem est, ejus declinatio die 12 Aprilis major fuisset 4'. 35'', sol fuisset in eodem

accurate parallelo, in quo fuit die 30 Augusti in ipso meridie. Et quia motus diurnus solis accurate in tabulis Astronomicis exhibetur, inito calculo reperitur, quod a die 12 usque ad meridiem 13 Aprilis, sol confecerit in ascensione recta 55′, 10″. 4, & in declinatione 21′. 45″. 4. Hinc fiat: ut 21′. 45″. 4 ad 55′, 10″. 4; ita sunt 4′, 35″ ad 11′, 37″. Quare dum die 12 Aprilis declinatio solis 4′. 35″ crevit, eodem tempore differentia ascensionis rectæ solis & Lucidæ Lyræ crevit 11′. 37″; & eo momento, quo eodem die habuit eandem declinationem, quam habuit 30 Augusti in meridie, differentia ascensionum rectarum solis & Lucidæ Lyræ fuit 104°. 2′. 31″. Subtractis 104°. 2′ 31″ ex 241° 43′ 26″ relinquitur motus solis in ascensione recta, quam habuit toto intervallo, quo ad eundem parallelum redivit, nempe 137°, 40′, 55″; huic addenda sunt 18″, quia etiam stella eodem tempore habuit exiguum motum in ascensione recta pendentem a triplici causa, quæ variationem aliquam in loca fixarum inducit, & in sequentibus exponetur (vid. Sect. VI. C. I. Art. 9); habeturque tum summa 137°. 41′. 13″. Hic arcus a coluro solstitiorum bifariam secatur; adeoque ejus dimidium 68°, 50′, 36″. 5 est arcus æquatoris inter colurum solstitiorum, & locum solis interceptus, quando die 12 Aprilis pervenit ad eundem parallelum, in quo in ipso meridie diei 30 Augusti fuerat: complementum igitur 21°. 9′. 23″.5 est vera ascensio recta soli eo momento competens. Et quia tunc differentia ascensionis rectæ lucidæ lyræ fuit 104°. 2′. 31″, quibus hæc solem præcedebat, reperitur tandem ascensio recta apparens lucidæ lyræ fuisse eodem momento 277°. 6′. 52″. 5.

ARTICULUS X.

De præcipuis usibus ascensionis rectæ, & declinationis syderum.

331. Inter præcipuos usus, quos ascensio recta & declinatio syderum habet, est, quod inveniendæ eorum longitudini & latitudini serviant, ut jam vidimus (306).

332. Præterea ex ascensione recta intelligitur ordo, juxta quem sydera dietim revolvuntur, uti etiam intervallum temporis, quo alterum alteri succedit, maxime respectu meridiani.

333. Ex eadem per calculum inveniri potest, qua hora quodvis sydus per meridianum transeat. En autem methodum: *Accipe differentiam inter ascensionem rectam syderis illius, & solis pro meridie diei, de quo quæstio est; hanc converte in tempus, ita ut uni horæ respondeant 15 gradus; habebis intervallum temporis prope verum inter meridiem, & transitum syderis*

deris per meridianum. Si ſydus ſit ex parte occidentali ſolis, ſive ſi ejus aſcenſio recta minor ſit, quam aſcenſio recta ſolis, intervallum temporis repertum & a 12 horis ſubtractum dabit tempus tranſitus ſyderis per meridianum ante meridiem; ſed ſi ſydus ſit ex parte orientali ſolis, ſeu ejus aſcenſio recta major ſit, quam ſolis, hoc tempus incidet in horas pomeridianas.

334. Sed, ut diximus, primus hic calculus non oſtendit verum momentum temporis, quo ſydus ad meridianum pervenit, ſed ſolummodo vero propinquum, quod ſcilicet in eo ſupponatur, nec ſoli, nec ſyderi, eo intervallo eſſe motum proprium in aſcenſione recta. Quare ut verum tranſitus per meridianum tempus reperiatur, præterea calculanda eſt aſcenſio recta tam ſolis, quam alterius ſyderis pro eo tempore, quod per priorem calculum inventum eſt; earum differentia in tempus converſa dabit tempus verum quæſitum.

In exemplo, ſupponamus die quadam in ipſo meridie aſcenſionem rectam Martis eſſe 112°. 18′; & ſolis 183°. 42′: differentia 71°. 24′ in tempus converſa eſt 4 h. 45′. 36″; & quia aſcenſio recta Martis minor eſt, quam ſolis; citius Mars ad meridianum pervenire debet, quam ſol (332) idque circa 7 h. 14′. 24″ ante meridiem. Calculetur pro hoc tempore aſcenſio recta Martis, & ſolis, reperietur illa quidem 112°, 13′, 12″; hæc vero 183°, 30′, 10″; quarum differentia 71°, 16′, 58″ ad tempus reducta, dat tempus tranſitus Martis per meridiem 7 h. 14′. 52″ mane.

Illud manifeſtum eſt, hunc calculum inſtitui ratione inverſa ejus, quæ ſervatur, cum ex obſervato tranſitu per meridianum ſyderum aſcenſio recta invenitur (327).

335. Præſens calculus etiam adhiberi poteſt ad examinandum horologium: ſi enim notetur tempus ab horologio monſtratum, dum ſydus, cujus aſcenſio recta nota eſt, per meridianum tranſit, & tempus tranſitus per calculum inveniatur, ex collatione utriusque temporis patebit, an tempus ab horologio oſtenſum congruat cum vero; aut quantum horologium differat.

336. Quartus uſus jam expoſitis analogus eſt, quod *reperiri poſſit pro tempore dato diſtantia alicujus ſyderis a meridiano loci dati*, aut quod idem eſt (290) angulus ad polum a meridiano loci, & circulo declinationis per ſydus ducto comprehenſus. Hunc in finem *intervallum inter tempus datum & meridiem præcedentem convertatur in gradus* (ita ut horæ uni reſpondeant 15 gradus): *hi addantur aſcenſioni rectæ ſolis* e tabulis Aſtronomicis *pro tempore dato* repertæ: ſumma exhibebit punctum æquatoris tempore dato per meridianum tranſiens. *Ab hac*

eadem ſumma (additis, ſi nimis parva ſit, 360 gradibus) *ſubtrahatur aſcenſio recta ſyderis*: reſiduum erit angulus ad polum quæſitus.

337. Cum æquatio temporis (321) ſit differentia inter longitudinem mediam ſolis, & ejus aſcenſionem rectam veram; ſi tempus detur medium, idem calculus inſtituetur, converteturque hoc tempus medium in gradus, quindecim uni horæ tribuendo; qui addentur longitudini ſolis mediæ, ſumtæ ſcilicet e tabulis, quæ huic tempori competit; tandem a ſumma aſcenſio recta ſyderis ſubtrahetur.

338. Et quia angulus ad polum meridiano loci & circulo declinationis ſyderis comprehenſus per motum diurnum ſingulis ſecundis temporis mutatur 15″, *ſi detur hic angulus*, per calculum, inverſum prioris *reperitur tempus*, *quo fuit quantitatis datæ*, modo ſciatur, an ſydus ex parte orientali, an ex occidentali meridiani tum fuerit: *addatur enim angulo dato* (ſi ſydus fuit ad partem occidentalem), *vel ejus complemento ad 360 gradus* (ſi ad orientem fuit ſydus) *aſcenſio recta ſyderis: a ſumma ſubtrahatur aſcenſio recta ſolis: reſiduum in tempus converſum* (*15 gradibus uni horæ tributis*) *dabit tempus verum quæſitum.* Aut etiam angulo dato, vel ejus complemento ad 360 gradus addita aſcenſione recta ſyderis, a ſumma ſubtrahatur ſolis longitudo media; reſiduum in tempus converſum erit tempus quæſitum medium.

339. Hinc autem apparet, unum e præcipuis uſibus aſcenſionis rectæ & declinationis ſyderis, eſſe, *ut reperiatur tempus verum e theoria ſolis cognita*, & *altitudine hujus ſyderis ad partem orientalem vel occidentalem meridiani obſervata.* Datis enim hac altitudine, declinatione ſyderis, & elevatione poli, invenitur (290) angulus ad polum ZPE (fig. 38 & 39) inter ſydus E & meridianum PZ comprehenſus: habito porro hoc angulo, & aſcenſione recta ſyderis, reperitur tempus verum, quo illa altitudo obſervata fuit.

340. Et viciſſim (qui eſt alter uſus aſcenſionis rectæ & declinationis ſyderum) inveniri poteſt altitudo ſyderis pro tempore dato, ſi quæratur ejus diſtantia a meridiano pro eodem tempore, & calculetur latus EZ ejuſdem trianguli ſphærici EPZ.

341. Denique declinatio ſyderis etiam uſum habet (279) in invenienda ejus altitudine meridiana, amplitudine ortiva vel occidua (291) atque arcu ſemidiurno, ſi detur altitudo poli: & viciſſim uno ex his tribus dato, reperitur elevatio poli.

CAPUT

CAPUT II.

De illusionibus Opticis in phænomenis astrorum, quarum causa est motus telluris annuus.

Postquam præcipuas proprietates illusionum Opticarum e motu telluris diurno, sive rotationis, pendentium exposuimus, ordo poscit, ut illas quoque explicemus, quarum occasio est motus terræ annuus. Sed ut rite intelligantur, præmittenda est theoria motuum, quos ejusmodi illusiones Opticæ afficiunt, quique motus apparentes sive relativi dici solent.

ARTICULUS I.

Theoria motuum apparentium & relativorum; ac de eorum projectione orthographica.

342. *Motus apparens* objecti dicitur, quem observator in motu constitutus, & nihilominus se in puncto aliquo fixo quiescere existimans, attribuit objecto quiescenti. *Motus relativus* objecti est, quem observator motus, seque quiescere credens, attribuit objecto itidem moto.

343. *Locum verum oculi* in sequentibus vocabo illud universi punctum, in quo tempore dato reipsa observatoris oculus est constitutus; *locum vero oculi putatitium* dicam illum in universo, in quo observator sese quiescere arbitratur.

344. Cum isthic solum de motu circulari agatur, *orbita oculi* vocabitur nobis via, quam observator in hoc universo re ipsa percurrit; *planum orbitæ oculi*, erit illud planum, in quo ea orbita describitur: *orbita optica* via, quam objectum in cælo percurrere videtur.

345. *Projectio orbitæ opticæ* est figura, quam in plano ultra orbitam opticam sito efformant radii visuales e loco putatitio oculi per omnia puncta orbitæ opticæ ducti, & in illo plano terminati, sive (ut exemplo sensibili ad juvandam imaginationem utamur) est figura umbræ ab orbita in planum aliquod projectæ, si ea e loco putatitio oculi illuminaretur.

Si radii visuales terminentur in illo plano ad angulos rectos, erit *projectio orthographica*.

346. *Planum comparationis* est, quod per locum putatitium oculi, & objectum transit, & ad planum orbitæ oculi normale est. Itaque si

ſi objectum fixum eſt, planum quoque comparationis eſt fixum; ſi objectum movetur, etiam hoc planum eſt mobile, & quidem eadem velocitate angulari, qua objectum movetur.

347. Problema. *Datis poſitione loco putatitio oculi* S (fig. 46), *&* *quotcunque punctis* A, B, C *orbitæ veræ, quam mobile in plano quovis deſcribit, cum punctis* a, b, c, *in quibus reipſa oculus iisdem temporibus exiſtit; determinare viam opticam mobilis.*

Reſolutio. Ductis rectis A*a*, B *b*, C*c*, agantur per S æquales & parallelæ Sα, Sβ, Sγ, ſingulæ ſingulis: erunt puncta α, β, γ via optica. Nam cum v. g. recta Sα ſit æqualis & parallela rectæ *a*A, punctum α reſpectu puncti S habet eundem ſitum, eandemque diſtantiam, quam habet A relate ad *a*. Igitur obſervator exiſtimans ſe eſſe in S, objectum a ſe in α videri putare debet. Idem eſt de reliquis punctis β, γ &c.

348. Corollarium I. *Itaque locus verus, & putatitius oculi; locus item verus & opticus objecti ſemper ſunt in extremis laterum oppoſitorum parallelogrammi:* ſive locus verus objecti, & locus putatitius oculi ſunt ſemper in extremis unius e diagonalibus parallelogrammi; & locus opticus objecti cum loco vero oculi ſunt in extremis alterius diagonalis.

349. Corollarium II. *Et locus opticus objecti habet ſemper ſitum oppoſitum loco vero oculi.*

350. Corollarium III. *Si objectum ſit immobile in* A (fig. 47) *orbita optica* $\alpha\beta\gamma$ *eſt linea æqualis orbitæ veræ oculi* a b c, *& in plano parallelo ſita.* Nam ob parallelogramma *a*α, *b*β, *c*γ, quorum plana in diagonali communi SA ſe interſecant, & baſes S *a*, S*b*, S *c* ſunt in eodem plano, in quo eſt orbita oculi; etiam Aα, Aβ, Aγ his baſibus æquales & parallelæ in eodem plano, & quidem plano orbitæ oculi parallelo, eſſe debent, anguloſque αAβ, βAγ angulis *a*S*b*, *b*S*c* æquales facere. Ergo puncta α, β, γ ſunt in linea æquali lineæ *abc*, & in plano parallelo, ſed ſitu oppoſito.

351. Corollarium IV. *Si objectum ſit immobile, & in eodem plano cum oculo, etiam ejus orbita optica eſt in hoc plano.*

352. Corollarium V. *Si objectum immobile ſit in loco putatitio oculi, videtur eſſe in extremitate radii æqualis & ejusdem directionis cum radio, qui e loco vero oculi ad centrum ducitur.* Sic ſi oculus moveatur in circulo vel ellipſi, in cujus centro eſt objectum & locus putatitius oculi; objectum in extremitate diametri per oculum ductæ apparet, adeoque videtur eam orbitam deſcribere, in qua oculus movetur.

353. Corollarium VI. *Si objectum ſit immobile, arcus ab eo in orbita optica deſcriptus æquatur arcui, quem oculus in ſua orbita vera percurrit.*

354. Ob-

354. Observa. In sequentibus supponam, orbitam oculi esse circulum, & ejus locum putatitium centrum. In hac vero hypothesi, si objectum sit immobile sive extra, sive intra hanc orbitam situm, manifestum est (350), ejus orbitam opticam itidem fore circulum, quem deinceps *Epicyclum* objecti vocabo.

355. Lemma I. *Planum circuli minoris* H L (fig. 50) *circulo maximo sphæræ* Q I *paralleli, inclinatur ad planum* F G, *tangens sphæram in puncto circuli minoris* H, *quantitate complementi arcus distantiæ paralleli a circulo maximo* Q H: *&* *radius ejusdem circuli minoris* H L *est ad radium circuli maximi* Q I, *ut cosinus distantiæ* Q H *est ad sinum totum.*

Angulus enim MHL inclinationis plani FG cum plano paralleli HL, est complementum anguli LHI æqualis angulo HIQ, cujus mensura est arcus HQ. Eodem modo patet, HL esse cosinum arcus QH.

356. Lemma II. *Si ex omnibus peripheriæ punctis* A, M, D, B, C (fig. 53) *circuli in plano* O K *ad planum alterum* O G *inclinato descripti demittantur ad planum* O G *perpendiculares* A a, M m, D d, B b, C c &c., *eæ omnes terminabuntur in circumferentia Ellipseos* a d b c, *cujus axis major* a b *erit æqualis & parallelus circuli diametro illi, quæ plano* O G *est parallela, sive interfectioni* O N *planorum communi; axis vero minor* c d *respondebit diametro circuli* C D *ad planum* O G, *sive ad interfectionem* O N *perpendiculari, ita ut hic axis minor* c d *sit ad axem majorem* a b, *ut est cosinus inclinationis planorum* O G, *&* O K *ad sinum totum.*

Demonstratio. Cum diameter AB circuli sit plano OG parallela; item perpendiculares ad idem planum Aa, Bb sint parallelæ inter se, figura AabB est parallelogrammum rectangulum, & hinc AB$=ab$. Dein ob diametrum CD ad interfectionem ON, perpendicularem, uti etiam ad alteram diametrum AB; utraque, tam AB, quam ON ab eadem bisecatur, & planum cVC, in quo sunt perpendiculares Cc, Dd, est ad planum OG normale, & a planis parallelis bNB, aOA æquidistans. Quare *primo* ab secatur bifariam & ad angulos rectos per cd. *Secundo* angulus cVC æquatur inclinationi planorum OG & OK (Elem. 630). *Tertio* ob triangula rectangula cVC, fVF, dVD similia, partes df, fc rectæ dc, æquantur inter se, quia etiam pars DF parti FC æqualis est. Itaque cum ab sit axis ellipseos; cd, quæ ab secat normaliter & bifariam, & vicissim bisecatur, debet esse alter axis. *Quarto* In iisdem triangulis est cd: CD (seu ab) $=c$V: VC. Est vero (Elem. 747) cV ad VC, ut cosinus anguli cVC ad sinum totum: ergo axes cd, ab sunt inter se, ut cosinus inclinationis planorum ad sinum totum.

Demonstrandum itaque est, curvam $abcd$ esse ellipsin. Ducatur in circulo semiordinata quævis MP, demittanturque ad planum OG perpendicula Mm, Pp. Quoniam punctum P est in diametro AB, perpendicularis Pp erit parallela ad Aa, Bb, & in eodem plano cum rectangulo AabB: consequenter in lineam ab cadet, ita ut sit $ap=$ AP, & $pb=$ PB. Sed quia PM est ad AB & ON perpendicularis, & ad DC parallela; planum pXP, in quo sunt perpendicula Pp, Mm, est ad planum cVC parallelum; & hinc pm ad ab normalis, & semiordinata curvæ $acdb$. Ob eandem rationem triangula pXP, mXM, cVC, dVD similia sunt, & pm: PM$=cd$: CD sive ab; adeoque etiam pm^2: PM^2 $=cd^2:ab^2$. Est autem (Elem. 562) PM^2 $=$ AP. PB $=ap.pb$; consequenter $pm^2:ap.pb=cd^2:ab^2$, quæ est proprietas ellipseos (Elem. 820).

357. Co-

357. Corollarium I. Projectio orthographica circuli A C B D est ellipsis *abcd* (345).

358. Corol. II. Ob parallelismum planorum similium *fd* D F, *pm* MP, & rectarum *ab*, A B, est *pm* : P M = *df* : D F, & PF = *pf*: itaque projectio *dm* arcus cujusvis D M est ejusmodi, ut semiordinata *m*H ad axem minorem ellipsis sit æqualis sinui P F arcus D M. Est enim *m*H = *pf* = P F; & semiordina ad axem majorem *mp* est ad cosinum MP ejusdem arcus D M, ut est *fd* ad F D, sive ut axis minor ellipsis ad axem majorem (Elem. 895).

359. Corollarium III. Si detur ellipsis *acdb* (fig. 49) quæ sit projectio orthographica alicujus circuli, debeatque ea dividi in gradus, sive in arcus dati numeri graduum, describatur super axe majore circulus *a*MD*b*C, isque in gradus dividatur, seu accipiantur in eo arcus D M, D M &c. dati numeri graduum, initio divisionis sumpto a puncto, per quod diameter cum aliquo axe congruens transit, velut hic C D. Tum e singulis divisionis punctis M, M &c. demittantur perpendicula M P, M P &c., quæ intersectione sua determinabunt puncta correspondentia in projectione elliptica *m*, *m* &c. Nam abscissæ F P, F P &c. sunt ut sinus arcuum D M, D M &c, & semiordinatæ P*m*, P*m* &c. sunt ad correspondentes semiordinatas circuli P M, P M &c. ut axis minor ad majorem.

360. Corollarium IV. Si projectio elliptica infinite contrahatur, ita ut tota coincidat cum axe suo majore *ab* (id, quod semper evenire debet, dum oculus in plano circuli projiciendi positus est) divisio ita instituetur: nempe e medio puncto hujus axis majoris accipiantur super eo partes F P, F P &c, quæ sint in ratione sinuum respondentium numero graduum dato.

361. Scholium. *Divisio ellipsis in gradus suos etiam institui potest ope circuli c* N *d* O *super axe minore descripti*, & in arcus *d*I, *d*I &c. totidem graduum divisi, quot arcus D M, D M &c. continent; si scilicet sinus iis correspondentes I H, I H &c. producantur, donec ellipsi occurrant, quod in iisdem punctis *m*, *m* &c. fiet. Cum enim arcus D M, *d*I sint ejusdem numeri graduum, eorum sinus & cosinus sunt inter se, ut eorum radii F D, F *d*. Hinc *primo* est KM (vel F P): HI = F D: F *d*. Est vero (Elem. 895) H*m*: H I = F D : F *d*; itaque H*m* = F P, & uterque circulus determinat punctum *m* in eadem ab axe *cd* distantia. *Secundo*: P M (vel F K): F H = F D: F *d*; sed etiam P M: P*m* = F D: F *d*; quare F H = P*m*, & uterque circulus determinat punctum *m* in eadem distantia ab axe *ab*: ergo debent idem punctum ellipseos determinare.

362. *Hinc vero deducitur methodus expedita simul describendi, & ut libuerit, dividendi ellipsin, vel ejus portionem quamvis, super axibus datis* a b, c d. Etenim si super utroque axe describantur circuli, eorumque arcus D M, *d*I accipiantur similes & præscripti numeri graduum, divisionis initio facto a diametro aliqua communi utrique circulo, velut C D; rectæ M P ad diametrum C D parallelæ & per omnia puncta M ductæ, intersectione sua cum rectis H*m* ad alteram diametrum *a b* parallelis, & per correspondentia divisionis puncta I transeuntibus, determinabunt totidem puncta ellipseos *m*, *m* &c.

363.

THEOREMA I. *Si orbita vera oculi ſit circulus, & objectum immobile ab oculo diſtantiam quaſi immenſam habcat; projectio orbitæ opticæ* ACBD (fig. 53), *cum in ſuperficie ſphæræ cæleſtis exiguum admodum ſpatium* ONGI *occupet, quod pro plano haberi poteſt, eſt ellipſis* acbd, *cujus axis major* ab *eſt parallelus plano orbitæ oculi* QR, *& æqualis arcui cæleſti* ab, *quem radii* Sa, Sb *e loco imaginario oculi* S *ad extrema puncta diametri* ab *plano* ONGI *parallelæ ducti intercipiunt; & axis minor* cd *eſt in plano comparationis, ſive in plano ad planum orbitæ oculi* QR *perpendiculari: axis vero minor eſt ad majorem, ut ſinus arcus* QO, *qui metitur diſtantiam plani orbitæ oculi* QR *a plano orbitæ opticæ* OK, *eſt ad ſinum totum.*

Demonſtratio. Quoniam per hypotheſin circulus ACBD fere infinite diſtat ab oculo S; & radii e centro ad ſuperficiem ſphæræ ducti eidem ſunt perpendiculares, evidens eſt rectas A*a*, B*b*, C*c*, D*d* &c. eſſe inter ſe parallelas, & ad planum ONGI, ad alterum planum OK inclinatum, normales. Quare (356) curva *acbd* eſt ellipſis, cujus axis major æquatur diametro AB circuli ACBD; & axis minor *cd* eſt perpendicularis ad planum orbitæ oculi, ſeque habet ad axem majorem, ut ſinus arcus QO ad ſinum totum.

364. Corollarium I. Projectio *acb* partis circuli ACB verſus oculum ſitæ, ſive oculo propioris, eſt portio ellipſeos maxime ſupra planum oculi elevata, ſeu ut verius dicamus, maxime ab hoc plano remota: ex oppoſito projectio *bda* partis circuli BDA, quæ eſt ex altera parte oculi, ſeu quæ ab oculo magis diſtat, eſt ellipſeos pars inferior, hoc eſt plano orbitæ oculi viciniſſima.

365. Corollarium II. Quo planum orbitæ opticæ magis accedit ad ſitum perpendicularem reſpectu plani orbitæ veræ oculi, eo magis ejus projectio dilatatur, & ad circulum propius accedit; ita ut ſi orbita optica reſponderet polo Z circuli maximi, in cujus plano eſt orbita oculi, ejus projectio eſſet circulus, quia tunc axis uterque ellipſeos fieret æqualis; verum ſi orbita optica ſit in eodem plano cum orbita oculi, ejus projectio eſt ellipſis ita contracta (axe minore exiſtente infinite parvo) ut proprie non ſit niſi linea recta æqualis axi majori, ſive diametro orbitæ opticæ.

366. Corollarium III. Itaque ſi objectum aliquod cæleſte F ſit immobile, & diſtantiam ingentem ab oculo obſervatoris habeat, qui ſe in centro S circuli, quem reipſa percurrit, quieſcere exiſtimat; hoc objectum *primo* non debet apparere in vero loco *f*, in quo terminatur radius viſualis; ſed ſingulis revolutionibus oculi in ſua orbita videbitur circa verum locum *f* ellipſin *acbd* deſcribere, conſequenter putabitur jam directione *acb* (dum unam ellipſeos medietatem deſcribit); jam directione oppoſita *bda* moveri, dum alteram medietatem percurrit. Dicitur autem objectum in tali caſu

fu primo quidem esse *directum*, postea vero *retrogradum*. *Secundo*. Idem objectum videbitur habere celeritates admodum inæquales: nam quando circa extrema *c* & *d* axis minoris est, spatium, quod describit, directe in oculum incurrit, adeoque magna tum celeritate moveri putatur; postea motum eo magis retardat, quo propius ad vertices ellipseos *a* & *b* accedit, quia scilicet arcus, quos ibi describit, sunt magis obliqui ad radios visuales; ita quidem, ut quando versatur in extremitate utravis axis majoris suæ ellipseos, videatur velut *stationarium*, seu immobile tam respectu progressionis directæ, quam retrogradationis, de quibus diximus; postea directionem mutat iterum, & sic deinceps.

367. Corollarium IV. *Cognita magnitudine diametri orbitæ veræ oculi, & arcus cælestis* a b, *quem subtendit axis major projectionis orbitæ opticæ* a b, *cognosci etiam potest distantia loci putatitii oculi a centro orbitæ opticæ objecti, hoc est, ab ipso objecto.*

Nam tunc radii visuales e loco putatitio oculi ad duo extrema axis majoris ducti sunt crura æqualia trianguli isoscelis, cujus basis est idem axis. Igitur recta e loco putatitio oculi ad punctum medium hujus axis ducta hoc ipsum triangulum isosceles in duo triangula rectangula æqualia dividit (Elem. 500), in quorum utrovis notus est angulus, quem medietas arcus *a b* metitur, & latus ei oppositum, æquale dimidio axi *a b*: quare per trigonometriam inveniri potest quantitas perpendicularis ad centrum orbitæ opticæ ductæ.

368. Lemma III. Si peripheriæ circuli A B C in eodem plano insistat alter circulus A M D P (fig. 56), qui ponatur ab initio non habere alium motum, quam rotationis circa proprium centrum O juxta situm literarum A, M, D, P; manifestum est, quod quamvis quodlibet ejus punctum A, dum peripheriam totam percurrit, omnes possibiles directiones reipsa habeat, nihilominus si ejus motus ad centrum S referatur, solummodo duas directiones inter se oppositas habeat; alteram quam *directam* vocabo, dum semicirculum M D P describit, qui dicatur *semicirculus superior*; alteram quam appellabo *retrogradam*, dum *semicirculum inferiorem* P A M percurrit.

Sed si præterea supponatur, quod centrum O circuli A M D P moveatur directione O I N, ita ut circulus hic rotæ instar super peripheria A B C volvatur, tum vero evidens est *primo*, quod via centri O sit circulus major, quam A B C, & eidem concentricus.

369. Evidens est *secundo*, quod punctum A ad circumferentiam A B C non redeat, nisi postquam totam sui circuli peripheriam emensum est, & præterea arcum ejus B L, qui tot gradus continet, quot arcus A B, inter punctum A, e quo digressum est, & punctum B, in quo iterum rediit, interceptus. Nam si punctum A in digressu suo e puncto aliquo fixo infinite distante videatur per radium O H, ejus revolutio circa centrum proprium tunc reipsa absolvitur, quando redit ad talem situm, ut per radium ad idem punctum fixum ductum cerni possit, quippe in hac hypothesi circulus A B C omni extensione sensibili caret: itaque si puncto A in B existente per centrum I ducatur I L h ad A H parallela, hæ duæ respectu puncti fixi infinite distantis coincidunt in unam lineam: estque punctum L illud, in quo deberet existere A, ut censeretur revolutionem integram circa centrum suum O confecisse. Quare cum non in L, sed in B existat,

ſtat, præter circulum ſuum integrum, etiam arcum B L deſcripſit, qui tot gradus continet, quot arcus O I, ſeu A B, ob parallelas I h & A H. Verum ſi motus referatur ad punctum S, quando A rurſus ad peripheriam in B redit, ſolum circumferentiam ſui circuli A M D P deſcripſiſſe videtur.

Tertio. Quod ſi notetur via, quam deſcribit punctum A, dum circulo A M D P ſemel ſuper A B C voluto a peripheria hujus digreſſum ad eandem redit, habebitur curva A *e* Q *g* B; & dum ſecundo ita volvitur, rurſus curva B K C deſcribetur, quæ *epicyclois* dicitur, & ſic in ſingulis volutionibus. Poteſt vero eſſe triplex caſus.

370. Caſus I. Si circulus A B C interea maneat immobilis, dum alter A M D P ſuper ejus peripheria volvitur (fig. 56); ſingulæ epicycloides, ut A *e* Q *g* B appellantur *ſimplices*, ſeu *ordinariæ*, quibus ſequentes conveniunt proprietates:

Primo: Quacunque inæquali celeritate circulus volvatur, ſemper arcus A B (quem *baſin* epicycloidis dicimus.) æquatur peripheriæ circuli A M D P.

Secundo: Si arcus O I, ſimilis arcui A B, dividatur in quatuor partes æquales in punctis E, F, G, erit E locus centri circuli A M D P, dum punctum A quartam ſuæ viæ partem in circumvolutione deſcripſit. Idem eſt de punctis F, G, I, in quibus centrum erit poſt quemvis viæ quadrantem, donec punctum A ad peripheriam A B C redeat. Itaque ſi per F producatur radius S F, donec occurrat epicycloidi in Q, erit Q vertex epicycloidis, & pars radii Q T ejus axis, diametro circuli A M D P æqualis. Et ſi centro E, radio A O deſcribatur arcus circuli ad partes puncti O, is occurret epicycloidi in *e*, in quo eſt punctum A; centro circuli O in E exiſtente. Simili ratione reperitur, punctum A in *g* exiſtere, dum centrum in G verſatur: ex quo ſequitur, arcum A *e* deſcribi, quando punctum A eſt retrogradum, & dimidium ſui ſemicirculi inferioris percurrit; arcum vero *e* Q *g*, dum deſcribit motu directo ſemicirculum ſuum ſuperiorem; denique arcum *g* B, dum punctum A retrogradum alterum dimidium ſui circuli inferioris conficit.

Tertio. Vertex epicycloidis Q eſt in medio arcuum A *e* Q, Q *g* B æqualium, & ſimiliter ſitorum reſpectu axis Q T.

Quarto. Arcus A *e*, *g* B cavi verſus axem T Q, magis ad eum vergere debent, quoniam reſpondent motui retrogrado puncti A, cujus directio ejuſmodi eſt; at vero introrſum prorſus flecti, ut fit in figura 54, non poſſunt; nam cum via centri O I excedat ſingulas revolutiones æquales arcui A B, qui circuli A M D P peripheriam adæquat; motus hujus centri directione O I N magis impellit punctum A verſus K, quam idem motu rotationis circa ſuum centrum O in retrogradatione in oppoſitum feratur.

Quinto. Tranſitus puncti A epicycloides deſcribentis ex arcu prioris Q *g* B in arcum ſequentis B K fit per angulum in B: nam poſtquam punctum A deſcripto ultimo latere infinite parvo epicycloidis A Q B ad punctum B pervenit, illico per primum latus infinite parvum epicycloidis B K C iterum aſcendit, nullo prorſus ſpatio inter hæc duo latera interjecto.

Sexto. Hinc punctum A e puncto S ſpectatum, ſemper apparet directum; verum motus ejus per totum arcum A *e* Q acceleratur; in vertice Q nanciſcitur velocitatem maximam, quæ dein per arcum Q *g* B ita decreſcit, ut in puncto B videatur expirare; poſtea denuo motus acceleratur per arcum B K.

371. Caſus II. Si interea, dum circulus A M D P ſuper A B C volvitur, etiam ipſe circulus A B C circa ſuum centrum S eadem directione rotetur (fig. 55); aut generatim, ſi centrum circuli A M D P majore velocitate angulari progrediatur in circulo O I N, quam punctum A in peripheria A M D P moveatur, epicylois a digreſſu puncti A a peripheria A B C uſque ad ejus reditum deſcripta eſt *prolongata*, cui ſequentes proprietates manifeſte competunt:

Primo. Cum circulo A B C quieſcente nihilominus punctum A in epicycloide ſimplici continuo verſus C progrediatur, omneſque arcus hujus epicycloidis, ut ſucceſ-

ſive deſcribuntur, ita ad C magis accedant; ſi præterea ponatur ipſe circulus A B C eadem directione rotari, neceſſe eſt, ut celeritas puncti A verſus eandem partem major ſit, quam dum deſcribit epicycloidem ſimplicem, & hinc ſpatia ſic deſcripta majora eſſe debent, & baſis epicycloidis A B æquatur ſummæ e circumferentia circuli A M D P, & illo arcu circuli A B C, quo is ipſe interea rotatus eſt, dum punctum A ab eo digreſſum iterum rediit ad eundem.

Secundo. Si motus utriusque circuli ſit æquabilis, puncta E, F, G, arcum O I in quatuor partes æquales ſecantia, determinant eodem modo, ut ſuperius de epicycloide ſimplici diximus, arcus A *e*, *e* Q, Q *g*, *g* B reſpondentes motui puncti A in partibus ſuperioribus & inferioribus ſui circuli; ſic etiam habetur axis T Q diametro A D æqualis; & arcus A *e* Q, Q *g* B ſunt inter ſe æquales, & ſimiliter reſpectu axis poſiti.

Tertio. Arcus A *e*, *g* B eo minus ad axem vergunt, quo major eſt celeritas circuli A B C.

Quarto. Tranſitus puncti deſcribentis epicycloidem ab arcu Q *g* B ad arcum B K non fit per angulum, ſed per curvam ad B tanto latiorem, quanto celeritas circuli A B C eſt major. Quippe tunc velocitate exiſtente majore punctum A eo magis oblique per arcum Q *g* B deſcendit; & ubi ad B pervenit, exiguum quoddam ſpatiolum ſuper A B C adhuc deſcribit, antequam per arcum B K rurſus aſcendat, ita ut tranſitus in curva *g* B K fiat.

Quinto. Punctum A e puncto S viſum ſemper manet directum, ejusque velocitas ab A uſque in Q creſcit; hinc uſque ad B minuitur; verum in B non eſt nulla, ſed ſolummodo velocitati angulari circuli A B C æqualis.

372. Caſus III. Si interea, dum punctum A ad peripheriam circuli A B C redeat, hic circulus directione oppoſita circa ſuum centrum rotetur; aut generatim, ſi centrum circuli A M D P in circulo O F I minore velocitate progrediatur, quam punctum A in peripheria A M D P moveatur, epicyclois fiet *contracta.* Caſus hic complures alios in ſe complectitur; ſed ne hanc theoriam citra neceſſitatem implicatam reddamus, id ſolum in præſens ſupponemus, quod velocitas circuli A B C retrogradientis minor ſit velocitate puncti A in ſua peripheria A M D P lati. In hac hypotheſi

Primo. Si circulus A B C (fig. 54) eſſet immobilis, nullum epicycloidis punctum eſſet retrogradum; ſed quia A B C retrogreditur, ejus velocitas augere debet velocitatem puncti A in ſemicirculo ſuo inferiore, in quo ſit retrogradum; & ex oppoſito in ſemicirculo ſuperiore, in quo eſt directum, minuere. Ex quo fieri debet, ut extenſio epicycloidis quoad ſpatia in peripheria A B C ſingulis revolutionibus ab A verſus C confecta contrahatur, ejuſque baſis A B æquetur ſolum differentiæ inter peripheriam AMDP, & arcum illum circuli A B C, quo is interea regreſſus eſt, dum punctum A ad eundem rediit.

Secundo. Suppoſito utriusque circuli motu æquabili, iterum ut ſuperius reperiuntur arcus A *e*, *e* Q, Q *g*, *g* B partibus inferioribus & ſuperioribus circuli A M D P reſpondentes; item axis T Q = A D, & arcus A *e* Q, Q *g* B ſimiles & æquales, ſimiliterque reſpectu axis T Q poſiti.

Tertio. Arcus A *e*, *g* B, retrogradationi puncti A reſpondentes, eo magis verſus axem Q T curvantur, quo velocitas circuli A B C major eſt; & flectuntur etiam introrſum, ita, ut contiguarum epicycloidum arcus ſeſe interſecent, quod punctum A, dum eos deſcribit, feratur duplici motu oppoſito directioni verſus C.

Quarto. Tranſitus puncti A per punctum B fit in curva introrſum flexa *g* B *m*, quia dum deſcripto ultimo latere infinite parvo arcus Q *g* B, ad B advenit, velocitate retrogradientis circuli A B C abripitur, & ſpatiolum aliquod exiguum verſus *m* deſcribit, antequam per arcum B *m* K iterum aſcendat.

Quinto. Punctum A e puncto S conſideratum, videri debet, jam directum, jam retrogradum, jam etiam immobile ſive *ſtationarium.* Ductis enim ex S tangentibus S *m*, S *n*, S *t*, S *y*, liquet, punctum A fore directum, dum deſcribit arcum *n* Q *g* *t*, cujus

nempe

nempe omnia puncta versus C diriguntur: quando autem pervenit ad tangentem St, apparebit *stationarium*. hoc est, nec versus C, nec versus O tendet eo tempore, quo arcum, qui cum tangente proxime congruit, percurrit. Denique in arcu tBm erit retrogradum, qui arcus scilicet inter tangentes comprehenditur. Ubi ad m pervenit, iterum fit stationarium; tum in arcu mKy directum; donec ad y stationarium, & postea rursus retrogradum appareat, ac si deinceps. Atque hac ratione in singulis revolutionibus in suo circulo punctum A fit bis stationarium, semel directum, & semel retrogradum.

Sexto. Porro manifestum est, velocitatem angularem puncti A fore nullam, dum est stationarium; postea crescere, dum vel ad verticem epicycloidis, vel ad infimum ejus punctum, in quo peripheriam circuli ABC iterum contingit, pervenit, quibus in locis velocitas maxima videtur, quod hi arcus oculo observatoris in S directe sint expositi; postea motus retardatur usque dum fiat iterum stationarium.

Septimo. Arcus retrogradationis tBm, eo major est, quo velocitas angularis circuli regredientis ABC est major.

373. Corollarium. Ex his illud generatim deducere licet, in ejusmodi motibus speciem epicycloidis pendere a ratione magnitudinis basis AB ad peripheriam circuli, in qua movetur punctum A.

374. Scholium. Si in primo & secundo casu motus utriusque circuli non esset æquabilis, epicycloides nascerentur minus regulares, axis TQ non transiret per medium inter arcus AeQ, QgB, qui nec æquales, nec similiter positi essent, sed alter altero magis prolongaretur, prout duarum celeritatum combinatio, magis in hanc, quam in alteram partem conveniret. Nihilominus tamen forma epicycloidis hæc fere, quam descripsimus, semper prodiret; hoc est, curvatura ad B imitaretur eam, quam fig. 54 & 55 depinximus.

Ex generali hac theoria nihil deducemus, nisi quod exponendis phænomenis motuum planetarum, prout in nostro systemate solari dispositi sunt, applicari debet.

375. Theorema II. *Si objectum & oculus moveantur uniformiter velocitatibus angularibus* V, u, *in circulis concentricis*, *quorum radii sint* R & r, *versus eandem partem*, *loco putatitio oculi existente in centro: orbita optica objecti est curva composita e tot epicycloidibus*, *quot vicibus oculus ex eadem parte ad planum comparationis pervenit; epicycloides autem hæ sunt vel simplices*, *vel prolongatæ*, *vel contractæ*, *prout* VR — Vr *vel est æquale*, *vel majus*, *aut minus*, *quam* ur — Vr, *oculo circulum interiorem percurrente; at si is in circulo exteriore feratur*, *species epicycloidum dependet a ratione*, *quam habet* ur — uR *ad* VR — uR.

Demonstratio. Si objecto quiescente oculus moveatur in circulo, puteturque in centro suæ orbitæ quiescere, nunquam objectum in loco suo proprio videt, sed apparet ei circa locum suum proprium circulum describere, æqualem illi, quem ipse oculus percurrit, & celeritate eadem (352). Itaque si tam objectum, quam oculus una moveantur in circulis concentricis, motus objecti respectu loci putatitii oculi videri debet compositus e duplici, altero revolutionis in epicyclo circa locum verum objecti; altero progressionis centri hujus epicycli in orbita objecti. Atque hinc objectum respectu loci putatitii oculi ita se habet, ut punctum A (fig. 54, 55, & 56) relate ad S; consequenter orbita optica objecti

debent esse tot epicycloides sese continuo ordine excipientes, quoties oculus ad planum comparationis versus eandem partem redit (quippe non prius videri potest objectum unam in epicyclo revolutionem confecisse respectu puncti S, quam oculus ad dictum planum redierit): species autem harum epicycloidum dependet a ratione magnitudinis absolutæ peripheriæ epicycli, sive orbitæ oculi, ad magnitudinem arcus AB, similis arcui OI, quem objectum percurrit interea, dum oculus ad planum comparationis redit.

I. Ut jam duæ hæ magnitudines rite exprimantur, observandum est, quod cum oculus & objectum moveantur versus easdem partes, oculus ad planum comparationis non redeat, nisi excessu celeritatis suæ supra celeritatem objecti. Unde si fiat hæc proportio: ut excessus $u - V$ velocitatum angularium oculi & objecti, quæ habentur eodem tempore, est ad V velocitatem objecti eodem tempore; ita 360°, seu summa omnium excessuum velocitatum angularium, quos oculus acquirere respectu objecti debet, ut ad planum comparationis possit redire, sunt ad $\frac{360° \times V}{u - V}$, summam velocitatum angularium objecti tempore, quo oculus ad planum comparationis redit; ex hac, inquam, proportione habetur $\frac{360° \times V}{u - V}$ pro angulo OSI, vel ASB, qui æquatur summæ velocitatum angularium objecti. Est autem radius arcus AB, mensurantis angulum ASB, $SO - AO = R - r$; & (91) arcus omnis æquatur angulo in radium ducto; itaque magnitudo absoluta arcus AB est $\frac{360° \times V}{u - V}(R - r)$. Ob eandem rationem magnitudo peripheriæ epicycli APDM est $360° \times r$: adeoque arcus AB est ad epicyclum APDM, ut $\frac{360° \times V}{u - V}(R - r)$ ad $360° \times r$, sive ut $\frac{V}{u - V} \times (R - r)$ ad r; aut ut $VR - Vr : ur - Vr$; vel denique ut $\frac{R - r}{r}$ ad $\frac{u - V}{V}$.

376. II. Si orbita objecti MDP (fig. 57) sit intra orbitam oculi, ut si is percurrat arcum ab intervallo reditus sui ad planum comparationis ex eadem parte; centrum S orbitæ veræ objecti videbitur (353) arcum æqualem OI describere; & quia eodem tempore objectum semel in peripheria sui circuli MDP revolvitur, oculo, cujus locus imaginarius est in S, apparet eodem tempore in circulo ipsi MDP æquali semel circuire, quo centrum S arcum OI describit. Hinc orbita optica objecti rursus debet videri composita ex epicycloidibus AQBKC, quarum species dependet a ratione arcus AB ad peripheriam circuli MDP. Arcus porro

AB

A B æquatur ſummæ celeritatum angularium oculi intervallo reditus ſui ad planum comparationis; & radius hujus arcus eſt $r-R$; M D P vero reperitur ut prius $= 360° \times R$; & hinc arcus A B $= \frac{360° \times u}{V-u}(r-R)$: ergo ſpecies epicycloidum pendet a ratione $ur-uR$ ad $VR-uR$, ſeu $\frac{r-R}{R}$ ad $\frac{V-u}{u}$.

377. Corollarium I. *Sive velocitates objecti & oculi ſint æquabiles, ſive non ſint æquabiles, locus apparens objecti ſemper eſt in vertice epicycloidis, dum loco vero oculi exiſtente in plano comparationis, locus oculi putatitius eſt inter oculum & objectum: & locus apparens objecti eſt ſemper in arcu infimo epicycloidis, quando locus verus oculi exiſtentis in plano comparationis eſt ſimul inter objectum & locum putatitium oculi, aut vero quando objectum eſt inter locum verum & putatitium oculi.* Nam vertex epicycloidis eſt punctum ex omnibus maxime remotum a centro S, & arcus infimus epicycloidis eſt eidem centro S viciniſſimus: jam vero liquet (Elem. 546), quod oculus in plano comparationis, & trans locum ſuum putatitium reſpectu objecti exiſtens, ab eo maximam, quam poteſt acquirere, habeat diſtantiam; contra vero dum eſt cis locum ſuum putatitium, aut dum objectum eſt inter oculum, & locum ejus putatitium S, minimam omnium diſtantiam ab objecto habeat: igitur in primo caſu locus apparens objecti eſt maxime omnium remotus a loco putatitio oculi; & in aliis duobus eſt eidem omnium viciniſſimus.

378. Corollarium II. Projectiones epicycloidum in ſuperficie ſphæræ cæleſtis debent eſſe epicycloides quædam ellipticæ, quarum axes T Q ſint inter ſe, ut ſinus arcuum cæleſtium, qui metiuntur diſtantiam plani oculi a plano epicycli objecti (363); & vertices Q, K debent apparere maxime vicini plano oculi; extrema vero puncta A, B, C maxime remota a plano orbitæ oculi (364).

ARTICULUS II.

Applicatio Theoriæ præcedentis ad phænomena pendentia a motu Telluris annuo.

379. Ut theoria ſuperiore articulo expoſita rite ad phænomena cæleſtia, quorum cauſa eſt annuus motus telluris, applicetur, obſervandum eſt *Primo*, planum quod generaliter dicimus orbitæ oculi, in noſtro caſu eſſe planum eclipticæ. *Secundo* orbitam oculi eſſe eam ellipſin, quam tellus reipſa ſingulis annis circa ſolem deſcribit, ſed quæ a circulo non multum differt, axe ejus majo-

majore ad minorem ſe habente ut 2000, 142 ad 1999, 857. *Tertio.* Cum videatur ſol ipſe in hac ellipſi circa terram moveri, ac terra centrum omnium motuum cæleſtium occupare, quamvis id multum abſit a vero; ſequitur, locum putatitium oculi eſſe in vero ſolis loco. *Quarto.* Planum comparationis eſſe planum circuli maximi ad eclipticam perpendicularis, ac per ſolem & ſydus, quod obſervatur, tranſeuntis. Eſt itaque (303) planum circuli latitudinis. Dum oculo in hoc plano conſtituto ſol & ſydus ex eadem parte videntur, ſydus eandem cum ſole longitudinem habet, diciturque *cum ſole eſſe in conjunctione*, id, quod uno tantum modo fieri poteſt, ſi orbita ſyderis orbitam telluris ambiat; at duplici ratione evenire idem poteſt, quando ſyderis orbita intra orbitam telluris ſita eſt. Tunc enim videbitur ſol cum ſydere ad eandem partem, ſed vel ſydus ultra ſolem, quæ *conjunctio ſuperior* eſt; vel cis eundem, & intra terram, quæ *conjunctio inferior* dicitur. Verum oculo in plano comparationis inter ſydus & ſolem verſante, hæc duo centum octoginta gradibus in longitudine differre videntur, & dicitur *ſydus tunc eſſe in oppoſitione cum ſole.* Aſt generatim ſydus eſſe *in Syzygiis* dicitur, quando vel in conjunctione, vel in oppoſitione conſtitutum eſt. Denique oculo a plano comparationis ita remoto, ut arcus eclipticæ inter ſolem & planum circuli latitudinis ſyderis interceptus ſit 90°, dicitur ſydus eſſe *in quadratura cum ſole.*

ARTICULUS III.

De motu apparente ſtellarum fixarum, quem efficit motus telluris annuus.

380. Juxta theoriam motus apparentis, ſi ſtellæ ſunt reipſa fixæ & immobiles, debent videri ſingulis annis deſcribere exiguam aliquam ellipſin, quæ ſcilicet eſt earum epicycli, ſive orbitæ opticæ projectio. Axis major hujus ellipſeos debet eſſe parallelus plano eclipticæ (363) & æqualis chordæ arcus cæleſtis, quem ſubtendit diameter epicycli ſtellæ, ſive diameter orbitæ telluris, quæ eidem æqualis eſt (350): hinc axis iſte eo minorem ſubtendit arcum, quo ſtella (quæ videtur in ipſa ſuperficie ſphæræ cæleſtis eſſe) a terra eſt remotior (31). Axis minor debet eſſe normalis ad planum eclipticæ, hoc eſt, debet eſſe in plano circuli latitudinis, qui ad eclipticam perpendicularis determinat ſtellæ longitudinem: præterea ratio hujus axis minoris ad majorem eſt ut ſinus latitudinis ſtellæ ad ſinum totum. In hac ellipſi ſtella videri debet in extremitate inferiore axis minoris, aut rectius, in extremitate plano

eclipti-

eclipticæ propiore, dum cum sole est in conjunctione (364); sed dum est in oppositione, apparere debet in extremitate superiore axis minoris: eadem videbitur in extremitate axis majoris orientali, quando, tellure in parte orbitæ suæ occidentali versante, est in quadratura cum sole; & quando est in quadratura, tellure versante in parte orientali suæ orbitæ, apparebit in extremitate occidentali axis majoris.

381. Hinc sequitur I: *Quod dum stella est in conjunctione vel oppositione cum sole, videatur in sua vera longitudine*, quia videtur in plano circuli latitudinis, quod per stellam, solem, & oculum transit; verum eo tempore *non videtur in sua vera latitudine:* nam in conjunctione, dum stella est in extremitate inferiore axis minoris suæ ellipseos, ejus latitudo est minima, seu a vera differt, quantum unquam differre potest. Ex opposita ratione ejus latitudo est maxima in oppositione. *Et dum stella est in quadraturis, ejus latitudo apparens est æqualis veræ:* tunc enim stella est in axe ellipseos suæ majore, parallelo ad eclipticam, & per verum stellæ locum transeunte; *sed hoc tempore ejus longitudo a vera maxime differt.* Denique in quocunque alio, extra hos quatuor, situ stella sit, locus ejus verus tam in longitudine, quam in latitudine a loco apparente differt.

382. *Parallaxis orbis annui* dicitur differentia inter locum verum syderis e sole visi, & ejus locum apparentem e tellure spectati. Differentia in longitudine vocatur *parallaxis longitudinis;* & differentia in latitudine, *parallaxis latitudinis.* Ita dicimus, parallaxin orbis annui in syzygiis esse nullam in longitudine; sed maximam in latitudine: in quadraturis parallaxin orbis annui esse nullam in latitudine; sed maximam in longitudine.

383. II. Sequitur: *quamvis stellam debere videri directam per sex menses*, in semiellipsi scilicet inferiore, hoc est, dum ab una quadratura per conjunctionem ad alteram quadraturam pergit; *& per sex alios menses retrogradam* in semiellipsi superiore, dum ab una quadratura per oppositionem ad alteram movetur: denique *videri stationariam* in utraque quadratura cum sole.

384. Ex observationibus accuratissimis nostris institutis temporibus, & instrumentis summa diligentia elaboratis, constat hos motus in fixis esse insensibiles, ut certum sit apud Astronomos, axem majorem ellipsium stellarum maxime illustrium non subtendere arcum 3 vel 4 secundis majorem: ex quo eruitur (367) earum distantiam esse prope infinitam, ut quæ 2800000000000 leucas† excedat, diametro orbis annui terræ existente circiter 54525000 leucarum, ut sequente Capite videbimus. † gall.

Sed cum Astronomi proxime elapsi sæculi adverterent variationes annuas admodum notabiles in omnibus fixis, vehementer

T mira-

mirabantur, quod eas longe aliis legibus fieri cernerent, quam quas nunc expofuimus: erant enim ftellæ tum in extremitatibus axis minoris fuarum ellipfium, quando juxta regulas præcedentes debuiffent in extremitatibus axis majoris obfervari. Hæc diverfitas effecit, ut aftronomi in operationibus fubtilioribus non nifi magna cum cautela ftellis fixis uterentur, ne fcilicet motus ejusmodi incogniti, qui *aberratio fixarum* dicebantur, in aliquem eos errorem conjicerent. Verum cum D. Moulineux & dein D. Bradley has variationes maxima accuratione determinandas fibi fumerent, pofterior tandem veram caufam phyficam hujus motus apparentis detexit, regulasque condidit, ut ejus ratio in obfervationibus fixarum habeatur; id quod paucis hic exponimus.

385. *Primo.* Certum eft, obfervationibus Satellitum Jovis (ut per decurfum patebit) fuffragantibus, lumen, quo nobis objecta redduntur vifibilia, indigere tempore admodum fenfibili, quo ab objecto ad oculum perveniat, dum objectum valde magnam habet diftantiam. V.g. radius a fole emiffus ad terram non pertingit, nifi tempore 8 minutis majore elapfo.

386. *Secundo.* Certum præterea eft, quod cum de præfente objecto certi non fiamus, nifi per impreffionem radiorum luminoforum in noftros oculos, non nifi dependenter ab hac impreffione de figura, & fitu objecti judicemus; ita exiftimamus objectum femper in linea recta fitum, fecundum quam impreffio in oculum facta eft; & licet radii ab objecto exeuntes ad nos non perveniant, nifi reflexi, fracti, ac a via detorti, quæcunque demum hujus caufa fuerit; nihilo tamen minus judicamus, objecta effe in ea directione pofita, quam habent radii, cum oculum noftrum fubeunt, non autem in ea, quam habent, quando ab objecto egrediuntur.

387. His ita habentibus, fi terra nullum haberet motum, radius luminis celeritate finita quacunque a ftella egreffus, & ad noftrum oculum pertingens, quin ab aliqua caufa phyfica a via fua recta fit detortus, oftenderet ftellam in fitu fuo vero, qualecunque tandem tempus infumeret, ut inde ad nos veniret. Idem contingeret, fi quidem terra moveretur, at velocitas luminis velocitatem terræ infinities excederet, quippe refpectu celeritatis infinitæ terra quiefcere cenfenda foret. Verum fi velocitas luminis habeat ad velocitatem terræ rationem finitam, impreffio radii in oculum nec percipitur juxta directionem propriam, nec juxta directionem terræ, fed inftar ictus in planum mobile, fecundum diagonalem parallelogrammi fuper directione radii, & tangente orbitæ telluris in eo loco, in quo radius ad eam pervenit, defcripti (hæc enim tangens eft actualis directio, quam eo momento tellus habet) & cujus latera funt in ratione velocitatum, feu fpatiorum a lumine,

&

& tellure eodem tempore confectorum: atque ita locus apparens ſtellæ debet eſſe illud cæli punctum, in quo hæc diagonalis terminatur.

Sit exempli cauſa TLQI (fig. 60) circulus infinite magnus, exhibens eclipticam, P ejus polus, S centrum, in quo eſt ſol; CFD orbita telluris: QPET circulus latitudinis per ſtellam quamvis E deſcriptus, cujus longitudinem in T, & latitudinem TE determinat: ſit TQ interſectio plani circuli latitudinis cum plano eclipticæ; & ponatur primo locus terræ in C, conſequenter ſtella (379) in conjunctione cum ſole exiſtente, juncta CE, & tangente C*c* ducta (quæ tunc ad planum circuli latitudinis TPQ erit perpendicularis), accipienda eſt in CE pars quælibet CB, ac proportio ſequens facienda: ut celeritas luminis eſt ad celeritatem terræ eodem tempore; ita eſt CB ad C*o* (v. g. cum ſciatur, quod lumen intra 8′, 7″ temporis a ſole ad terram perveniat, & quod eodem tempore terra conficiat arcum 20″ ſuæ orbitæ, fiet BC = CS, ac analogia iſta: *ut radius ad tangentem* 20″; *ita eſt* CB *ad* C*o*). Super CB & C*o* conſtruatur parallelogrammum CBA*o*: liquet, ejus diagonalem cum latere BC comprehendere angulum 20″, & productam uſque ad ſuperficiem ſphæræ cæleſtis in χ, determinare locum apparentem ſtellæ.

388. Si ſupponatur orbita telluris circularis, & velocitas tam luminis, quam terræ æquabilis, adeoque in ratione conſtante, evidens eſt, quod ſi ſciretur tempus, quo lumen e ſtellis fixis ad nos uſque pervenit, haberetur valor de CE: & ex hac analogia: ut radius ad CE, ita tangens arcus a terra percurſi eo tempore, quo lumen conficit CE, eſt ad Cc; daretur parallelogrammum C*c*χE (quod *parallelogrammum aberrationis* dicam) ſimile parallelogrammo CBA*o*. Porro manifeſtum eſt, parallelogrammi hujus planum ſingulis annis debere revolutionem integram facere, quoniam ejus ſitus dependet a poſitione conſtante ſtellæ, & ſimul a poſitione variabili tangentis orbitam telluris in eo ſemper loco, in quo tellus verſatur. Sed quia ob diſtantiam fere infinitam fixarum a ſole & terra, tota orbita telluris BDC ſolummodo puncti alicujus ſenſibilis S rationem habet, ſupponi poteſt, planum parallelogrammi aberrationis verti circa rectam SE, a ſtella ad ſolem ductam, & quidem celeritate angulari rotationis æquali illi, qua terra circa ſolem movetur.

389. His poſitis, cum latus C*c* ſit in plano eclipticæ, alterum ei parallelum Eχ, quodque diſtantiam loci veri ſtellæ ab ejus loco apparente metitur, debet circulum deſcribere, cujus planum eſt plano eclipticæ parallelum, & hinc projectio hujus circuli in ſuper-

ficie ſphæræ cæleſtis eodem modo fit, ac alicujus epicycli, hoc eſt, fit elliptica, ut axis major ſit plano eclipticæ parallelus, minor vero majori ad angulos rectos inſiſtat, ſitque ratio axium, quæ eſt radii ad ſinum latitudinis ſtellæ. Sed enim motus apparens ſtellæ in hac ellipſi alia longe ratione fieri debet, quam motus apparens in elliptica projectione epicycli. Nam quando planum parallelogrammi aberrationis eſt perpendiculare ad planum circuli latitudinis T P Q (id, quod fit in ſyzygiis, cum tunc Eχ ſit ad planum TPQ normalis), Eχ, quæ metitur aberrationem, coincidit cum arcu circuli minoris eclipticæ paralleli, & per verum locum ſtellæ tranſeuntis: itaque in ſyzygiis aberratio tota fit in longitudine, & ſimul omnium maxima; cum ex oppoſito parallaxis orbis annui tunc ſit maxima in latitudine, & nulla in longitudine. Quando planum anguli aberrationis coincidit cum plano T P Q (quod fit, quando terra a ſyzygiis 90° abeſt, adeoque ſtella cum ſole eſt in quadratura) aberratio tota fit in latitudine, & quidem maxima, quippe ſtella in extremitate axis minoris ſuæ ellipſeos apparente; eſtque tunc nulla in longitudine: cum iterum contrarium accidat in parallaxi orbis annui. In omni alia poſitione plani anguli aberrationis, tam in longitudine, quam in latitudine locus apparens a vero differt.

390. Si ulterius concipiatur circulus declinationis R V X per ſtellam E deſcriptus, adeoque per centrum ellipſeos aberrationis, patet, quod quando ſtella videtur in interſectionibus ellipſeos cum hoc circulo, nullam appareat habere aberrationem in aſcenſione recta, quoniam tam locus ejus verus, quam apparens eſt in eodem circulo declinationis; & quando ſtella eſt in extremitatibus illius diametri ſuæ ellipſeos, quæ circulum R V X ſecat ad angulos rectos, nullam habebit aberrationem in declinatione, tam loco ejus vero, quam apparente exiſtente in eodem ad æquatorem parallelo.

Verum quia omnes declinationum circuli eclipticæ oblique inſiſtunt (præter colurum ſolſtitiorum) fieri non poteſt, ut ſtella eo tempore, quo tellus in ſua orbita 90° percurrit, a termino, in quo aberratio in aſcenſione recta nulla eſt, ad eum, in quo nulla eſt aberratio in declinatione, perveniat: & hinc quando aberratio in aſcenſione recta eſt maxima, ea non eſt nulla in declinatione, & viciſſim.

391. Graphice aberratio ſtellarum determinatur pro tempore dato, ſi deſcribatur circulus $\delta\chi\beta\varphi$ (fig. 58), cujus diameter horizontalis $\delta\beta$ deſignet arcum paralleli ad eclipticam, in quo ſtella ſita eſt; & verticalis $\chi\varphi$ portionem circuli latitudinis, ut adeo locus verus ſtellæ ſit in centro E. Dividantur radii Eδ, Eβ in tot partes, quot unitates continet quartus terminus in hac proportione: *ut coſinus latitudinis ſtellæ eſt ad ſinum totum; ita ſunt 20″ ad numerum*

rum quartum. Atque hac ratione arcus paralleli ad eclipticam Eδ, Eβ dividentur in numerum fecundorum iisdem competentium. Pariter radii Eχ, Eφ dividantur in 20″, quippe qui refpondent arcubus circuli maximi. Denique circulus $\delta\chi\varphi\beta$ in figna & gradus fecetur, ita, ut punctum δ refpondeat longitudini ftellæ; ordo autem fignorum a finiftra verfus dextram in fuperiore parte circuli fcribatur, ut δ denotet occafum, β ortum, χ feptentrionem, & φ meridiem. In radio Eχ accipiatur EC, quæ fit ad Eχ, ut eft finus latitudinis ftellæ ad finum totum; & (362) axibus $\beta\delta$, CD defcribatur ellipfis βCδD, quæ erit projectio circuli aberrationis ftellæ. Supponamus hanc ellipfin conftructam effe pro ftella, cujus longitudo fit 12° ♉, & latitudo borealis 36°; folem vero tempore dato effe in 14° ♍. E puncto *m*, quod in circulo refpondet 14° ♍, demittatur ad $\beta\delta$ perpendicularis *m*N; erit M in ellipfi (359) locus apparens ftellæ, perpendicularis MP vel NE ejus aberratio in longitudine, feu numerus fecundorum, quo ftella apparet orientalior, quam fit reipfa; & perpendicularis MN = EP aberratio in latitudine.

Si defideretur aberratio ftellæ in afcenfione recta, & declinatione, prius determinanda eft pofitio circuli declinationis refpectu circuli latitudinis.

Itaque fit (fig. 45) locus verus ftellæ in A (denominationes arcuum & circulorum hujus fchematis vide N. 296 & 297); erit AE 54°, quod eft complementum latitudinis AR: arcus GR, feu angulus PEA vero 48°, quæ eft diftantia 12° ♉ a proximo coluro folftitiorum. In triangulo fphærico APE datur igitur AE = 54°, EP = 23°. 28′½, & angulus AEP; hinc (Trig. 124) reperitur AP complementum declinationis ftellæ 41°. 0′, & angulus PAE 26°. 50′, pars autem borealis circuli declinationis ftellæ AP divergit a circulo latitudinis AE verfus orientem. Hinc (fig. 58) ita ducenda eft diameter FG, ut ex parte orientali radii Eχ cum eo faciat angulum 26°. 50′, quæ circulum declinationis ftellæ defignabit. Dividantur radii EG, EF in 20 fecunda, & ducatur altera diameter IH ad FG normalis, quæ exhibebit arcum paralleli ad æquatorem per ftellam tranfeuntis; radii porro EI, EH in tot fecunda dividantur, quot reperiuntur ex fequente analogia: *ut cofinus declinationis ftellæ eft ad finum totum; ita funt 20″ ad numerum quæfitum*, qui in exemplo propofito erit 30″½. Denique demiffis ad FG & IH perpendiculis ML, & MQ, erit EQ = ML menfura aberrationis in afcenfione recta, & EL = MQ metietur aberrationem in declinatione.

Methodum calculi aberrationum fixarum in ſequentibus dabimus. (vid. Sect. VI. C. I. Art. IX.)

Articulus IV.

De motibus relativis Planetarum, quorum cauſa eſt motus telluris annuus.

392. Extra dubium eſt, obſervatori in ſuperficie telluris conſtituto, ejusque motum annuum planetis attribuenti, qui ſuum etiam habent motum in propriis orbitis, (25) quarum plana exiguis angulis ad planum eclipticæ inclinantur, debere videri hos planetas deſcribere epicycloides ellipticas admodum compreſſas. Sed quia orbita telluris ambitur (170) ab orbitis ♂, ♃ & ♄, contra vero ipſa intra ſe complectitur orbitas ♀ & ☿, commodum fuerit, planetas in duas claſſes reſpectu telluris tribuere, ac ♂, ♃ & ♄ vocare *planetas ſuperiores*; ♀ vero & ☿ *planetas inferiores*.

Ut jam ſciatur, cujus ſpeciei epicycloidem quisque planeta deſcribat, in ſuperioribus ratio arcus ab iis percurſi ad epicycli peripheriam ſumenda eſt $RV - rV$ ad $ru - rV$; in inferioribus autem $ru - Ru$ ad $RV - Ru$: ubi V exprimit velocitatem angularem planetæ, R radium orbitæ illius; u velocitatem angularem telluris, & r ſemidiametrum ſuæ orbitæ.

Omnibus jam magnitudine media acceptis, & ſumtis velocitatibus angularibus diurnis, $u = 59'$, & $r = 100$, erit

Pro ♄ $R = 953$,	$V = 2'$;	hinc	$RV - rV : ru - rV = 1706 : 5700$.
Pro ♃ $R = 520$,	$V = 5'$;		$RV - rV : ru - rV = 2100 : 5400$.
Pro ♂ $R = 152$,	$V = 31'\frac{1}{2}$;		$RV - rV : ru - rV = 1638 : 2750$.
Pro ♀ $R = 72$,	$V = 96'$;		$ru - Ru : RV - Ru = 1652 : 2664$.
Pro ☿ $R = 38$,	$V = 245'\frac{1}{2}$;		$ru - Ru : RV - Ru = 3658 : 7082$.

393. Hinc I: *Omnes planetæ deſcribunt epicycloides contractas*, & quidem eo magis contractas, quo in rationibus allatis antecedens minor eſt termino conſequente.

394. II: *Omnes planetæ ſuperiores ſunt directi, quando ſunt in conjunctione cum ſole* (372); *retrogradi, dum ſunt in oppoſitione; & ſtationarii ante & poſt oppoſitionem.* Et quoniam planetæ inferiores non poſſunt ſoli opponi (quippe terra nunquam inter eos & ſolem verſante), ſed duplicem habent conjunctionem (379), evidens eſt, *planetas inferiores eſſe directos in conjunctione ſuperiore, retrogrados in conjunctione inferiore, & ſtationarios aliquo tempore eam præcedente, & conſequente.*

395. III. *Velocitas apparens planetarum tam directorum, quam retrogradorum augetur ab uno termino, in quo ſunt ſtationarii, uſque ad alterum, in*

quo

quo iterum fiunt ſtationarii (372)*: velocitas maxima in motu directo eſt in conjunctione; velocitas maxima in motu retrogrado habetur in oppoſitione ſuperiorum, & in conjunctione inferiore planetarum inferiorum.*

396. IV. *Dum planetæ ſunt in ſyzygiis, non habent parallaxin orbis annui in longitudine, hoc eſt, eorum longitudo eſt eadem, ſive e ſole, ſive e tellure ſpectentur; aut vero ſi planetæ inferiores ſint in conjunctione inferiore, eorum longitudo e terra viſa differt a longitudine ſpectata e ſole accurate* 180°, in his enim caſibus, ſol, terra, & planeta ſunt in eodem circulo latitudinis (379). Sed quoniam orbitæ a planetis deſcriptæ aliquantum inclinantur ad eclipticam, adeoque planetæ aliquam ubique latitudinem habent, præterquam dum ſunt in interſectione plani ſuæ orbitæ cum plano eclipticæ, ſequitur, *in ſyzygiis parallaxin orbis annui in latitudine eſſe admodum ſenſibilem; extra ſyzygias vero hanc parallaxin adverti tam in longitudine, quam in latitudine.*

397. Obſerva. Rationes ſuperius (392) allatæ accuratiores futuræ erant, ſi quidem e tabulis Aſtronomicis acceptæ fuiſſent velocitates veræ angulares planetarum, eorumque veræ diſtantiæ a ſole in ſyzygiis. V. g. dum Mars eſt in oppoſitione, & ſimul in aphelio (quod evenit, quando oppoſitio contingit circa 20 Februarii) maximam habet a terra diſtantiam, quam in hoc aſpectu unquam acquirere poteſt; eſtque tum $V = 26'.\ 12''$, ſeu $1572''$, $R = 16652$; $u = 1°.0'.20''$, $r = 9898$; adeoque $RV - rV : ru - rV = 100 : 191$. Quando autem Mars in ſua oppoſitione eſt in perihelio (quod fit, oppoſitione incidente circa 25 Auguſti) habet minimam diſtantiam a terra, quæ in tali aſpectu dari poteſt; & eo tempore eſt $V = 38', 2''$; $R = 13822$; $u = 58'.\ 0''$, $r = 10099$. Itaque $RV - rV : ru - rV = 100 : 143$.

Unde conſequitur, epicycloidem Martis eſſe magis contractam, dum eſt in aphelio, quam dum eſt in perihelio, idque in ratione 191 ad 143; adeoque Mars in aphelio longiore tempore, & majore cum velocitate debet eſſe retrogradus, quam in perihelio.

398. Epicyclois cujuslibet planetæ facile utcunque in plano eclipticam repræſentante deſcribi poteſt. Cum enim planetarum orbitæ exiguam ad eclipticam inclinationem habeant, earum projectio ab ipſis ſenſibiliter non differt; & cum præterea parum ſint eccentricæ, ad ſenſum pro circulis concentricis & motu æquabili deſcriptis haberi poſſunt. Deſcribantur itaque duo circuli concentrici, quorum diametri ſint in ratione axis majoris orbis annui telluris ad axem majorem orbitæ planetæ, cujus epicyclois deſideratur. Diviſo dein circulo orbitam telluris exhibente in tot partes æquales, quot libuerit, verbi gratia in gradus denos, fiat: ut $365\frac{1}{4}$ dies ſunt ad tempus revolutionis planetæ; ita ſunt 10 gradus ad numerum graduum, quos planeta in ſua orbita eodem tempore de-

defcribit, quo tellus 10 in fua conficit. Numerus graduum inventus toties, quoties fieri poteft, in circumferentiam circuli planetæ orbitam repræfentantis transferatur. Affumatur locus tam telluris in fua orbita, quam planetæ, & quæratur (347) hujus locus opticus. Quod fi hæc operatio continuetur per omnia, quæ fequuntur, divifionum utriusque orbitæ puncta, habebuntur omnia loca optica planetæ competentia locis veris terræ & planetæ; & fi hæc loca optica conjungantur curva, ea componetur ex epicycloidibus planetæ.

CAPUT III.

De illufionibus opticis in phænomenis motus diurni, quarum caufa eft fitus obfervatoris in fuperficie telluris.

399. Ex illufionibus opticis, quas fuperius (225) expofuimus, confectaneum eft, ut obfervator in telluris fuperficie conftitutus, feque in centro revolutionum diurnarum fyderum (quod idem eft cum centro terræ) pofitum exiftimans, quasdam inæqualitates in his revolutionibus animadvertat, quanquam eæ uniformes videantur. Atque hoc ipfum jam nobis explicandum eft, iisdem adhibitis principiis.

400. Sit P (fig. 61) locus obfervatoris in fuperficie terræ $hPrG$; hrD planum horizontis rationalis; Z ejus zenith in fuperficie fphæræ cæleftis; C centrum revolutionis diurnæ, confequenter locus putatitius oculi; $HAaR$ circulus horizontis in fphæræ cæleftis fuperficie terminatus; HZR planum verticalis primarii obfervatoris; CZLA planum meridiani; & ILK circulus parallelus, quem fydus aliquod L revolutione diurna defcribere videtur.

401. Sit jam fydus in quovis puncto l fui paralleli: obfervator illud re ipfa videt per radium Pl; fed quia exiftimat fe effe in centro C, putat illud a fe videri per radium Cm, parallelum & æqualem radio Pl; ut adeo locus apparens fyderis fit in m, verus in l (347). Eodem modo reperiuntur loca apparentia M, μ, refpondentia veris L, λ.

402. Angulus lCm ad centrum terræ inter locum verum & apparentem fyderis comprehenfus, dicitur *parallaxis fyderis*, quin aliud addatur. Hic angulus, quia $PlmC$ eft parallelogrammum, æquatur angulo PlC. Hinc *parallaxis fyderis refpectu obfervatoris, eft angulus ad fydus, comprehenfus inter centrum telluris, & locum in fuperficie, in quo eft obfervator.* Aut etiam dici poteft: *parallaxin fyderis effe inclinationem duorum radiorum vifualium ad fydus ductorum, alterius quidem e centro telluris; alterius vero ex illo fuperficiei puncto, in quo obfervator eft conftitutus.*

403. De-

403. Deducitur porro hinc I, quod *si stricte loquamur, parallaxis non dependeat per se a motu diurno syderis*; sed tamen ejus effectus in hujus motus phænomenis præcipue sentiantur.

404. II. Quod cum parallaxis efficiat, ut sydera in aliis cæli punctis appareant, quam in quibus reipsa sunt, eadem debeat immutare longitudinem, latitudinem, ascensionem rectam, & declinationem eorum. Atque hinc dicitur *parallaxis longitudinis* differentia inter longitudinem e centro visam, quæ vocatur *longitudo vera*; & illam, quæ videtur e loco observatoris, quæ appellatur *longitudo apparens*. Simile dicendum de *parallaxi latitudinis*, *ascensionis rectæ*, *declinationis*, *altitudinis &c.*

405. *Triangulum parallacticum* est triangulum CPl, vel huic æquale lCm.

406. Theorema I. *Parallaxis syderis est tota in circulo verticali*: seu, quod idem est: *planum trianguli parallactici est semper in plano verticali, seu ad horizontem observatoris perpendiculari.*

Demonstratio. Si per Zenith Z, & locum syderis verum l, describatur circulus verticalis Zla, ejus planum transibit per centrum C, & per locum observatoris P: itaque puncta P, C, l existent in hoc plano; & quia Pm est parallelogrammum, etiam punctum m, consequenter angulus parallacticus lCm, sunt in ejusdem verticalis plano.

407. Corollarium I. *Si duo sydera appareant in eodem verticali, sunt etiam in eodem reipsa.*

408. Corollarium II. *Parallaxis syderis tantum afficit altitudinem*; aut si mavis: *effectus generalis parallaxis syderis consistit in eo, quod faciat, ut sydus appareat vicinius horizonti, aut remotius a Zenith, quam sit reipsa.*

409. Corollarium III. *Quando sydus in revolutione sua diurna venit ad tale punctum, in quo ejus verticalis secatur ad angulum rectum a circulo quovis alio, respectu hujus circuli parallaxin non habet.* Sic quando est in meridiano, quem parallelus syderis secat perpendiculariter, (269.) respectu hujus paralleli parallaxin non habet, hoc est, caret parallaxi in ascensione recta, quæ solam efficit declinationem. Tunc enim circulus declinationis congruit cum verticali syderis: & hinc locus visus e centro terræ, & locus visus ab observatore sunt uterque in eodem circulo declinationis, adeoque eadem est utriusque ascensio recta (304). Eodem modo dum sydus est in verticali, qui eclipticæ insistit ad angulum rectum; hic verticalis coincidit cum circulo latitudinis; quare parallaxis tantum afficit latitudinem, & nulla est respectu longitudinis.

Punctum eclipticae, in quo a verticali perpendiculariter secatur, dicitur *Nonagesimus;* est enim utrinque in aequali distantia (consequenter 90°) a duobus punctis interfectionis cum horizonte. Nam cum ecliptica sit circulus maximus ad horizontem inclinatus, ad omnes verticales obliqua est, excepto illo, cujus planum per ejus polos transit: at vero verticalis transiens per polos alicujus circuli maximi, est simul ad eum circulum maximum, simul ad horizontem perpendicularis: quare (Trig. 18) utrique in distantia 90° ab eorum communi interfectione occurrit.

410. THEOREMA II. *Manente eadem syderis a centro telluris distantia, est semper sinus parallaxis altitudinis, ut sinus distantiae apparentis a Zenith, sive ut cosinus altitudinis apparentis.*

Demonstratio: In triangulo PCL, est (Elem. 746) PC: CL = *sin* PLC: *sin* LPC = *sin* ZPL (Elem. 727) = *sin* ZCM. & in triangulo PCl, habetur etiam PC: Cl vel CL = *sin* PlC: *sin* CPl = *sin* ZPl = *sin* ZCm. Igitur *sin* PLC: *sin* ZCM vel ZPL = *sin* PlC: *sin* ZCm vel ZPl.

411. Corollarium I. *Parallaxis nulla est, quando sydus est in Zenith; & maxima, dum sydus est in horizonte.* In primo enim casu triangulum parallacticum totum coincidit cum recta CPZ, & parallaxis est ut sinus 0°. In casu altero triangulum parallacticum est rectangulum, ut CPλ, & parallaxis est ut sinus totus. Hinc parallaxis maxima syderis dicitur *parallaxis horizontalis.*

412. Corollarium II. *Effectus quoque parallaxis est, quod diameter syderis eo appareat major, quo id altius supra horizontom elevatur, quamvis maneat eadem a centro telluris distantia.* Cum enim eo parallaxis sit major, quo vicinior est horizontali, parallaxis limbi inferioris syderis major est parallaxi limbi superioris: unde necesse est, ut limbi isti appareant a se remotiores differentia eorum parallaxeon, & hinc diameter videbitur aucta. Sunt autem sinus parallaxeon ut sinus distantiarum a Zenith; & differentia sinuum est eo major, quo ipsi sinus sunt minores; igitur differentiae parallaxeon eo fiunt majores, quo sydus puncto verticali Zenith fit vicinius, aut altius supra horizontem ascendit; consequenter ejus diameter tanto magis videbitur aucta.

413. THEOREMA III. *Sinus parallaxeon syderum in eadem altitudine apparente supra horizontem, sed in diversis a centro telluris distantiis, sunt in ratione reciproca distantiarum.*

Demonstratio. Etenim si supponantur in linea Pl duo sydera constituta, alterum in l, alterum in t; aut vero sydus, quod semel visum fuit in l, alia vice fore in t, ob inaequales orbitae suae dimensiones scilicet; erit in triangulis PlC, PtC, PC: Cl = *sin* PlC:

PlC: *ſin* lPC; & PC: Ct = *ſin* PtC: *ſin* CPt vel lPC: Igitur PC× *ſin* lPC = Cl× *ſin* PlC = Ct× *ſin* PtC. Et hinc (Elem. 302) Cl: Ct = *ſin* PtC: *ſin* PlC.

414. Corollarium. *Sinus parallaxeon horizontalium ſunt in ratione reciproca diſtantiarum a centro telluris.*

415. Theorema IV. *Sinus parallaxis horizontalis ſyderis eſt ſemper ut ſinus anguli, ſub quo videtur ſemidiameter horizontalis ſyderis.*

Demonſtratio. Parallaxis horizontalis PλC eſt menſura anguli, ſub quo videtur ſemidiameter terræ PC ex centro ſyderis in λ. Ex eadem ratione angulus, ſub quo e centro telluris videtur ſemidiameter ſyderis in λ, eſt reſpectu hujus ſyderis, parallaxis horizontalis terræ: & ſinus parallaxeon horizontalium terræ debent quoque eſſe in ratione reciproca diſtantiarum diverſarum a centro ſyderis in λ (413). Ex quo conficitur, ſinus parallaxeon horizontalium ſyderis reſpectu terræ eſſe in eadem ratione, in qua ſunt ſinus parallaxeon horizontalium terræ reſpectu ſyderis in λ: aut, quod idem eſt, ſinus parallaxeon horizontalium ſyderis e terra viſi, eſſe in ratione ſinuum ſemidiametrorum horizontalium illius ſyderis.

416. Corollarium. *Sufficit igitur, ſemel exacta obſervatione parallaxin ſyderis horizontalem, & ſemidiametrum ejus horizontalem determinaſſe, ut deinceps ex alterius actuali menſura altera reperiatur.*

417. Obſerva. *Si ſydus tantum a terra diſtet, ut ejus parallaxis horizontalis gradum unum non excedat*, ſinus diverſarum ejus parallaxeon coincidunt cum arcubus, qui eas metiuntur: quare tunc ſemper *pro ſinu parallaxeos* ipſa *parallaxis* adhiberi poteſt.

418. Theorema V. *Si dentur tria quævis ex his quinque: diſtantia vera oculi a ſydere, diſtantia vera ſyderis a centro telluris, magnitudo abſoluta ſemidiametri terræ, altitudo vera vel apparens ſyderis, angulus parallacticus; etiam reliqua inveniuntur.*

Demonſtratio. Etenim tunc in triangulo rectilineo parallactico dantur tres partes, ex quibus artificio trigonometrico ſemper reliquæ duæ determinari poſſunt.

419. Corollarium. *Itaque obſervator in ſuperficie telluris conſtitutus poteſt invenire diſtantiam ſyderum veram a centro telluris ope eorum parallaxis, maxime horizontalis*, quæ commodiſſime ad hoc adhibetur, utpote omnium maxima.

420. Theorema VI. *Per parallaxin ſyderum fit, ut appareant remotiora a meridiano, quam reipſa ſint.*

Demonſtratio. Omnes verticales ſunt arcus ex eodem Zenith ducti, qui eo magis a ſe ſe invicem divergunt, quo ad horizontem propius accedunt, per parallaxin vero ſitus aſtrorum in ſuis

verticalibus conſervatur, & ſolum magis verſus horizontem deprimitur, quam vere ſit: itaque per parallaxin ſydera videri debent remotiora a meridiano (qui itidem eſt unus e verticalibus), quam reipſa ſint.

421. Corollarium I. *Effectus parallaxeos eſt, ut ſydera videantur tardius oriri, ac citius, quam reipſa, occidere.*

422. Corollarium II. *Si ſydus parallaxi obnoxium motu proprio ab occidente in orientem tendit ad conjunctionem cum aliqua ſtella, conjunctio videbitur citius contingere* (quam ſi parallaxi careret), *quando ſydus verſatur in parte cæli orientali; & tardius, ſi ſit ex parte occidentali.*

De parallaxi horizontali Syderum.

Ex pluribus methodis ab Aſtronomis ad obſervandam parallaxin horizontalem ſyderum excogitatis duas ceteris præferendas iſthic ſubjiciemus.

423. Prima quidem, in praxi tutior, duos requirit obſervatores ſub eodem meridiano conſtitutos; alterum in hemiſphærio terræ boreali, alterum in auſtrali, utrumque ſaltem 30° ab æquatore remotum, ut arcus cœleſtis meridiani inter utriuſque Zenith comprehenſus ſit, quam fieri poteſt, maximus. Uterque obſervator determinare debet eo momento temporis, quo ſydus, de cujus parallaxi agitur, ad meridianum appellit, ejus diſtantiam a ſuo Zenith, & ſimul diſtantiam ſui Zenith ab eadem ſtella fixa, quæ fere in eodem cum ſydere parallelo eſt. Quod ſi jam differentia inter diſtantiam puncti verticalis unius obſervatoris a ſydere, & diſtantiam ejusdem puncti verticalis a fixa, ſit accurate eadem, & verſus eandem partem, cum differentia inter diſtantiam puncti verticalis alterius obſervatoris a ſydere, & diſtantiam ejusdem puncti verticalis a ſtella fixa; ſydus non habet parallaxin ſenſibilem: ſed ſi dicta differentia non eſt utrobique eadem, exceſſus majoris ſupra minorem, ſiquidem ſint verſus eandem partem; aut utriuſque ſumma, ſi ſint in partes oppoſitas, indicabit parallaxin horizontalem ope ſequentis analogiæ: *ut ſumma ſinuum diſtantiarum ſyderis ab utriuſque obſervatoris Zenith eſt ad ſinum totum; ita eſt exceſſus, vel ſumma differentiarum modo reperta ad parallaxin horizontalem ſyderis.*

424. Exemplum: die 6 Octobris A. 1751 in Urbe Capitis Bonæ Spei, cujus latitudo Auſtralis eſt 33°. 55′, hora 10½ veſperi, obſervavi, quod Marte ad meridianum appellente in diſtantia a Zenith 25°. 2′, ejus limbus borealis fuerit 26″. 7 ſeptentrionalior, quam ſtella λ Aquarii. Eodem die, eodemque tempore D. Wargen-

gentin Holmiæ, cujus latitudo Borealis est 59°. 21′, observavit, Martem in meridiano a Zenith 68°. 14′ abfuisse, ejusque limbum borealem dicta stella Aquarii fuisse 6″. 6 australiorem. Ex quo liquet, parallaxin Martis sensibilem esse, ad quam inveniendam servit summa 33″. 3. Est autem sinus 68° 14′ æqualis 9287, & de 25°. 2′ est 4231; Quare eorum summa 13518 est ad sinum totum 10000; ut 33″. 3 ad 24″. 64, quæ est parallaxis Martis horizontalis.

Etenim cum Holmia & Caput Bonæ Spei sint fere sub eodem Meridiano, & planum æquatoris inter utrumque locum transeat, sunt 33″. 3 summa quantitatum, quibus parallaxis Martem æquatori justo viciniorem in his duobus locis exhibuit, & cum parallaxis tantum afficiat declinationem (409), ea erat simul parallaxis altitudinis: sunt vero parallaxes altitudinis (410) ut sinus distantiarum apparentium a Zenith; & parallaxis horizontalis est ut sinus totus; igitur

425. Observa I. Si uterque observator foret in eodem hemisphærio respectu ejusdem poli, loco summæ adhibenda esse differentia sinuum.

426. II. Si uterque observator non foret sub eodem meridiano, attendi deberet motus syderis in declinatione intervallo temporis, quo a meridiano unius observatoris ad meridianum alterius pervenit.

427. III. Supposita parallaxi horizontali Martis 24″. 64 die 6 Octobris A. 1751, facile per resolutionem trianguli CPλ, in quo CP = 1, reperitur, quod ejus distantia Cλ a terra tunc fuerit 8371½ semidiametrorum terrestrium. Et quia e Theoria Physica (171) non solum rationes dimensionum orbitarum planetarum ad scalam aliquam communem relatarum (quam scalam supposuimus (170) partium 20000 æqualium) eruimus; sed etiam methodum calculandi pro tempore dato locum, & distantiam planetæ cujusvis a sole in partibus ejusdem scalæ; Si ex hac theoria, & methodo, quam mox tradituri sumus (477), quæratur distantia Martis a terra pro 6 Octobris A. 1751, hor. 10½ vespert. invenietur magnitudo absoluta scalæ ope hujus analogiæ: ut distantia Martis a terra in partibus scalæ (in nostro exemplo 4354) est ad distantiam Martis in semidiametris terræ 8371½; ita sunt 20000, partes omnes scalæ communis, ad 38460 semidiametros terrestres, quæ erit vera & absoluta magnitudo scalæ.

428. IV. Itaque ope parallaxis horizontalis unius tantum planetæ, valor omnium dimensionum in tabula Num. 170 exhibitarum ad mensuras communes cognitas, ut leucas, hexapedas &c.

 redu-

reduci poteſt; quippe ſemidiametro terræ, quæ paſſim 1432 leucarum ſtatuitur, per menſurationes exactas cognita, ac fere 19611500 ped. Paris. Reg. continente. Mars, dum eſt in oppoſitione, & Venus in conjunctione inferiore huic diſquiſitioni præ aliis commodi ſunt, quia ſcilicet terræ tum ſunt viciniſſimi.

429. V. Cum aſſumpta ſcala 20000 partium æqualium, ſit axis major ellipſeos terræ, ejus medietas 10000, ſive diſtantia media terræ a ſole, eſt 19230 ſemidiametrorum terreſtrium. Quod ſi itaque fiat, ut 19230 ad 1; ita ſinus totus eſt ad ſinum parallaxeos horizontalis ſolis; hæc reperietur 10″. 72: & cum præterea ſemidiameter ſolis e terra viſa in diſtantia media ſit 16′, 2″, ſequitur, diametrum ſolis eſſe ad diametrum terræ (415), ut 16′, 2″ ad 10″. 72, ſive proxime ut 90 ad 1; ſuperficiem ſolis eſſe majorem ſuperficie terræ 8053 vicibus; denique ſoliditate excedi terram a ſole 722700^{es} fere. Verum omnes hæ dimenſiones ob exilitatem maximam parallaxeos repertæ, accuratæ eſſe haud poſſunt.

430. Secunda Methodus id commodi habet, quod uno tantum opus ſit obſervatore. Sed ut accurate adhibeatur, neceſſe eſt *primo*, ut tribus quatuorve continuis diebus determinetur ſyderis, cujus parallaxis petitur, aſcenſio recta reſpectu ſtellæ fixæ in eodem fere parallelo exiſtentis, tempore tranſitus utriuſque per meridianum, ut per interpolationes inveniri poſſit vera mutatio aſcenſionis rectæ ſyderis reſpectu ſtellæ intervallo temporis aſſumpti.

Secundo. Die ex his (quibus obſervationes inſtituentur) aliquo differentia aſcenſionis rectæ ſyderis & ſtellæ obſervanda eſt ipſo momento, quo ſydus ad meridianum appellit, itemque ſex fere horis ante vel poſt tranſitum per meridianum; aut quod adhuc melius, hæc differentia accipienda eſt quinque vel ſex horis ante tranſitum ſyderis per meridianum, in ipſo tranſitu, & quinque vel ſex horis poſt tranſitum.

Tertio. Si differentiæ repertæ ſint æquales motui proprio ſyderis in aſcenſione recta intervallo temporis inter obſervationes reſpondenti, ſydus parallaxi ſenſibili caret; at ſi eæ excedant motum proprium, exceſſus erit (420) parallaxis in aſcenſione recta, ſiquidem duarum obſervationum altera facta eſt in meridiano exiſtente ſydere, altera ante vel poſt tranſitum per eundem: aut vero hic exceſſus erit ſumma duarum parallaxeon in aſcenſione recta, ſi e tribus obſervationibus prima inſtituta fuit ante tranſitum ſyderis per meridianum, tertia poſt tranſitum.

Quarto. Fiat: *ut factum ex ſinu diſtantiæ apparentis ſyderis a meridiano (aut ex ſumma ſinuum diſtantiarum apparentium ante, & poſt tranſitum per meridianum obſervatarum) in coſinum elevationis poli obſervatoris, eſt ad factum*

ctum ex sinu toto in cosinum declinationis syderis; ita est differentia inventa ad parallaxin horizontalem syderis.

431. Ut veritas hujus analogiæ demonstretur, sit HEZP (fig. 59.) medietas Meridiani cœlestis, P polus, Z zenith observatoris, HQR horizon, EAQ æquator, LR parallelus syderis M, cujus parallaxis quæritur. Descripto per M & Z verticali, sive circulo altitudinis ZT; & per P & M circulo declinationis MP, angulus ZPM metitur veram distantiam syderis a meridiano. Esto M*m* parallaxis altitudinis; erit *m* locus apparens syderis. Ducatur *m*P, erit angulus ZP*m* mensura distantiæ apparentis syderis a meridiano. Manifestum est, esse MD parallaxin in ascensione recta; quare etiam angulus MP*m*, cuius mensura est is arcus, & quo distantia apparens a meridiano differt a distantia vera, erit itidem parallaxis in ascensione recta. Dicatur parallaxis horizontalis B; erit (409) $R:B = \textit{sin}\, Zm : Mm$. Igitur $Mm = B \times \textit{sin}\, Zm$. Et dum triangulum, ZP*m* mutatur in ZPM per differentiam M*m* lateris ZM, angulo MZP, & latere ZP manentibus constantibus, est (Trig. 179) $\textit{sin}\, ZPm \times \textit{sin}\, ZP : \textit{sin}\, Pm \times \textit{sin}\, Zm = dZPm : dZm$, sive M*m*, sive $B \times \textit{sin}\, Zm$. Itaque divisione per *sin* Z*m* fit $\textit{sin}\, ZPm \times \textit{sin}\, ZP : \textit{sin}\, Pm = dZPm : B$, quæ erat analogia proposita.

Calculus Parallaxeon.

432. Problema I. *Datis parallaxi horizontali syderis, ejus ascensione recta & declinatione, ac elevatione poli, invenire parallaxin altitudinis pro tempore dato.*

Resolutio. Ex tempore dato, & ascensione recta itidem data quæratur (336) distantia syderis a Meridiano; qua inventa, & datis declinatione, nec non elevatione poli quæratur etiam ejus altitudo supra horizontem (290). Sit locus verus syderis in M (Fig. 59) (denominationes partium hujus figuræ vide N. 431): fiat: *ut sinus totus ad cosinum altitudinis MT; ita parallaxis horizontalis est ad parallaxin aliam*, qua ex altitudine MT subtracta, fiat ulterius: *ut sinus totus ad cosinum altitudinis dicta ratione imminutæ; ita est parallaxis horizontalis ad parallaxin altitudinis quæsitam Mm.* Ex prima enim analogia obtinetur non nisi parallaxis, quæ est in ratione sinus altitudinis veræ MT, adeoque non accurata; eadem tamen satis exacta est, ut habeatur proxime altitudo apparens *m*T, in cujus ratione vidimus (410) esse parallaxin veram *m*M.

433. Problema II. *Iisdem datis reperire parallaxin in ascensione recta & declinatione.*

Reso-

Resolutio. In parvo triangulo *m* D M ad sensum rectilineo & rectangulo ad D, est M*m* parallaxis altitudinis, M D mensura anguli M P D, qui est parallaxis in ascensione recta, & *m* D parallaxis in declinatione; & angulus *m* M D est complementum anguli Z M P, ob rectum ad D. Jam vero hoc triangulum ita solvi potest (Trig. 120): *sinus distantiæ syderis a Zenith* M Z *est ad sinum ejus distantiæ a meridiano* M P Z; *ut est sinus distantiæ poli a Zenith* Z P, *ad sinum anguli* Z M P, *a verticali & circulo declinationis comprehensi*. Hoc habito est *sinus totus ad cosinum anguli* Z M P *a verticali & circulo declinationis comprehensi, ut est parallaxis altitudinis m* M *ad parallaxin declinationis m* D. Denique *cosinus declinationis syderis est ad sinum anguli a verticali & circulo declinationis comprehensi, ut est parallaxis altitudinis m* M *ad parallaxin ascensionis rectæ* M P D (Trig. 179).

Manifestum est, in his regionibus septentrionalibus, per parallaxin in declinatione reddi declinationem borealem apparentem vera minorem, & declinationem australem vera majorem; & vidimus per parallaxin in ascensione recta syderum a meridiano distantia aucta, eorum ascensionem rectam apparentem vera majorem fieri ante transitum per meridianum; & vera minorem post transitum.

434. Observa. Parallaxis ascensionis rectæ & declinationis independenter ab altitudine syderis, & ejus angulo parallactico reperiri potest, si fiat: *parallaxis ascensionis rectæ* æqualis *parallaxi horizontali ductæ in cosinum elevationis poli, & in sinum distantiæ apparentis syderis a meridiano; & divisæ per sinum distantiæ apparentis syderis a polo supra horizontem elevato.* Demonstratio supra data jam est (431). *Parallaxis declinationis* autem æqualis est *parallaxi horizontali ductæ in sinum elevationis poli, ductæ in sinum distantiæ apparentis syderis a polo; subtracto facto ex parallaxi horizontali in cosinum altitudinis poli, & in cosinum distantiæ apparentis syderis a meridiano, nec non in cosinum distantiæ apparentis syderis a polo supra horizontem elevato.* Verum hic notandum, esse casum, in quo loco subtractionis facienda est additio facti posterioris e parallaxi horizontali in tres dictos cosinus; nempe quando distantia syderis a meridiano, & ejus distantia a polo, altera quidem minor, altera vero major est 90 gradibus. Postrema hæc formula facile eruitur e postrema analogia formulæ primæ differentialis Trigonometriæ sphæricæ.

Eædem formulæ applicari possunt parallaxi longitudinis & latitudinis non sine calculi compendio; nempe: *parall. longit.* = *parall. horiz* × *sin. altitudinis nonagesimi* × *sin. distant. appar. syderis a nonages. totum divis. per cosin latit. appar. syderis.* Et *parallax. latit.* = *parall. horiz.* × *cos. altit. nonages.* × *cos. latit. appar. syderis* — *parall. horiz.* × *sin. alt. nonag.* × *cos. dist. appar. syderis a nonag.* × *sin. lat. app. syderis*. Signum — mutatur in +, quando distantia apparens syderis a nonagesimo, & ejusdem distantia a polo eclipticæ supra horizontem elevato, ac per latitudinem determinata, altera est 90 gradibus major, altera minor.

Caput IV.

De illusionibus opticis, quæ pendent a refractione radiorum luminis in transmissu per Atmosphæram telluris.

435. Præter tres superioribus tribus Capitibus recensitos illusionum fontes quartus adhuc superest, refractio scilicet radiorum lucis, quæ in omnes observationes astronomicas turbationem invehit.

436. I. Experientia, & regulis Dioptrices certum est, radios luminis a via rectilinea detorqueri, quam primum oblique in medium diversæ naturæ ab illo, e quo veniunt, incurrunt, atque hoc ita, ut si medium, quod subeunt, sit densitatis uniformis, radii solummodo ad aliquem angulum inflectantur, postea novam directionem illo flexu acquisitam exacte sequantur; at si medium, in quod incidunt, sit densitatis variabilis, exempli causa, si densitas crescat in certa profunditatis ratione, radii magis semper curventur, magnitudine, & situ angulorum curvaturæ certam aliquam legem sequente, quæ sit ut functio quæpiam profunditatis.

Hoc vero est, quod accidit radiis luminis e syderibus ad nostros oculos pertingentibus: Terræ enim BOF (fig. 51) jam vicini immerguntur semper magis massæ aereæ GCH, cujus densitas eo major semper est, quo terræ propior: itaque nisi perpendiculariter incidant, hoc est, nisi eorum directio sit versus centrum terræ P, adeoque nisi transeant per zenith observatoris, radii, velut AC, detorquentur, & in curvam CDO inflectuntur, cujus cavitas centro terræ P obvertitur, & longitudo dependet a spatio, quod in transitu per atmosphæram, quæ totam tellurem ambit, emetiuntur radii; curvaturæ vero species tum a densitate diversorum stratorum aeris sibi invicem incumbentium, & per quæ radii transmittuntur; tum etiam ab obliquitate incidentiæ. Denique hæc curva est in plano verticali: quippe juxta Dioptrices leges angulus refractionis est in plano perpendiculari ad superficiem refringentem in puncto incidentiæ. Jam vero diversa atmosphæræ strata superficies habent tum inter se, tum cum terra concentricas: itaque planum ad superficiem atmosphæræ perpendiculare, est etiam perpendiculare ad superficiem terræ; igitur est planum verticale.

437. II. Certum quoque est, quod observator, percepta per impressionem radiorum luminis in oculos objecti præsentia, judicet objectum in directione, qua impressio fit, situm esse (386): igitur si radius ab astro aliquo in A emissus, oculum per viam curvam CDO subeat, existimabit objectum esse in directione illius ex-

tremi curvæ hujus, quod oculum attingit; hoc eſt, putabit objectum eſſe in recta O *a*, curvam in puncto O tangente, ubi ad oculum venit. Hinc vero apparet

438. *Radios luminis a ſyderibus ad zenith exiſtentibus emiſſos, non eſſe refractioni obnoxios.*

439. *Refractionem totam eſſe in altitudine, hoc eſt, effectum refractionis eſſe, ut aſtra appareant viciniora ad zenith, aut altiora ſupra horizontem, quam reipſa ſint.*

440. *Per refractionem fieri, ut arcus diſtantiæ apparentis duorum ſyderum ſemper ſit minor arcu diſtantiæ veræ:* namque cum refractio ſydera in eorum verticalibus circulis attollat, qui in zenith concurrunt, facit ſimul, ut huic puncto concurſus verticalium videantur viciniora, conſequenter etiam viciniora inter ſe.

441. *Ceteris omnibus paribus, omnia ſydera eandem habere refractionem, dum ſunt in eadem ſupra horizontem altitudine,* quippe refractione non pendente a diſtantia ſyderis ab obſervatore, ſed a quantitate aeris ſolum, quem radii trajicere debent, antequam ad oculum perveniant: at vero aer ſeſe non extendit ultra 16 vel 17 leucas a ſuperficie terræ.

442. *Refractionem eo eſſe majorem,* hoc eſt, differentiam inter altitudinem veram, & altitudinem apparentem ſyderis eſſe eo majorem, *quo ſydus obſervatum longius abeſt a Zenith.* Ita radius A O refractionem majorem patitur, quam radius E O, qui vicinior ad zenith, & minus aeris tranſire debet, & magis accedit ad perpendiculum.

443. *Sydera reipſa eſſe adhuc infra horizontem, quando jam in horizonte videntur;* itaque *videntur citius oriri, & tardius occidere, quam juxta leges ſolius motus diurni telluris oporteat.*

444. *Igitur clarum eſt, effectum refractionis eſſe directe oppoſitum effectui parallaxeos, quamvis utraque easdem fere leges ſequatur.* Atque hinc data refractione ſyderis pro certa altitudine, ut ſupra (433), calculari poteſt mutatio per eam aſcenſioni rectæ, & declinationi ſyderis inducta. Et univerſim eodem calculo ſitus apparens aſtrorum ab erroribus tum per parallaxin, tum per refractionem inductis expurgari poteſt, ſi pro elemento calculi accipiatur differentia inter parallaxin & refractionem altitudini ſyderis competentem.

445. Ulterius porro liquet, *refractiones ſyderum debere eſſe inconſtantes, & omnibus variationibus, quæ in atmoſphæra contingunt, obnoxias.* Sic aere puriore, & calore magis rarefacto eæ erunt minores; quod etiam e ſitu loci pendebit, uti verſus æquatorem, in vertice magnorum montium: ex oppoſito refractiones fient majores aere humidiore, denſioreve.

446. At-

446. Atque hinc consequi, *nec posse statui methodum exactam eas immediate ex syderum observationibus deducendi, nec hypothesin physicam, quam in iis calculandis in omni casu sequi liceat.*

447. Observa I. Experientia docuit, refractionem horizontalem esse admodum inconstantem, ut quæ quandoque sit 32′, alias 36′ aut 37′; præterea eam admodum irregulariter mutari usque ad altitudinem 10, vel 12 graduum: hinc maximam partem parum tribuitur observationibus factis, quando sydera erant horizonti valde vicina. Denique in altitudine 45 gradus superante eam esse minorem 1′, ac inde usque ad zenith admodum æquabiliter decrescere.

448. II. Refractio facit, ut solis discus in ortu vel occasu suo appareat ovalis: quippe cum effectum non habeat, nisi secundum circulos verticales, diametrum horizontalem nil mutat: at vero limbos conjungit aliquantum, in quibus diameter verticalis terminatur.

449. III. Ad determinandas refractiones, Astronomi altitudines syderum observatas conferunt cum iis, quas per calculum pro eodem tempore repererunt. Adhibent autem solem, cujus theoria est minime ambigua, vel stellam quampiam notabiliorem, cujus declinatio sit rite determinata, & quæ vel per ipsum zenith, vel prope illud, transeat.

450. Præter refractiones Astronomicas atmosphæra etiam efficit peculiare quoddam phænomenon, quod *crepusculum* dicimus: estque tenuis illa lux, quæ jam longe solis ortum præcedit, ac sensim augetur; quæ etiam diu post solis occasum perstat, & insensibiliter tandem extinguitur, nocte concubia subsequente. Sole nondum altius infra horizontem loci alicujus in superficie telluris depresso, ejus radii in atmosphæram incidentes franguntur, reflectuntur, atque ad eum locum eo copiosiores perveniunt, quo aer est purior, & sol horizonti adhuc propior. Observatum est, hanc lucem percipi mane sole adhuc 18 circiter gradibus infra horizontem existente, neque vesperi citius expirare, quam sol ad eandem profunditatem pertingat. Unde consequens est; *nocte stricte sumpta carere locum, quando sol media nocte* 18 *gradibus non descendit infra horizontem:* id quod Parisiis toto mense Junio contingit; & in regionibus magis adhuc ad Septentrionem sitis crepusculum continuum eo longiore tempore circa solstitium æstivum perdurat, quo polo arctico sunt viciniores. Idem fit in hemisphærio australi, sole circa tropicum ♑ versante.

451. V. Potest etiam per calculum inveniri hora ortus vel occasus apparentis solis; immo etiam tempus initii crepusculi matutini, quod *primum diluculum* dici solet, aut finis vespertini, si resolvatur triangulum sphæricum Z P C (fig. 38 & 39) cujus tria latera

nota sunt: nempe ZP, complementum elevationis poli; PC, distantia syderis a polo, quæ ex declinatione data deducitur; & tertium, arcus 90°, 23′, si quæratur ortus vel occasus syderis: vel arcus 108°, 0′, si quæstio sit de crepusculo. Quod si jam angulus ZPC inveniatur, atque in tempus convertatur, habebitur intervallum inter meridiem (si sermo sit de sole) & tempus quæsitum, aut generatim inter transitum syderis per meridianum & tempus quæsitum.

SECTIO TERTIA.

Continens partem alteram Astronomiæ Terrestris; regulas calculi motuum planetarum, & cometarum a revolutione diurna telluris non pendentium; & diversas methodos stabiliendi theoriam ex observationibus in superficie telluris institutis.

CAPUT I.

De theoria Planetarum, prout e terra videntur.

452. Dum oculus tot illusionibus patet, ut planetas, cometasque nec in vera eorum directione, nec in plano, in quo orbitas suas describunt, videat, sane ipsa res observatorem in telluris superficie positum, atque ex observationibus isthic institutis Theoriam eorum motus veri stabilire cupientem, admonet, ut pro termino comparationis planum eclipticæ eligat, in quo scilicet oculo constituto paucioribus illusionibus expositus est.

Verum cum unicus sol in centro omnium motuum verorum, ac in intersectione planorum omnium orbitarum cælestium (14) situs sit, manifestum est, omnem planetarum theoriam e solutione duplicis hujus problematis pendere: *datis motibus e sole visis, determinare motus e terra spectatos; & vicissim datis motibus ut in terra apparent; invenire eosdem, ut e sole viderentur.* Ast hujus antequam solutio dari possit, examinandum est, ecquid tandem statui queat de motibus planetarum ad eclipticæ planum relatis, eorumque phænomenis tum solis, cum etiam terræ respectu.

ARTICULUS I.

De motibus planetarum ad planum eclipticæ relatis, tam solis, quam terræ respectu.

453. Quoniam orbitæ planetarum singulæ sunt in singulis planis diversis (25), attamen omnibus per centrum solis transeuntibus,

tibus, consequens est, ut recta communis intersectionis cujuslibet plani cum plano eclipticæ itidem per solis centrum transeat, adeoque puncta duo, in quibus quævis orbita planum eclipticæ secat, sibi e diametro opponantur, ac e sole 180 gradibus a sese distare videantur. Hinc quilibet planeta e sole spectatus, dum integram revolutionem absolvit, dimidium orbitæ suæ supra eclipticæ planum, dimidium infra illud describere debet. Quia vero ecliptica est circulus maximus sphæræ cælestis apparentis, ejus planum ipsam sphæram in duo hemisphæria æqualia, alterum boreale, in quo est polus arcticus; australe alterum, in quo polus antarcticus situs est, dividit. Igitur quivis planeta, dum in altero dimidio suæ orbitæ versatur, habet latitudinem borealem; & dum alterum dimidium describit, latitudinem australem.

454. Puncta illa duo intersectionis orbitæ planetæ cum plano eclipticæ, *nodi planetæ* dicuntur; & *nodus* quidem *ascendens* illud, per quod a latitudine australi ad borealem transit, cujus signum est ☊: *nodus descendens* vero alterum, per quod ex hemisphærio boreali in australe descendit, cujus character est ☋.

455. Sit, exempli causa, E ☊, P ☋ orbitæ planetæ alicujus superioris (fig. 62); aut inferioris (fig. 63): sit B ☊ C L ☋ projectio orthographica ejus orbitæ in plano eclipticæ.

Si planeta motu annuo ferretur in hac projectione, semper in plano eclipticæ appareret, omnique careret latitudine; sed quia reipsa orbitam E ☊ P ☋ percurrit, liquet, ejus motum e sole visum, & ad orbitam projectionis relatum, eodem modo explicandum esse, quo exponitur motus apparens solis in plano eclipticæ, & ad æquatorem relatus (245). Si itaque supponatur primo planeta in suo nodo ☊, nullam isthic habebit latitudinem; verum in progressu versus P, ejus latitudo augetur, semperque fit magis borealis, donec planeta versetur circa F, 90° a ☊, ubi est maxima, & inclinationi orbitæ cum plano eclipticæ æqualis. Ab F hæc latitudo decrescit usque ad ☋, ubi nulla est; postea fit australis, crescitque usque ad E, 90° a ☋ distante planeta; inde rursus minuitur, donec ad ☊ perveniat, ac nulla fiat, iterum in borealem mutanda.

456. Mensura latitudinis planetæ in loco quovis P suæ orbitæ existentis est angulus ad solem P S L, a recta e sole S ad locum verum planetæ P ducta, & ab altera, quæ e sole S per loci P projectionis punctum L transit, comprehensus, quod punctum perpendiculo P L ad planum eclipticæ demisso determinatur.

457. *Distantia planetæ a sole* est recta S P; *distantia ejus curvata* est recta S L.

 458. Si

458. Si ſupponatur planum orbitæ planetæ produci indefinite, donec ſuperficiei ſphæræ cæleſtis occurat, orbita, quæ in ſe eſt elliptica, reſpectu ſolis S (241) fiet circulus maximus NpDb ſphæræ ejuſdem ad planum eclipticæ NlDe inclinatus, interſectionibus ſeu nodis circulorum in N & D exiſtentibus. Si præterea ponatur initium arietis eſſe in puncto ♈ eclipticæ cæleſtis NlDe, & e puncto D tanquam polo concipiatur arcus ♈b deſcribi, occurrens orbitæ ptoductæ in b, erit punctum b illud, a quo longitudines planetæ in ſua orbita computantur. Sic arcus bDp, ſecundum ordinem ſignorum Zodiaci numeratus, dicitur *longitudo planetæ in ſua orbita.* Demiſſo e puncto p arcu $p\,l$ ad planum eclipticæ perpendiculari, erit arcus eclipticæ ♈Dl *longitudo vera planetæ*; & arcus $p\,l$ *ejus latitudo.* Arcus bD orbitæ, eſt *locus nodi aſcendentis*; & arcus eclipticæ ♈D, *longitudo nodi deſcendentis. Argumentum latitudinis* eſt arcus orbitæ Dp, nempe diſtantia planetæ a ſuo nodo aſcendente, ſecundum ſignorum ordinem computata. Ex his ſequitur, *in primis ſex ſignis argumenti latitudinis* eſſe *latitudinem borealem; in ſex vero poſterioribus ſignis, auſtralem.* Puncta f & g, 90° a nodis N & D diſtantia vocantur *Limites* planetæ.

459. *Longitudo* vel *latitudo* planetæ e ſole viſa, dicitur *heliocentrica*; at quæ e terra ſpectatur, *geocentrica* appellatur.

460. Latitudini geocentricæ planetæ eadem fere conveniunt, quæ latitudini heliocentricæ: nam *primo* dum planeta in alterutro nodo verſatur, nullam habet latitudinem geocentricam, quod tum cum oculo obſervatoris ſit in eodem plano. *Secundo.* Latitudo geocentrica planetæ eſt borealis vel auſtralis, prout is vel in primis ſex ſignis, vel in poſterioribus argumenti latitudinis fuerit. Quod autem ad quantitatem ejus attinet, ea non ſolum dependet ab argumento latitudinis, ſed etiam a diſtantia planetæ a terra. Sit enim T Q R orbis annuus terræ, T ejus locus, planeta in P exiſtente: patet, ductis rectis T P, T L, latitudinem geocentricam planetæ habere menſuram angulum P T L, angulo ad L recto, quod P L ſit ad planum eclipticæ, in quo eſt orbita telluris, perpendicularis.

461. Longitudo geocentrica planetæ P e tellure in T exiſtente viſi, eſt arcus eclipticæ ♈DM juxta ſignorum ordinem, inter rectam T ♈ e terra ad primum punctum eclipticæ ductam, & inter alteram, quæ e terra per punctum L projectionis planetæ, uſque ad ſphæræ cæleſtis ſuperficiem in M producitur, interceptus.

462. Cum diſtantia S T reſpectu diſtantiæ ſolis a ſuperficie ſphæræ cæleſtis evaneſcat, patet rectam T ♈ non differre a recta, quæ e ſole ad idem punctum ♈ ducitur, ita ut differentiam inter longitudinem ♈l e ſole viſam, & inter longitudinem viſam e terra,

ra, metiatur arcus cæleſtis M l, quem *parallaxin orbis annui* (382) appellant; aut vero angulus S L T, cujus menſura eſt arcus M l, utpote radio eclipticæ cæleſtis infinito.

Atqui hic angulus, ceteris omnibus paribus, eo eſt major, quo diſtantia ſolis a terra S T reſpectu diſtantiæ ſolis a loco planetæ ad eclipticam reducto S L major eſt: unde ut longitudo & latitudo heliocentrica planetæ ad longitudinem & latitudinem geocentricam reduci poſſit; ſitus terræ reſpectu ſolis, & ratio diſtantiarum S T, & S L cognoſci debet.

Articulus II.

Expoſitio generica totius ordinis calculi neceſſarii ad inveniendam longitudinem & latitudinem Planetæ e ſole, & terra viſam pro tempore dato.

463. Regula I. Reducatur tempus datum ad tempus medium (321).

464. II. Accipiatur intervallum inter tempus datum ad medium reductum, & inter Epocham proximi tranſitus terræ per ſuum aphelium, & fiat ſequens proportio: ut tempus revolutionis integræ terræ ad intervallum temporis modo repertum; ita ſunt 360 gradus ad anomaliam mediam terræ (129).

465. III. Anomalia media reducatur ad veram (138), addaturque loco vero aphelii terræ; habebitur locus verus heliocentricus terræ in puncto ſuæ orbitæ T (fig. 62 & 63), aut relate ad ſuperficiem ſphæræ cæleſtis in H, ita ut longitudo terræ ſit arcus eclipticæ ♈ D H.

466. IV. Ad locum verum terræ addantur ſex ſigna, ſive 180°; habebitur (242) locus verus ſolis e terra in puncto eclipticæ O viſi, longitudine geocentrica ſolis exiſtente arcu eclipticæ ♈ D H N O.

467. V. Quæratur (140) diſtantia ſolis a terra S T.

468. VI. Pro Planeta fiat: ut tempus revolutionis annuæ planetæ eſt ad intervallum inter tempus datum, & epocham proximi illius tranſitus per ſuum aphelium; ita ſunt 360° ad anomaliam mediam planetæ.

469. VII. Anomalia media reducatur ad veram, & addatur ad locum aphelii Planetæ: erit in P locus verus planetæ in ſua orbita e ſole viſus; aut ſi referatur ad ſuperficiem ſphæræ cæleſtis, in p; longitudo vero ejus heliocentrica in ſua orbita arcus b D p.

470. VIII. Inveniatur diſtantia planetæ a ſole S P. Diſtantiæ autem S T, S P ſumendæ ſunt in eadem menſura (170), v. g. diſtantia media terræ a ſole poſita 10000 partium æqualium.

471. IX. A longitudine heliocentrica Planetæ in ſua orbita *b* D *p* ſubtrahatur *b* D locus nodi aſcendentis D; reſiduum dabit argumentum latitudinis D *p*.

472. X. Inferatur (Trig. 85): *ut ſinus totus ad ſinum inclinationis orbitæ planetæ* p D l; *ita eſt ſinus argumenti latitudinis* D p *ad ſinum latitudinis heliocentricæ* p l.

473. XI. Argumentum latitudinis D *p* reducatur ad diſtantiam veram loci nodi a puncto projectionis loci Planetæ D *l*, quæ *argumentum latitudinis in ecliptica acceptum* vocari poteſt: fit autem hæc reductio ſequente analogia (Trig. 88): *ut ſinus totus eſt ad coſinum inclinationis orbitæ; ita eſt tangens argumenti latitudinis* D p, *ad tangentem argumenti latitudinis in ecliptica accepti* D l.

474. Differentia inter D *p* & D *l* in tabulis Aſtronomicis *reductio* dicitur, quia fervit reducendæ longitudini planetæ in ſua orbita acceptæ ad *longitudinem*, quæ vocatur *vera*, & ad eclipticam refertur.

475. XII. Argumentum latitudinis in ecliptica acceptum D *l* addatur longitudini nodi aſcendentis ♈ D; habebitur longitudo vera heliocentrica planetæ ♈ D *l*.

476. XIII. Diſtantia S P (470) reperta reducatur ad diſtantiam curtatam S L hac analogia (Elem. 747): *ut ſinus totus eſt ad coſinum latitudinis planetæ* P S L *e ſole viſæ; ita eſt diſtantia* S P *ad diſtantiam curtatam* S L.

477. XIV. Inter longitudines heliocentricas terræ & planetæ ♈ D H & ♈ D *l* accipiatur differentia; & in triangulo rectilineo S L T habebitur angulus T S L (qui *angulus ad ſolem*, ſeu *angulus commutationis* dicitur) cum lateribus S L, S T. Quæratur (Elem. 752) angulus S T M vel O T M, inter loca ſolis O, & planetæ M e terra viſa (vocatur autem hic *angulus ad terram*, ſeu *angulus elongationis*); tum vero facile obtinebitur longitudo geocentrica ♈ D M Planetæ, ejus quoque diſtantia a terra T P vel T L ex eodem triangulo T S L reperietur.

478. XV. Fiat denique: *ut ſinus anguli* T S L *ad ſolem eſt ad ſinum anguli ad terram* L T S; *ita eſt tangens latitudinis heliocentricæ* P S L, *ad tangentem latitudinis Geocentricæ* P T L.

479. Obſerva I. Omnes hæ regulæ ex iis, quæ adhuc diximus, manifeſte conſequuntur: ſola ultima analogia demonſtrationem deſiderat. Pro qua in triangulo S P L habetur (Elem. 748) R: P L = *cot* P S L: S L; & in triangulo rectangulo P T L, eſt R:

P L

PL = *cot* PTL: TL; consequenter etiam *cot* PSL: *cot* PTL = SL: TL; aut (Elem. 737) *tang* PSL: *tang* PTL = TL: SL. Est autem in triangulo SLT, TL: SL = *sin* LST: *sin* STL, quare etiam est *sin* LST: *sin* STL = *tang* PSL: *tang* PTL.

480. II. Astronomi has operationes compendiosiores reddunt ope Tabularum, quæ calculos jam absolutos continent, atque ita illico reperiunt, quod ex singulis operationibus in præcedentibus regulis præscriptis prodit. Verum quia harum tabularum conditores diversis usi sunt methodis, ut impossibile sit explicationem, quæ omnibus conveniat, dare, cogimur Lectorem ad eos remittere: & alias usus harum tabularum, quarum expositio semper addi solet, expeditus est, ubi semel fundamentum, cui innituntur, rite perceptum est. Id solum monemus, tabulas Astronomicas reliquis celebriores esse D. Cassini A. 1740; & D. Halley A. 1749 vulgatas.

ARTICULUS III.

Enumerantur elementa necessaria ad stabiliendam Theoriam planetarum e sole & terra visorum, & simul exponitur methodus hac in materia observanda.

481. Facile quisque videt, in calculis Articuli præcedentis supponi sequentia cognita, quæ *elementa Astronomica Theoriæ Planetarum* vocantur, quia velut totidem data solutioni problematis generalis superius (452) propositi serviunt. *Sunt autem* 1°. *Tempus revolutionis periodicæ cujuslibet Planetæ.* 2do. *Positio lineæ apsidum.* 3°. *Epocha transitus planetæ per hanc lineam.* 4°. *Eccentricitas Planetæ, e qua desumuntur dimensiones ejus ellipseos.* 5°. *Ratio axis majoris ellipseos cujusvis planetæ ad axem majorem orbitæ telluris.* 6°. *Locus nodi ascendentis Planetæ.* 7°. *Inclinatio orbitæ planetæ ad planum eclipticæ.* Præterea sciri debet, an lineæ apsidum, & nodorum cujuslibet Planetæ sint immobiles, an vero motum aliquem habeant; & si quidem moveantur, quam in partem id fiat, quæque sit motus quantitas. Ut itaque Theoria Planetarum stabiliri possit, omnia hæc elementa ex observationibus in terra institutis eruenda sunt. Quem in finem quæ methodi e cognitis meliores adhiberi possint, indicabimus.

482. Theoria motus veri terræ ex observationibus, quæ supponuntur in sole factæ, eadem est cum Theoria motus apparentis solis ex observationibus in terra factis. Verum quoniam Planetæ e terra visi obnoxii sunt parallaxi, quæ omni momento mutationem aliquam in eorum motus veros inducit, ex observationibus in superficie telluris institutis nequeunt elementa horum motuum

ea ratione determinari, qua id fieret, si e sole observari possent. Alia itaque via ineunda est, quam paucis exponemus.

483. Verum ante omnia illud hic observasse juvabit, quod cum motus Planetarum dependeant ab elementis magno numero combinatis, fere impossibile sit, ut omnia hæc elementa simul exacte determinentur calculo quopiam directo meliorum observationum, & in methodo aliqua Geometrica fundato. Hinc ut ad accurationem in elementorum determinatione perveniatur, supponendum est ab initio Problema jam solutum, debetque rudis aliqua determinatio sufficere, æstimatione quadam congrua facta, vel calculo prævio rem utcunque attingente, vel adhibitis elementis, quæ priores Astronomi suppeditarunt. Notitia hæc rudior licet, usui tamen est primo, ut generatim effectus elementorum singulorum inter se discriminentur; ut perspiciantur casus illi, in quibus singula maximum habent influxum, vel in quibus effectum habent tam exiguum, ut tanquam insensibilis tuto negligi possit; quandonam satis sit, elementum aliquod tantum obiter determinatum habere, ut observationi omnes eæ conditiones adsint, quas habere debet, antequam ad alias disquisitiones sit utilis, immo quas habere debet, dum ea utendum est. Præterea ex ea discitur, quo tempore, quave methodo observationes instituendæ sint, ut præ ceteris sive ad generalem elementorum inquisitionem, sive ad peculiarem aliquam adhiberi possint. Denique hæc notitia habet illud commodi, quod tum locus sit *positioni falsi*, quæ via est commodissima, & sæpe etiam tutissima in resolutione problematum magis complicatorum. Itaque ejusmodi elementa rudius determinata eodem modo adhibentur, tanquam vera essent, ad calculandos motus, qui inde eruuntur (ut nempe casus fert, exempli causa in disquisitione Theoriæ Planetarum, ad stabiliendam regulam aliquam Articuli præcedentis), ut postea cum observationibus maxime accuratis conferri possint. Prout jam calculus magis, minusve ab observationibus aberrat, ita Elementa quoque corriguntur novis positionibus factis, quæ priorem emendant calculum, ac observationibus reddent propiorem: ope elementorum ita correctorum iterum ac iterum quæruntur magis accurata: & quidem eæ correctiones jam in uno tantum, jam simul in pluribus adhibentur ex observationibus aliis, alio tempore, aliave methodo institutis. Atque hac ratione tentando varia, combinando, & calculando Theoria motuum cœlestium perficitur. Exempla quædam hujus rei Cap. II. Sect. I. jam dedimus; alia tum per decursum præsentis, tum toto sequente Capite occurrent.

Articulus IV.

De melioribus methodis stabiliendi elementa Theoriæ Solis, cum exemplis applicatis ad observationes, quæ ad determinationem horum elementorum sunt institutæ.

484. Postquam ars horologiaria, & theoria motus apparentis fixarum ad hunc perfectionis gradum perducta est, nulla melior est methodus positionem syderum accurate determinandi, quam si observetur eorum differentia in ascensione recta cum stella quapiam, quæ ceteris ad id commodior visa fuerit; & declinatio ex altitudine meridiana, vel ex differentia declinationis cum stella eadem, vel altera, quæ exacte jam sit observata, uti explicuimus Artic. VIII & IX. Cap. I. Sect. II. Verum cum Sol latitudinem nullam, quæ percipi posset, habeat, ejus ascensionem rectam observare satis est, ut tempus ejus transitus per puncta æquinoctialia & solstitialia in sua orbita reperiatur. Nam dum est in punctis æquinoctialibus, ejus ascensio recta est vel 0°, vel 180°; quando vero versatur in punctis solstitialibus, ascensio recta est vel 90°, vel 270°. Ut autem habeatur tempus, quo sol ad alia orbitæ suæ loca pervenit, uti ad puncta distantiæ mediæ, ad apsides (quarum altera, nempe aphelium terræ, dicitur *apogæum solis*; altera, terræ perihelium, vocatur *perigæum* solis) &c. ascensio solis recta observata reducenda est ad longitudinem (312): atque inde omnes dimensiones orbitæ solis, quæ est ellipsis a terra descripta, determinari poterunt, adhibitis iis methodis, quas Sect. I. Cap. II. descripsimus.

485. Itaque ut determinetur tempus revolutionis annuæ solis, via securissima est, si ex observationibus inveniantur duo momenta temporis, quibus sol eundem accurate situm respectu ejusdem stellæ fixæ habet, ita, ut inter utrumque hoc tempus magnus revolutionum numerus intercedat. Hoc temporis intervallum per revolutionum numerum divisum dabit tempus revolutionis annuæ.

In exemplo: die 26 Junii 1683, 0 h. 2′. 8″ tempore medio, Parisiis observavit De la Hirius differentiam ascensionis rectæ inter solem & stellam Sirium 2°. 34′, 48″, quæ reducta ad differentiam longitudinis fit 4°. 55′. 18″. Post 69 revolutiones die 27 Junii An. 1752, 0 h. 2′, 28″ tempore medio ad Caput Bonæ Spei observavi differentiam ascensionis rectæ inter solem & Sirium 2°. 0′. 2″½: e quo infero (habita ratione motus diurni solis 57′, 12″, & differentiæ meridianorum 1 h. 4′. 40″) solem fuisse in eodem situ

 respe-

refpectu Sirii die 26 Junii 16 h. 33′, 45″ tempore medio Parifiis. Intervallum 25202 d. 16 h. 11′, 37″ fi dividatur per 69, prodit tempus revolutionis annuae folis 365 d. 6 h. 8′. 52″.

486. Obferva I. Quod fi obfervationes correfpondentes, quibus fitus folis ad aliquam ftellam fixam refertur, fed aliis anni temporibus factae, feu fole exiftente in aliis orbitae fuae locis, eadem methodo inter fe comparentur, nequaquam eadem magnitudo revolutionis annuae obtinetur. Exempli caufa die 29 Decembris A. 1683, o h. 2′. 55″ tempore medio, De la Hirius invenit differentiam inter afcenfionem rectam folis, & ftellam *Aldebaran*, 145°, 43′, 4″, cui refpondet longitudo 147°, 21′, 10″; & 30 Decembris 1752, o h. 3′. 22″ tempore medio ad Caput Bonae Spei reperi differentiam afcenfionis rectae folis, & ejusdem ftellae, 145°, 21′, 44″: hac reducta ad longitudinem, & adhibito motu diurno folis 1°. 1′. 12″, differentia vero meridianorum eadem, qua in priore cafu, inveni folem tempore medio Parifiis 29 Decembris 1752, 16 h. 26′. 55″ habuiffe eundem refpectu *Aldebaran* fitum, quem An. 1683 habuit: intervallum inter utramque obfervationem eft 25202 d. 16 h. 24′. 0″, e quo revolutio annua eruitur 365 d. 6 h. 9′. 3″, nempe 11″ major, quam prius inventa.

487. Hoc difcrimen haud poteft ex integro attribui exiguis erroribus, qui in obfervationes femper folent irrepere: etenim collatis obfervationibus menfibus Majo, Junio, Julio, Augufto inftitutis, revolutiones annuae conftanter reperiuntur minores, quam ex obfervationibus menfibus Novembri, Decembri, Januario & Februario factis: ita quidem, ut folae obfervationes circa finem Martii & Septembris inftitutae (fole verfus puncta diftantiae mediae verfante) eandem largiantur revolutionis annuae quantitatem; differentia vero maxima fit, fi adhibeantur obfervationes circa finem Junii (fole in Apogaeo exiftente) & Decembris (dum fol verfus perigaeum eft) factae.

488. Ex hac inaequalitate autem evidenter confequitur, *folem non habere eandem velocitatem, dum ad idem punctum redit, in quo prius fuerat obfervatus*, id quod fieri nequit, nifi linea apfidum aliquantum moveatur, atque ita iisdem caeli punctis non eadem femper folis anomalia refpondeat. Et certe nemo non intelligit, quod fi femel fol in fuo apogaeo fit obfervatus, & poftea, abfoluta integra refpectu fixarum revolutione, foleque ad idem, in quo prius vifus fuerat, caeli punctum redeunte, reperiatur, apogaeum non amplius effe in eo puncto, fed aliquantum promotum fuiffe ultra illud, fol in hoc loco majorem debeat habere velocitatem, quam quae apogaeo convenire poffit, confequenter etiam ad illum citius per-

pervenire, quam si apogæum mansisset immotum, & hinc tempus revolutionis brevius fieri. Contrarium eveniret, si observatio fuisset in solis perigæo instituta; aut si loco motus juxta signorum ordinem, apogæum haberet motum retrogradum. Ex his itaque patet *Primo.* Superius relatas observationes ostendere, *lineam apsidum solis moveri juxta ordinem signorum: Secundo.* Observationes ad determinandam revolutionem annuam maxime idoneas esse, quæ instituuntur sole versante circa puncta distantiæ mediæ; aut vero accipiendam esse quantitatem aliquam mediam inter revolutiones deductas ex observationibus tam in apogæo, quam in perigæo solis eodem temporis intervallo factis: atque hæc methodus tutior est, quod sole prope apsides existente aliquot continuis diebus ejus motus sit uniformis, adeoque observationes uno die institutæ accurate reduci possint ad eas, quæ duos, tresve dies tardius vel citius sunt habitæ. Et ex supra allatis exemplis statuemus veram quantitatem revolutionis annuæ solis 365 d. 6h. 8′. 58″.

489. Observa II. Ex comparatione temporum reditus solis ad idem æquinoctium, ad idem solstitium, denique ad idem, qualecunque id sit, eclipticæ punctum, non solum inæqualis diversis anni temporibus revolutio eruitur, verum etiam universim minor, quam illa, quam paullo ante determinavimus. Itaque ad evitandas inæqualitates ob motum Apogæi solis, comparandæ sunt observationes vel institutæ, dum sol versabatur circa idem punctum distantiæ mediæ, vel circa duo æquinoctia autumnalia, & circa duo æquinoctia verna eorundem annorum, hoc est, ut primis duabus observationibus circa æquinoctia ejusdem anni institutis, etiam postremæ duæ eodem anno circa æquinoctia fiant, & observationes autumnales inter se comparentur, & verna cum verna: ut hac ratione accipi possit medium inter revolutionem prodeuntem ex observationibus circa autumnalia æquinoctia factis, & illam, quæ eruitur ex observationibus circa æquinoctia verna institutis. Simili ratione observationes etiam accipi possunt circa duo solstitia æstiva, & circa duo solstitia hyberna eorundem annorum factæ. Nobis satis fuerit, exemplum prioris casus addidisse. Die 28 Martii A. 1657 Cassinius observavit in magno Gnomone ad D. Petronii Bononiæ altitudinem veram centri solis 48°, 15′, 57″, tempore medio Parisiis 27 Martii 23 h. 28′. 56″. Subtracta hinc elevatione æquatoris 45°. 30′, 40″ remanet declinatio solis 3°, 15′, 17″, cui respondet 8°, 11′, 32″ ♈, quam longitudinem reduco ad 8°, 11′, 11″ ob rationem mox reddendam (vid. Observ. III). Ex observata die 28 Martii A. 1749, 0 h. 5′. 7″ tempore medio Parisiis differentia ascensionis rectæ Solis & Procyonis

(cujus ascensio recta tum erat 111°, 32′, 42″) 104°, 15′, 8″ reperio, longitudinem solis 8°, 11′, 11″ ♈ fuisse die 28 Martii 1749, 6 h. 10′. 50″ tempore medio. Intervallum temporis inter utramque observationem divisum per 92 dat revolutionem solis 365 d. 5 h. 48′. 43″. Erat autem sol in his observationibus admodum vicinus loco distantiae suae mediae.

490. Ex his complures sequelae magni momenti deducuntur. *Primo. Stabiliendae sunt tres species revolutionum in theoria solis;* Nempe revolutio *syderea*, quae est tempus reditus solis ad eandem stellam fixam, estque 365 d. 6 h. 8′. 58″. Dein revolutio *tropica*, hoc est, intervallum reditus solis ad idem punctum eclipticae, ad eundem colurum, ad eundem tropicum &c., cujus duratio est 365 d, 5 h. 48″, 43″. Denique revolutio *anomalistica*, tempus reditus solis ad eandem apsidem, quae est, ut mox videbimus, 365 d. 6 h. 16′. 0″.

491. *Secundo.* Quoniam sol ad idem punctum eclipticae 20′, 15″ temporis citius revertitur, quam revolutionem integram respectu fixarum absolvat, sequitur, coluros, & hinc puncta aequinoctialia & solstitialia, habere motum retrogradum respectu solis, arcu circitur 50″ per annum: ex quo fit, ut ascensione recta & longitudine a puncto aequinoctiali arietis computatis videatur sol jam integram descripsisse eclipticam, dum reipsa non nisi 359°, 59′, 10″ confecit. Hic motus punctorum aequinoctialium dicitur *praecessio aequinoctiorum.*

492. *Tertio.* Quia diversae anni tempestates juxta revolutionem tropicam contingunt, utpote quae (275) a transitu solis per puncta aequinoctialia, & solstitialia dependent, haec revolutio maxime idonea est, ut sit regula temporis civilis & politici, ideoque etiam ei calculi Astronomici accommodandi sunt, quamvis Astronomis revolutio syderea esset opportunior. Itaque ratio habenda est differentiae inter hasce revolutiones, ac supponendum, quod 360 gradus eclipticae respondeant tempori 365 d. 5 h. 48′. 43″, licet interea sol in caelo stellato non percurrat nisi 359°, 59′. 10″.

493. *Quarto.* Si stellae sunt reipsa immobiles, pariterque immobilia sunt aphelia, nodi, aliaque puncta orbitarum planetariarum; haec omnia respectu punctorum aequinoctialium 50″ singulis annis videri debent progredi juxta signorum ordinem.

494. *Quinto.* Et quia revolutio anomalistica solis sydeream 7′ temporis excedit, consequens est, ut apogaeum respectu fixarum motu annuo progrediatur 17″, & respectu punctorum aequinoctialium circiter 1′, 7″.

495.

495. *Sexto.* Motus apogæi solis indicio est, vi centrali terræ exiguam quamdam, sed constantem, mutationem alicunde accidere (176). In Sectione VI. Cap. I. Art. VI. causam physicam adferemus similis motus apogæi Lunæ; & Art. VIII. retrogradationis punctorum æquinoctialium.

496. Habitis jam temporibus diversarum solis revolutionum, omnes dimensiones ellipseos, quam describere videtur, inveniri possunt ope trium ejus longitudinum, quæ conditionibus magis faventibus, & cum cura observatæ sint, secundum methodum num. 150 expositam. Exempli causa collato sole cum Sirio ad Caput Bonæ Spei, longitudinem veram solis die 30 Septembris A. 1751, 23 h. 49′. 44″ tempore medio inveni 6^s, 7°, 51′, 47″$\frac{1}{2}$: die 30 Decembris o h. 3′. 0″ tempore medio 9^s, 8°, 29′, 55″; & die 28 Martii 1752, o h. 5′, 2″ tempore medio 0^s. 8°, 9′, 27″$\frac{1}{2}$. Ex his intuli, locum perigæi solis circa finem Anni 1751 fuisse 9^s. 8°. 45′, 40″; solem per illud transivisse 30 Decembris 5 h. 9′ tempore medio ad Meridianum Parisinum reducto; eccentricitatem esse partium æqualium 16814, quarum distantia media terræ a sole continet 1000000: & hinc maximam æquationem centri 1°, 55′, 36″$\frac{1}{2}$.

Intervallum a 30 Decembris Anni 1751, 5 h. 9′ tempore medio usque ad 1 Januarii meridiem A. 1752 tempore medio (est autem hic meridies apud omnes fere Astronomos *epocha* motus medii solis annis bissextilibus; pridianus vero annis communibus) est 1 d. 17 h. 51′, quo sol motu medio conficit 1°, 45′. 35″: his additis ad locum perigæi 9^s, 8°, 45′, 40″, habetur epocha motus medii pro initio Anni 1752, nempe 9^s. 10°, 31′, 15″.

497. Multis ejusmodi selectis observationibus ad similem calculum revocatis, tandem de veris Theoriæ solis elementis certi reddemur; & si quidem aliquod in iis discrimen occurrat medium quoddam inter ea, quæ reperimus, accipiemus.

498. Verum quia Astronomus quam minime elementa suæ theoriæ hypothesibus superstruere debet; decebit sane, ut positio lineæ apsidum, & epocha transitus solis per eandem, secundum methodum N. 109 explicatam; æquatio vero maxima cum eccentricitate juxta N. 143 & 145 investigetur. In exemplo, e comparatione solis cum Sirio ejus longitudinem die 30 Junii A. 1751, o h. 2′, 55″ tempore medio ad Caput Bonæ Spei inveni 3^s. 8°, 8′, 54″; & 30 Decembris o h. 3′, 0″ eadem erat 9^s. 8°, 29′, 55″: differentia 6^s, 0°, 21′, 0″, excedit 180°, 0′, 33″$\frac{1}{2}$, quos sol intra semirevolutionem anomalisticam describit, 20′, 26″$\frac{1}{2}$: jam vero motu diurno existente 57′, 12″, sol excessum illum percurrit intra 8 h. 34′, 45″; & ad 180°, 0′, 33″$\frac{1}{2}$ e loco, in quo 30 Decem-

bris

bris o h. 3′. o″ fuerat, pervenit die 30 Junii 8 h. 37′, 40″. Intervallum temporis eſt 182 d. 15 h. 15′, 20″, exceditque ſemirevolutionem anomaliſticam 17′, 20″: itaque 30 Junii 8 h. 37′, 40″ ſol nondum ad apogæum pervenerat: fiat: ut 4′, o″ (differentia inter velocitates ſolis in apogæo & perigæo) ad 57′, 12″ (velocitatem diurnam ſolis in apogæo); ita ſunt 17′, 20″ ad 4 h. 7′, 52″: hoc tempore adhuc opus erat, ut ſol apogæum attingeret: tranſiit ergo per apogæum die 30 Junii 1751, 12 h. 45′, 32″ ad Caput Bonæ Spei; Pariſiis vero 11 h. 40′, 52″ tempore medio: & quidem apogæo exiſtente in 3ˢ, 8°, 39′, 12″.

Si comparentur duæ longitudines ſolis ad diem 30 Septembris A. 1751, & 28 Martii 1752 N. 496 relatæ, reperitur, quod hoc intervallo ſol confecerit 180°, 17′, 40″ motu vero: motus medius, tempori inter obſervationes interjecto competens, erat 176°, 26′, 29″: ſemidifferentia 1°, 55′, 35″½ eſt æquatio maxima ſolis, cui tamen addendum eſt 1″, quoniam 28 Martii ſol paullo plus quam uno gradu aberat a puncto ſuæ diſtantiæ mediæ. Eſt igitur æquatio maxima 1°. 55″, 36″½; & eccentricitas 16814 partium.

499. Quod ad revolutionem anomaliſticam attinet, ea invenitur ex comparato tempore tranſitus ſolis per ſuum perigæum die 30 Decembris A. 1751, 5 h. 9′ tempore medio Pariſiis, cum tempore tranſitus ejusdem, deducto ex obſervationibus Norimbergæ a Walthero An. 1487 factis. Juxta has obſervationes (vid. Monum. Acad. Pariſ. A. 1749 pag. 53 & ſeqq.) die 12 Decembris, 12 h. 36′ tempore medio ſol aberat a perigæo 3°, 49′, 36″; & hinc perigæum attigit die 16 Decembris, 6 h. 5′ tempore ad meridianum Pariſinum reducto. Intervallum eſt 96428 d. 23 h. 4′, e quo revolutio una eruitur 365 d. 6 h. 16′, 9″.

Similiter ſol erat in apogæo A. 1503, die 16 Junii, 18 h. o′ juxta meridianum Pariſinum. Vidimus autem, ſolem etiam fuiſſe in Apogæo die 30 Junii 1751, 11 h. 41′: intervallum 90584 d. 17 h. 41′ dat revolutionem unam 365 d. 6 h. 15′, 55″: itaque accepto medio ſtatui poteſt 365 d. 6 h. 16′.

500. Obſerva III. Antequam obſervatio aliqua ſolis ad ſubtiliorem quampiam diſquiſitionem adhibeatur, rationem habere oportet duarum exiguarum inæqualitatum periodicarum, quarum cauſam & modum calculi Sectione VI. Cap. I. Art. VIII. & IX. adferemus. Appellantur vero *variatio*, ſeu *æquatio lunaris*, & *deviatio in longitudine*. Nos in omnibus obſervationibus præſente Articulo allatis utramque præ oculis habuimus.

501. Observa IV. Quod si Elementa Theoriæ solis modo determinata, & quæ veris admodum propinqua censeo, aliquantum discrepent ab iis, quæ Tabula N. 170 exhibet; causa est, quod hæc tabula constructa sit ex elementis Tabularum Astronomicarum D. Cassini.

Articulus V.

Methodus reducendi omnes observationes Planetarum in superficie Telluris institutas, ad eas, quæ eodem tempore fierent, si observator in sole collocaretur.

502. Supposita jam theoria solis, sive terræ, exacte cognita, ejus orbitæ dimensiones tanquam basis & fundamentum pro operationibus Geometricis assumi possunt, quæ necessariæ sunt ad inveniendas dimensiones orbitarum aliorum Planetarum, modo tempora eorum revolutionum interea dentur, quæ, qua ratione inveniantur, sequente articulo docebimus.

Sit enim locus terræ T in sua orbita TER, S sit sol, & angulus STM mensura observatæ differentiæ inter longitudinem solis & longitudinem planetæ cujusvis M e terra visi. Peracta integra revolutione Planeta ad eundem locum M redibit; sit vero tum terra in R, & observetur angulus MRS. Ex Theoria terræ notus est angulus TSR cum lateribus ST, SR, atque hinc innotescunt (Elem. 760) anguli STR, SRT, & latus TR. Itaque in triangulo TMR habetur latus TR, & anguli MTR, MRT, unde inveniuntur latera MT, MR. Denique in triangulo MST habentur MT, TS & angulus comprehensus MTS, ex quo reperitur SM distantia curtata solis a planeta in puncto projectionis orbitæ M, & angulus TSM, qui dat differentiam inter longitudinem terræ ♈ ST, & longitudinem planetæ e sole visi ♈ SM.

503. Quod si dein quæratur latitudo e sole visa, erit (478): ut sinus anguli MTS ad sinum anguli TSM; ita tangens latitudinis planetæ, observatæ e puncto T, ad tangentem latitudinis illius heliocentricæ.

504. Denique habebitur vera distantia planetæ a sole, si fiat (476): ut cosinus latitudinis heliocentricæ planetæ est ad sinum totum; ita distantia curtata SM ad distantiam quæsitam.

Longitudo, latitudo, & distantia eadem reperiri quoque potest ope trianguli SRM. Atque hac ratione construi potest tabula

plurimarum longitudinum & latitudinum e ſole viſarum, & ſimul diſtantiarum a ſole in totidem orbitæ punctis.

505. Spectato ſyſtemate Phyſico, in quo admittitur, actione mutua planetarum & cometarum tam in tempore revolutionum periodicarum, quam in poſitione lineæ apſidum, eo magis ſenſibilem variationem produci, quo eorum corpora & majora ſunt, & propius ad ſeſe accedunt, hæc methodus non ſatis tuta eſt ad ſtabiliendam theoriam Jovis & Saturni: ſed ad reliquos quod attinet, fidenter adhiberi poteſt.

ARTICULUS VI.

Diverſæ Methodi inveniendi elementa Theoriæ Planetarum ex obſervationibus in terra inſtitutis.

506. I. *Inveniendi tempus revolutionis periodicæ Planetæ.* Cognito circiter tempore revolutionis Planetæ, aſſumantur duæ obſervationes, quæ haberi poſſunt, maximo temporis intervallo a ſeſe remotæ, tumque inſtitutæ, cum planeta in eodem ſitu reſpectu ejusdem fixæ, ſimulque in oppoſitione (ſi planeta eſt ex ſuperioribus); vel in conjunctione (ſi eſt ex inferioribus) cum ſole fuit. His enim in caſibus videtur (396) in eodem loco eclipticæ, ac ſi e ſole ſpectaretur. Intervallum temporis inter obſervationes dividatur per revolutionum numerum, & habebitur tempus revolutionis periodicæ reſpectu fixarum; & quia omnis Planetarum motus a primo puncto Arietis computatur, facienda eſt hæc analogia: *ut* 360°, 0′, 0″ *ſunt ad tempus revolutionis periodicæ reſpectu fixarum; ita eſt motus harum in longitudinem tempore ejus revolutionis ad tempus ſubtrahendum a tempore revolutionis reſpectu fixarum, ut habeatur tempus revolutionis periodicæ reſpectu primi puncti arietis.* Sic tempore revolutionis Mercurii fixæ videntur progredi 12″, quibus in tempore reſpondent 1′, 10″, quæ ſubtrahi debent, ut obtineatur revolutio Mercurii reſpectu primi puncti Arietis, quæ invenitur 87 d. 23 h. 14′, 20″. Similiter reperitur revolutio Veneris 224 d. 16 h. 41′, 37″; Martis 686 d. 22 h. 19′. 0″; Jovis 4330 d. 12 h. 27′; & Saturni 10747 d. 2 h. 50′.

507. II. *Inveniendi lineam apſidum, epocham tranſitus planetæ per eandem, & eccentricitatem.* His utcunque cognitis, ſeligendæ ſunt tres obſervationes longitudinum & latitudinum planetæ, quarum prima a tertia ſemirevolutione circiter abſit, quæque inſtitutæ ſint, Planeta prope loca diſtantiæ ſuæ mediæ verſante; ſecunda vero, cum circa lineam apſidum erat. Oportet autem has longitudines & latitudi-

tudines helio centricas esse, sive observatæ sint tempore ad id præscripto, sive methodo N. 502 exposita sint reductæ. Praeterea reducendæ sunt longitudines ad orbitam planetæ, subtracto loco ☊ prope cognito, ut habeatur argumentum latitudinis, ad cujus cosinus logarithmum addendus est logarithmus cosinus latitudinis heliocentricæ planetæ: summa erit logarithmus cosinus arcus, qui, addito loco ☊, erit longitudo planetæ reducta. His ita præmissis cetera fiant juxta methodum, & exemplum N. 151 adductum.

508. Observa I. Si habeantur longitudines heliocentricæ ad orbitam reductæ tam circa utrumque distantiæ mediæ punctum, quam circa utramque apsidem; inveniri potest eccentricitas per æquationem maximam, ut N. 109, & 143, & linea apsidum per tempus semirevolutionis.

509. Observa II. Inventis omnium planetarum eccentricitatibus, eæ reducendæ sunt (170) ad scalam aliquam communem, in qua pro unitate assumatur distantia media terræ a sole.

510. III. *Inveniendi positionem lineæ nodorum.*

Prima methodus: Locus observatus planetæ, in quo caret latitudine, reducatur ad locum e sole visum, habebitur locus nodi alterutrius.

511. *Altera methodus*: Observatis tempore & loco conjunctionis, vel oppositionis planetæ cum sole, in quibus ejus latitudo fuit exigua; determinato item per observationem tempore, quo planeta nullam habuit latitudinem, adeoque in suo nodo fuit; ex theoria planetæ Numeris superioribus stabilita quæratur arcus verus in orbita, quem e sole visus percurrere debuit a sua conjunctione vel oppositione usque ad tempus transitus per nodum: hic arcus addatur vel subtrahatur a loco observatæ conjunctionis vel oppositionis: habebitur locus verus nodi.

512. IV. *Inveniendi inclinationem orbitæ planetæ ad planum eclipticæ.*

Prima methodus: Si habeatur series observationum latitudinum heliocentricarum planetæ circa limites versantis; maxima harum latitudinum determinabit inclinationem orbitæ.

513. *Altera methodus*: Quando sol est accurate in eodem eclipticæ puncto cum nodo planetæ, atque planeta 90° a sole distat, hoc est, si differentia longitudinum solis & planetæ e terra visi est exacte trium signorum; latitudo planetæ e terra visa est accurate æqualis inclinationi orbitæ. Cum enim terra in hoc casu existat in linea intersectionis planorum eclipticæ, & orbitæ planetæ; planum anguli, quem ad oculum observatoris efficiunt duo radii, quorum alter ad planetam, alter ad ejus punctum projectionis in ecliptica ducitur, est perpendiculare ad eam intersectionem. Igitur (Elem. 630) angulus ad oculum observatoris est tunc æqualis inclinationi plani utriusque.

514. *Tertia methodus:* Hinc deducitur tertia methodus, quæ in eo conſiſtit, ut quam exactiſſime obſervetur longitudo, & latitudo geocentrica planetæ, dum ſol per ejus nodum tranſit, modo ea latitudo minor ne ſit inclinatione circiter cognita. Tum fiat: *ut ſinus elongationis planetæ a ſole obſervatæ eſt ad tangentem ejus latitudinis geocentricæ pariter obſervatæ; ita eſt ſinus totus ad tangentem inclinationis orbitæ.*

Nam ſit N S T (fig. 70) linea nodorum planetæ, ſol in S, terra in T; P locus planetæ in orbita. Demiſſo perpendiculo P L ad planum eclipticæ, & ductis P T, L T, erit angulus P T L æqualis latitudini obſervatæ. Ducatur etiam P R perpendicularis ad lineam nodorum: erit angulus P R L (Elem. 630) æqualis inclinationi plani orbitæ ad eclipticam. Angulus R T L eſt elongatio planetæ a ſole, aut differentia longitudinum ſolis & planetæ. His ita conſtitutis in triangulo rectangulo R T L habetur: $r : TL = \textit{ſin}\, RTL : RL$; & in triangulo rectangulo P T L eſt: $r : TL = \textit{tang}\, PTL : PL$; quare eſt etiam $\textit{ſin}\, RTL : \textit{tang}\, PTL = RL : PL$. Habetur autem etiam in triangulo P R L, $RL : PL = r : \textit{tang}\, PRL$; ergo eſt $\textit{ſin}\, RTL : \textit{tang}\, PTL = r : \textit{tang}\, PRL$.

515. V. *Inveniendi, an nodi & aphelia planetarum ſint immobilia, an vero moveantur, & quantum.*

Ex obſervationibus, quæ haberi poſſunt, maxime a ſeſe diſtantibus, determinetur tempus duplicis tranſitus planetæ per ſuum aphelium, aut per eundem nodum. Si quotus emergens ex diviſione temporis inter utrumque tranſitum per numerum revolutionum planetæ reſpectu fixarum, eſt accurate æqualis tempori unius ejusmodi revolutionis, aphelium, & nodi ſunt immobiles; ſi minor eſt, aphelium, aut nodus, habent motum retrogradum; ſi major, aphelium vel nodus habent motum directum: atque differentia hujus quoti, & temporis revolutionis periodicæ reſpectu fixarum indicat quantitatem motus lineæ apſidum, vel nodorum.

516. Obſerva I. Cum obſervationes ab aſtronomis ſexto decimo ſæculo antiquioribus relictæ & rudes admodum, & paucæ ſint, difficillimum eſt decidere, utrum aphelia & nodi planetarum, aut qua quantitate, moveantur. Complures e modernis aſtronomis ea ſupponunt immobilia; quamvis generatim videatur iis tribuendus eſſe motus aliquis reſpectu fixarum valde lentus, & quidem apheliis directus, nodis retrogradus. Atque hæc res meretur ſane diligentem apud aſtronomos, & geometras diſquiſitionem. Interea en tabellam e Caſſinianis & Halleyanis contractam, in qua ſignum + denotat motum annuum directum; & ſignum — retrogradum reſpectu fixarum.

	Inclinatio orbitæ	Locus Aphelii pro A. 1700	Locus ☊ pro An. 1700.	Motus aphelii juxta Caſſini	Motus ☊ juxta Caſſini	Motus aphelii juxta Halley	Motus ☊ juxta Halley
	gr. min. ſec.	ſig. gr. min. ſec.	ſig. gr. min. ſe.	ſec.	ſec.	ſec.	ſec.
Saturni	2 30 36	8 28 8 39	3 21 13 29	+ 27	+ 6	+ 30	— 32
Iovis	1 19 30	6 9 26 42	3 7 29 53	+ 6	— 27	+ 22	— 0
Martis	1 50 54	5 0 35 20	1 17 17 25	+ 21	— 17	+ 20	— 12
Veneris	3 23 20	10 6 25 20	2 13 59 25	+ 35	— 17	+ 6	— 19
Mercurii	7 0 0	8 12 34 35	1 14 43 0	+ 29	— 0	+ 2	— 0

517. Obſerva II. Ubi certi fuerimus, tempus revolutionis anomaliſticæ ſenſibiliter differre a tempore revolutionis periodicæ planetæ reſpectu fixarum, quemadmodum ſuperius (506) factum eſt, revolutio anomaliſtica inventa reducenda eſt ad revolutionem reſpectu primi puncti Arietis, eaque deinceps utendum ad inveniendos motus medios planetæ correſpondentes motibus veris obſervatis, adhibita in praxi methodo generali N. 507 citata, & N. 151 expoſita; qua etiam pro ſole N. 496 uſi ſumus.

ARTICULUS VII.

De Lumine & figura Planetarum.

Ex obſervationibus ope tuborum opticorum inſtitutis, ſequentia tanquam indubitata habentur.

518. I. *Planetæ ſunt corpora opaca, ex ſe nullum lumen, ut ſol, habentia: ſed apparent nobis lucida, quia radios e ſole in eorum ſuperficiem incidentes ad nos remittunt*, fere quemadmodum ſpeculum ita radiis ſolaribus expoſitum, ut eos verſus nos reflectat, totum luminoſum apparet.

Nam Mercurius & Venus iisdem phaſibus obnoxii ſunt, quibus luna (vid. Sect. VI. Art. I), ſecundum diverſos aſpectus eorum cum ſole: videntur undique illuminati, ac rotundi, quando verſantur circa conjunctionem ſuperiorem cum ſole; decreſcunt in acceſſu ad conjunctionem inferiorem, in qua prorſus diſparent, ſaltem niſi magnam habeant latitudinem. Quin imo contingit quandoque, ut latitudine 16′ minore exiſtente per diſcum ſolis tranſeant, in quo tanquam maculæ rotundæ, & valde nigræ comparent. Si autem planetæ ita eſſent luminoſi de ſe, ut apparent, eorum lux vel confunderetur cum luce ſolis, & tunc in conjunctionibus ejusmodi videri non poſſent; aut diſtingueretur a ſolari per majorem, minoremve vivacitatem, aut per diverſum colorem.

 Simi-

Similiter Mars fubjectus eft phafibus fuis, quippe qui exacte rotundus apparet in oppofitione, in quadraturis vero fimilem prope figuram refert, ac luna tribus vel quatuor diebus ante aut poft plenilunium.

In Jove & Saturno ejusmodi phafes non videntur, quia hi planetæ tantum a nobis diftant, ut eodem fere modo eos videamus, ac fi in fole effemus. Verum cum evidenter conftet, eos umbram in partem a fole averfam projicere, quam fi eorum fatellites ingrediantur, difparent; & alias etiam iidem fatellites in difcum horum planetarum umbram projiciant, quæ difcerni poffit, dum inter eos & folem exiftunt; extra dubium eft, hos quosque planetas, eorumque fatellites corpora opaca effe.

519. II. *Planetæ funt corpora globofa non perfecte rotunda, fed aliquantum compreffa, ut eorum axis rotationis fit paullo minor diametro eorum æquatoris.*

Hæc figura non obfervatur nifi in Jove & Terra: reliqui enim planetæ fub angulis minoribus videntur, quam ut inæqualitas eorum diametrorum difcerni poffit fenfu. Ceterum facile oftendi poteft, quod fi fuperficies planetarum, feu tota, feu partem, fit obducta materia homogenea fluida, ut in fuperficie telluris funt maria, planetæ motum rotationis habere nequeant, quin verfus polos comprimantur, & ad æquatorem protuberent.

520. In hac enim hypothefi neceffe eft, talem effe figuram planetæ, & tota maffa fluidi, cujus fingulæ particulæ verfus centrum planetæ gravitant, maneat in æquilibrio. Et certe hæ particulæ per fluidorum naturam, cum facile cuivis impreffioni cedant, liberrimeque inter fe moveantur, ad eum fitum nituntur, quo viribus æqualibus in punctum gravitationis eorum fixum premant, fe feque mutuo circa illud in æquilibrio fuftineant. Quod fit jam planeta effet perfecte fphæricus, æquilibrium cum motu rotationis conjungi haud poffet; hoc enim motu fieret, ut diverfæ fuperficiei globofæ partes defcriberent circa axem fuum circulos eo majores, majoreque cum velocitate, quo a polis abeffent longius, & æquatori propiores. Unde ejusmodi partes refpective plus virium a fuis circulis abeundi acquirerent, & per tangentem a centro rotationis difcedendi. Hic autem nifus, & vis centrifuga earum verfus centrum planetæ gravitationem imminuit; & partes fuperficiei globi eo minus effent graves, quo forent a polis remotiores: hinc partes fluidæ prope æquatorem minore vi refifterent nifui partium prope polos ad centrum accedendi, ac propterea attollerentur aliquantum, fubfidentibus partibus polaribus, itaque figura comprimeretur, fluido a polis recedente, & ad æquatorem protuberante, aut terras, quæ circa æquatorem funt, inundante,

quo

quo itidem figura sphærica mutaretur. Ejusmodi inundatio ne fieret igitur, terram circa æquatorem notabiliter elevari oportuit, ac planetæ figuram versus polos depressam, ad æquatorem vero altius assurgentem dari, ut materiæ excessu gravitatis imminutionem, quam motus rotationis efficit, compensante, æquilibrium perstaret.

521. Hinc vero sequitur *primo*, quo motus rotationis est velocior, eo debere planetam versus polos magis subsidere: ita depressio Jovis est admodum sensibilis, cum ejus rotatio diurna breviore 10 horarum tempore absolvatur, licet is planeta excedat magnitudine terram 768 vicibus. Secundum exactissimas observationes ejus diameter æquatoris superat axem per polos transeuntem parte $\frac{1}{12}$.

522. *Secundo* infertur, præter æquatorem, & ejus parallelos in superficie planetæ non dari veros circulos, quicunque tandem ducti concipiantur, ut est Meridianus, verticales, horizon &c, quorum figura ad ellipsin accedit. Et Meridianus quidem est ellipsis, cujus axis minor per polos transit, major autem est in plano æquatoris, ejusque diametro æqualis.

523. *Tertio*, hinc 360 gradus æquales Meridiani in superficie sphæræ cæleſtis, non respondere 360 partibus æqualibus in ambitu Meridiani in superficie planetæ acceptis. Unde consequitur, v. g. in terra, arcus Meridiani terrestris respondentes arcubus æqualibus Meridiani cæleſtis non esse æquales inter se, sed minores esse in partibus telluris, in quibus superficies est magis convexa; majores vero, ubi ea planior est. Et hinc tandem deducitur: *Gradus Meridiani terrestris, respondentes gradibus meridiani cælestis, esse eo majores, quo ad polos propius acceditur; eo minores, quo ad æquatorem magis venitur.*

524. Mensuris accurate acceptis deprehensum est, gradui meridiani cæleſtis in terra sub circulo polari respondere circiter 57440 hexapedas; in latitudine 45° vero 57050; denique ad æquatorem 56750.

525. Saturni figura prorsus singularis est. Planeta hic videtur cinctus corpore quopiam luminoso formæ ellipticæ, cujus axis major idem semper manet, & ad planum orbitæ Saturni 30 fere gradibus inclinatus, estque ad diametrum globi Saturni circiter ut 9 ad 4; axis autem minor semper variat, cum jam magis panditur, jam contrahitur magis; hinc Saturnus, quando ejus longitudo heliocentrica est 20°½ ♊, apparet, uti fig. 65 exhibetur. Postea sequentibus 7½ annis (quarta nempe revolutionis parte) magis se se contrahit, circa quorum finem non nisi duabus ansis præditus videtur, ut fig. 66: paullo post solus Saturnus conspicitur, figura rotonda, velut fig. 67, longitudine scilicet ejus heliocentrica existente

ſtente 20°½ ♍; verum elapſo aliquo tempore anſæ denuo comparent, quemadmodum Fig. 68, quæ poſtea aperiuntur ſemper magis, uti prius contrahebantur, ut poſt quartam revolutionis partem Saturnus talis videatur, qualem Fig. 69 depingit. Ab hac phaſi axis minor decreſcit denuo, planeta redit ad anſas, quæ tandem diſparent, & Saturnum ſolum rotundum relinquunt, quod fit in longitudine heliocentrica 20°½ ♓. Inde rurſus redeunt anſæ, eaſdemque repetunt variationes, quæ ſitui diverſo orbitarum apparentium ſatellitum Saturni ſunt analogæ; hoc eſt, ellipſis lucida, quæ Saturnum comitatur, ad maximam ſuam amplitudinem pervenit, quando orbitæ ſatellitum itidem latiſſimæ ſunt; diſparet autem, dum orbitæ ſatellitum coincidunt cum lineis rectis, Saturno in earum nodis exiſtente. Porro dum latiſſima eſt hæc ellipſis, ratio axium eſt ut 5 ad 2.

526. Ex his phaſibus facile concluditur, Saturnum eſſe in centro corporis circularis tam tenuis, ut dum nobis aciem obvertit, videri nequeat. Planum iſtud Saturnum undique ambit, quin eum contingat, imo ſpatium valde notabile inter interiorem ſuam peripheriam, & corpus planetæ relinquit. Appellatur *annulus Saturni.* Omnes ejus phaſes eodem modo explicantut, ac viæ ellipticæ macularum in ſuperficie planetæ, vel orbitæ ſatellitum circa ſuum primarium, ſi e loco extra eorum orbitas ſito obſerventur, ut in ſectione ſequente videbimus.

CAPUT II.

Theoria Cometarum e Terra viſorum.

527. Motus Cometarum ut e terra ſpectantur, iiſdem ſunt obnoxii illuſionibus opticis, quibus curſus planetarum primariorum, quod fons & origo earum ſit duplex telluris motus, & ejus craſſitudo. Verum quod peculiare habent, & ſpectatores maxime allicit, eſt longus quidam tractus lucidus, qui eos plerumque comitatur, *caudaque* dicitur. Fere ſemper in partem ſoli oppoſitam dirigi ur, & tam longitudine, quam ſplendore creſcit, ut cometa ad ſolem propius accedit. Semper eſt major, dum cometa poſt conjunctionem in exigua latitudine factam e radiis ſolaribus emergit. Quando cometa magnam a ſole diſtantiam habet, fere cauda deſtituitur, & luce quadam nebuloſa cingitur, quæ facit, ne limbus diſci diſtincte cernatur, ſed confuſe, maleque terminatus videatur.

528. Jux-

528. Juxta opinionem maxime verisimilem, hæc cauda est vapor actione solis e corpore cometæ elevatus, ad cujus viciniam venit, postquam longo admodum tempore in maxima elongatione multum humiditatis contrahere potuit. Et reipsa observatur cauda eo longior, quo distantia perihelia cometæ minor est, & ex opposito. Sed cum hæc res solum ad Physicam pertineat, nil ultra in ea morabimur.

Articulus I.

De calculo motus Cometarum e terra spectati.

529. Elementa necessaria ad inveniendam longitudinem, & latitudinem Geocentricam cometæ pro tempore dato, sunt 1°. *Tempus, quo cometa fuit in perihelio*, quod pro *epocha* adhibetur. 2°. *Punctum illius orbitæ, in quo est perihelium.* 3°. *Distantia hujus puncti a sole in partibus, quarum unam continet radius orbis annui terræ.* 4°. *Situs nodi ascendentis orbitæ.* 5°. *Angulus inclinationis plani orbitæ cum plano eclipticæ.* His elementis cognitis, calculus cometarum vix differt a calculo planetarum, ut ex præceptis, quæ jam præscribemus, & exemplis manifestum erit.

530. Cometa A. 1739, qui erat retrogradus, transivit per suum perihelium die 17 Junii 1739, 10 h. 9′. 30″ tempore medio; locus perihelii in orbita cometæ erat in 3^s, 12°, 38′. 40″. Logarithmus distantiæ perihelii a sole erat 9.828388; nodus ascendens in 0^s, 27°, 25′, 14″. Denique inclinatio orbitæ 55°, 42′, 44″. Oporteat invenire locum verum e terra visum pro die 17 Aug. 1739, 14 h. 20′ tempore medio.

531. I. *Accipiatur intervallum inter transitum per perihelium, & tempus datum*, quod in præsente casu est 61 d. 4 h. 10′. 30″; *& horæ, minuta & secunda reducantur ad partes decimales diei.* Fient itaque 61.174 dies.

532. II. *Dimidium tripli logarithmi distantiæ perihelii subtrahatur a logarithmo intervalli inter tempus transitus per perihelium, & datum; residuum erit logarithmus ejusdem intervalli reducti ad tempus, seu dies elapsos a transitu per perihelium orbitæ in tabula generali post* N. 214 *calculatæ.* In nostro exemplo Logarithmus distantiæ perihelii est 9.828388; ejus triplum 9.485164; tripli dimidium 9.742582; Logarithmus de 61.174 est 1.786567, a quo si 9.742582 subtrahatur, relinquitur 2.043985, Logarithmus de 110.6587 die.

533. III. *Quæratur in tabula generali (N. 214) anomalia vera respondens tempori invento; addaturque ea (si cometa directus est) ad locum perihelii, si*

tempus datum ſequitur tranſitum per perihelium; at ſi præcedat, anomalia ſubtrahatur a loco perihelii. Quando cometa eſt retrogradus & tempus datum tranſitum per perihelium præcedit, anomalia vera addenda eſt loco perihelii; ſubtrahenda vero ab eodem, ſi tempus datum ſit poſterius tranſitu per perihelium: habebitur locus verus heliocentricus cometæ in ſua orbita.

Diebus 110 6587 reſpondent in tabula 90°, 21′, 38″, ſive 3^s. 0°, 21′, 38″, quæ a loco perihelii 3^s, 12°, 38′, 40″ ſubtrahenda ſunt, quia cometa eſt retrogradus, & tempus datum eſt poſterius tempore tranſitus per perihelium. Unde invenitur locus verus heliocentricus cometæ in ſua orbita 0^s, 12°, 17′, 1″.

534. IV. *Locus verus nodi aſcendentis ſubducatur a loco vero heliocentrico cometæ; habebitur argumentum latitudinis cometæ* (471).

Itaque ſi 0^s. 27°, 25′, 14″ ſubtrahatur a 0^s. 12°, 17′, 1″, argumentum latitudinis eſt 11^s. 14°, 51′, 47″.

535. V. *inferatur* (473): *ut ſinus totus eſt ad coſinum inclinationis; ita tangens argumenti latitudinis, eſt ad tangentem argumenti latitudinis in ecliptica accepti, & ad locum verum nodi addendi, ut obtineatur locus verus heliocentricus cometæ ad eclipticam reductus* (475), *ſive ejus longitudo vera e ſole viſa.*

Sic argumentum latitudinis reductum ad eclipticam eſt 11^s, 21°, 20′, 7″; & longitudo vera cometæ 0^s, 18°, 45′, 21″.

536. VI. *Fiat hæc analogia* (472): *ut ſinus totus ad ſinum argumenti latitudinis; ita eſt ſinus inclinationis orbitæ cometæ, ad ſinum ejus latitudinis e ſole viſæ.*

In noſtro exemplo itaque latitudo cometæ e ſole viſa eſt 12°, 27′, 34″, & quidem auſtralis, cum cometa verſetur in ſex ſignis poſterioribus ſui argumenti latitudinis (458).

537. VII. *Calculetur verus locus ſolis, inveniaturque ejus diſtantiæ a terra logarithmus: ab illo ſubtrahantur ſex ſigna, ut ſciatur locus verus telluris e ſole viſus; accipiatur differentia inter longitudinem veram heliocentricam cometæ, & longitudinem terræ e ſole viſam: hæc differentia dabit angulum ad ſolem inter terram & cometam, qui etiam angulus* Commutationis *dicitur.*

In exemplo aſſumto, verus locus ſolis die 17 Auguſti, 14 h. 20′, eſt 4^s, 24°, 34′, 36″; & logarithmus ejus diſtantiæ a terra eſt 10.004966; itaque locus verus terræ & ſole viſus eſt 10^s, 24°, 34′, 36″: differentia a 0^s, 18°, 45′, 21″ dat angulum commutationis, ſeu angulum ad ſolem 1^s, 24°, 10′, 45″, ſive 54°, 10′, 45″.

538. VIII. Fiat (209 & 476): *ut quadratum coſinus dimidiæ anomaliæ veræ* (inventæ 533) *eſt ad factum ſinus totius in coſinum latitudinis cometæ e ſole viſæ; ita eſt diſtantia perihelii cometæ ad ejus diſtantiam curtatam.*

Ex hac analogia reperietur logarithmus diſtantiæ curtatæ noſtri cometæ 10.121813.

539. IX.

539. IX. *Accipiatur differentia inter logarithmum distantiæ curtatæ, & logarithmum distantiæ terræ a sole, & assumta hac differentia pro logarithmo tangentis alicujus, quæratur angulus competens huic tangenti* (Elem. 752); *ab eo subducantur* 45°; *residui logarithmus tangentis addatur ad logarithmum tangentis complementi anguli dimidii ad solem* (N. 537 reperti) : *summa erit logarithmus tangentis arcus addendi ad illud complementum, si distantia curtata cometæ a sole excedit distantiam terræ a sole; subtrahendi vero, si distantia cometæ est minor, quam distantia terræ : habebitur angulus elongationis, sive angulus ad terram inter locum solis, & locum geocentricum cometæ interceptus : ex quo facile deducitur longitudo cometæ e terra visa.*

Itaque ex 10.121813 subductis 10.004966, residuum 10.116847 est logarithmus tangentis 52°, 36′, 59″: hinc subtrahantur 45°; residui 7°, 36′, 59″ tangentis logarithmus addatur logarithmo tangentis 62°, 54′, 37″½ (complementi de 27°, 5′, 22″½, quod est dimidium anguli ad solem 54°, 10′, 45″): summa est logarithmus tangentis 14°, 39′, 3″, qui additi ad 62°, 54′, 37″½ (cum cometæ distantia excedat distantiam telluris a sole) efficiunt 77°, 33′, 40″½ sive 2^s, 17°, 33′, 40″½ pro angulo elongationis, sive angulo ad terram inter solem, & locum cometæ e terra visum. Hic angulus subtractus a loco solis e terra viso 4^s, 24°, 34′, 36″, dat longitudinem geocentricam veram cometæ 2^s, 7°, 0′, 55″½ pro die 17 Augusti 1739, 14 h. 20′ tempore medio.

540. X. *Fiat denique* (478): *ut sinus anguli ad solem* (N. 537 inventi) *est ad sinum anguli ad terram* (N. 539 reperti): *ita est tangens latitudinis cometæ e sole visæ* (& N. 536 inventæ), *ad tangentem ejus latitudinis e terra visæ.*

Hinc habetur: ut sinus 54°, 10′, 45″, est ad sinum 77°, 33′, 40″½; ita est tangens 12°, 27′, 34″; ad tangentem latitudinis cometæ geocentricæ 14°, 54′, 4″.

Articulus II.

Methodus determinandi omnia elementa theoriæ alicujus cometæ, ex observationibus in terra institutis.

541. Elementa Theoriæ cometarum in terra observatorum per methodum directam, & geometricam determinare, res est summæ difficultatis, tum quod eorum revolutio periodica sit incognita, cum etiam, quod non sæpius in conjunctione vel oppositione observari possint, utpote exiguo tempore visibiles. In

defectu itaque ejusmodi methodi necesse est ad *positionem falsi*, & *prolixum tentamen* recurrere.

Hinc collectis, quot haberi possunt, probis cometæ observationibus, diversa phænomena expendenda sunt, uti inæquales velocitates apparentes cometæ, ejus directio, magnitudo apparens disci, sive nuclei, varii gradus luminis, directio ac celeritas cometæ in oppositione vel conjunctione cum sole &c. Ex his conjectura facienda est *primo*, quo tempore cometa fuerit in perihelio; quod ex eo fere intelligi potest, quo cauda fuit lucidissima; quippe id observari consuevit paullo post transitum per perihelium: at vero, quantum licet, observationes institutæ circa perihelium, calculum ingredi non debent in methodo, quam explicamus: tunc enim distantiæ cometæ a sole non satis inter se differunt, ut vera elementa inveniri possint; sed ut veritas inventorum comprobetur, solum usum habent. *Secundo.* Conjectandum, utrum cometa e sole visus fuerit directus, an retrogradus. *Tertio.* An distantiæ cometæ tempore observationum, quas adhibere visum fuerit, sint respectu distantiæ mediæ terræ a sole (quæ tanquam scala communis omnium mensurarum cælestium assumitur) admodum magnæ, an valde exiguæ. Quin etiam æstimatio facienda est, quantæ eæ distantiæ fuerint. Et quamvis hæc postrema duo nostram conjecturam fefellerint fortassis, calculi tamen secundum methodum sequentem instituendi, mox id nobis indicabunt, idque solum incommodi lapsus ejusmodi habebit, quod operatio pro ejus quantitate prolixior sit futura. Transitus cometæ per oppositionem vel conjunctionem cum sole, mirum, quam calculum facilitet: sed extra hos duos casus, qui sane rari sunt, utendum est, si fieri possit, transitu per nodos.

Itaque *primo* vel cometa transivit per unum e suis nodis circa initium, aut versus finem suæ apparitionis: *secundo* vel transivit per aliquem nodum circa medium suæ apparitionis: *tertio* vel denique habuit toto tempore suæ apparitionis, quo observatus est, ejusdem nominis latitudinem.

Exemplum & calculus Casus I, dum cometa per suum nodum circa initium vel finem suæ apparitionis transivit.

542. Proponatur exempli loco cometa A. 1739, mensibus Majo, Junio, Julio & Augusto Bononiæ a D. Zanotti observatus. Ex historia observationum institutarum & eodem anno Bononiæ typis data, apparet, lumen cometæ, ejusque caudæ vivacissimum fuisse circa dimidium Junii; unde circa hoc tempus in perihe-

rihe-

rihelio fuiſſe debuit. En compendium obſervationum ad tempus medium, & meridianum Pariſinum reductarum:

		Longitudo	*Latitudo*	
Die 28 Maji	8 h. 48′	7°, 6′, ♋	27°, 9′	Borealis.
Die 25 Iulii	13 h. 59′	16°, 1′, ♊	2°, 27′	Borealis.
Die 27 Iulii	14 h. 8′	15°, 26′, ♊	1°, 3′	Borealis.
Die 2 Auguſti	13 h. 5′	13°, 34′, ♊	2°, 48′	Auſtralis.
Die 4 Auguſti	13 h. 12′	12°, 53′½ ♊	4°, 13′	Auſtralis.
Die 10 Auguſti	12 h. 49′	10°, 33′½ ♊	8°, 53′	Auſtralis.
Die 17 Auguſti	14 h. 20′	7°, 1′, ♊	14°, 57′	Auſtralis.

543. Cum cometa per ſuum nodum deſcendentem circa finem ſuæ apparitionis tranſiverit, interpolandæ ſunt obſervationes dierum 25, 27 Julii & 2 Auguſti, ut habeatur tempus & locus cometæ, in quo fuit ſine latitudine: reperitur autem id 29 Julii 1739, 8 h. 48′ tempore medio, in 14°, 54′ ♊. Calculetur pro hoc tempore locus verus ſolis: qui erit 4^s, 6°, 7′, 10″: hinc habetur elongatio occidentalis cometæ 51°, 13′, 10″. Diſtantia ſolis a terra eſt inito calculo 10148½ partium, quarum diſtantia media continet 10000.

544. Seligatur alia obſervatio ab iſta, quam haberi poteſt, maxime remota, & in qua ſimul latitudo cometæ e terra viſa fuit valde magna, uti v. g. diei 28 Maji. Iisdem operationibus reperitur locus ſolis 2^s, 6°, 56′, 10″; elongatio orientalis cometæ a ſole 30°, 9′, 50″; diſtantia ſolis a terra 10142 partium.

Intervallum temporis inter ſelectas has poſitiones eſt accurate 62 dierum.

545. His ita habentibus, invenienda ſunt per calculum elementa parabolæ, quæ has quatuor conditiones habet: *primo* ut tranſeat per duo puncta ex poſitionibus ſelectis determinata. *ſecundo* ut ſol ſit in ejus foco. *tertio* ut intervallo 62 dierum cometa poſſit deſcribere ejus arcum inter duo illa puncta interceptum, ſervatis legibus Capite III. Sect. I. ſtabilitis. *quarto* denique, ut præterea tranſeat per punctum determinatum ex tertia aliqua obſervatione, quæ quantum poſſibile, diſtet a duabus prius electis; v. g. per punctum, quod invenitur per obſervationem 17 Auguſti.

Hæc ut præſtentur, Schemate quodam calculus juvetur (vide Fig. 76): adſcribatur ex altera parte *Ortus*, *Occaſus* ex altera: ponatur ſol in S, fiat SK = 10142, erit K locus terræ 28 Maji. Super K S ad ortum conſtruatur angulus elongationis cometæ eo die SKM = 30°, 9′, 50″; ſuper eodem latere SK verſus occaſum fiat angulus KSL = 59°, 11′, motui ſolis a die 28 Maji usque ad 29 Julii; & SL = 10148½: erit L locus terræ pro 29 Julii.

lii. Super SL ponatur angulus versus occidentem SLN = 51°, 13′, 10″, quae est elongatio cometae pro eo die.

Quoniam cometa erat in perihelio circa dimidium Junium, ejus distantia a sole die 28 Maji debuit esse multo minor, quam die 29 Julii: hinc aestimatione ex conjectura facta determinentur distantiae curtatae cometae a sole pro his duobus diebus, & fiat SM = 5500 partibus scalae, quarum SK habet 10142, & SN = 10700. Quibus positis, en ut ulterius in calculo procedendum.

546. *Prima suppositio.* SM = 5500, & SN = 10700.

In triangulo SKM habetur SK = 10142, SM = 5500, & angulus SKM = 30°, 9′, 50″; quaeritur SMK ex hac analogia: *ut distantia curtata assumpta* SM, *est ad distantiam terrae a sole* SK; *ita est sinus anguli elongationis* SKM *ad sinum anguli ad cometam* SMK, qui reperitur 67°, 56′, 2″; unde angulus ad solem KSM debet esse 81°, 54′, 8″, & longitudo heliocentrica cometae 5^s, 15°, 2′, 2″, loco terrae K e sole viso in 8^s, 6°, 56′, 10″.

Ulterius quaeritur latitudo heliocentrica cometae sequente analogia (478): *ut sinus anguli ad terram* 30°, 9′, 50″ *est ad sinum anguli ad solem* 81°, 54′, 8″; *ita est tangens latitudinis e terra visae* 27°, 9′, 0″, *ad tangentem latitudinis visae e sole* 45°, 17′, 49″$\frac{1}{2}$.

His peractis invenitur radius vector, seu distantia vera cometae a sole, ope analogiae (476): *ut cosinus latitudinis heliocentricae* 45°, 17′, 49″$\frac{1}{2}$, *ad sinum totum; ita est distantia curtata* SM *ad distantiam veram cometae a sole in plano ejus orbitae:* quae reperitur 7818. 84.

547. Transeundum jam ad positionem 29 Julii; & habitis in triangulo SLN latere SL = 10148$\frac{1}{2}$, SN = 10700, & angulo SLN = 51°, 13′, 10″, analogia priore adhibita reperitur angulus SNL 47°, 40′, 42″$\frac{1}{2}$, indeque angulus ad solem LSN 81°, 6′, 7″$\frac{1}{2}$, adeoque longitudo heliocentrica cometae 0^s, 27°, 13′, 17″$\frac{1}{2}$.

548. Accepta differentia inter duas has longitudines heliocentricas (quae est 4^s, 17°, 48′, 44″$\frac{1}{2}$, seu 137°, 48′, 44″$\frac{1}{2}$) construitur triangulum sphaericum M*m*N (fig. 77.) ad M rectangulum, in quo latus MN est 137°, 48′, 44″$\frac{1}{2}$, arcumque eclipticae caelestis repraesentat, quem cometa e sole visus a die 28 Maji usque ad 29 Julii percurrit; latus vero perpendiculare M*m* est 45°, 17′, 49″$\frac{1}{2}$, quae est latitudo heliocentrica cometae die 28 Maji; arcus denique *m*N exhibet arcum circuli maximi sphaerae caelestis, quem cometa e sole spectatus in plano suae orbitae parabolicae intervallo utriusque observationis percurrere visus est. In hoc porro triangulo facile invenitur latus *m*N, si fiat (Trig. 63): *ut sinus totus ad cosinum lateris* MN, *seu motus cometae in longitudine heliocentrica intervallo utriusque temporis determinati; ita est cosinus lateris* Mm, *sive latitu-*

dinis

dinis heliocentricæ cometæ, ad coſinum lateris m N, *hoc eſt, motus cometæ in plano ſuæ orbitæ eodem intervallo temporis.* Reperitur 121°, 24′, 48″.

549. In plano quodam ſeparato conſtruatur ſequens figura (fig. 78): S*m* fiat = 7818. 84; SN = 10700, & angulus *m* SN = 121°, 24′, 48″. centris *m* & N, radiis *m* S & NS, deſcribantur duo arcus, ad quos ducatur tangens communis QR, & radii ad eam perpendiculares *m* Q, NR; erit QR directrix parabolæ quæſitæ. Dimittatur ad directricem perpendiculum SP, quod erit axis, reſpectu cujus quæritur poſitio angulorum ſeu anomaliarum verarum *m* SP, NSP, ex hac regula: *ad characteriſticam ſemidifferentiæ logarithmorum radiorum vectorum* S m, SN, *addantur* 10: *ſumma eſt logarithmus tangentis arcus* 45° *gradibus minuendi. Accipiatur logarithmus tangentis reſidui, & ab eo ſubtrahatur logarithmus tangentis quartæ partis anguli* m SN; *reſiduum eſt logarithmus tangentis arcus, cujus ſumma & differentia cum quarta parte anguli* m SN *dat dimidios angulos, ſeu anomalias veras quæſitas* m SP, NSP.

In exemplo: logarithmus de S*m* eſt 3.893142; logarithmus de SN, 4.029384; eorum differentia = 0.136242; ejus medietas = 0.068121: arcus, cui competit logarithmus tangentis 10.068121, eſt 49°, 28′, 31″: ab hoc ſubtractis 45°, reſidui 4°, 28′, 31″ tangentis logarithmus eſt 8.893582: ab hoc ſubducitur 9.767602, ſeu logarithmus tangentis de 30°, 21′, 12″, quæ eſt quarta pars de 121°, 24′, 48″; reſiduum 9.125980 eſt logarithmus tangentis de 7°, 36′, 45″$\frac{1}{2}$; cujus differentia a 30°, 21′, 12″ dat dimidium anguli minoris *m* SP (minor enim analogia vera ſemper adjacet minori radio vectori) 22°, 44′, 26″$\frac{1}{2}$; & ſumma 37°, 57′, 57″$\frac{1}{2}$, dimidium anguli NSP. Sunt itaque anomaliæ veræ *m* SP, NSP, 45°, 28′, 53″, & 75°, 55′, 55″.

550. Obſerva. Regula allata generalis eſt, ſeu perpendiculum SP cadat intra angulum NS*m*, ſeu extra illum. Demonſtratio habetur Monument. Acad. Reg. Scient. A. 1746. pag. 431. *

* *Nota verſoris*: ne Lectorem alio remittam, duo ſolum ex citatis Monumentis hic adferam, quæ author in ſuis *reflexionibus ſuper theoria cometarum* ibidem inſeruit: primum quidem, regulam hic loci (N. 549) præſcriptam, nil aliud continere, quam analogiæ a D. Nicollic repertæ ope logarithmorum executionem; eſt autem ea analogia ſequens: *ut ſumma radicum quadratarum duorum radiorum vectorum eſt ad differentiam earundem radicum; ita eſt cotangens* $\frac{1}{4}$ *anguli intercepti inter illos duos radios vectores, qui eſt ſumma vel differentia duarum anomaliarum verarum; ad tangentem* $\frac{1}{4}$ *anguli, qui eſt earum ſumma vel differentia.* Alterum eſt hujus ipſius analogiæ demonſtratio a Nicolliciana diverſa, quam ibidem pag. 429 & 430 author refert, eſtque ut ſequitur:

Sit a = $\frac{1}{4}$ ſummæ anomaliarum verarum, ſive angulorum quæſitorum; x = $\frac{1}{4}$ differentiæ; b = radio vectori majori; c = radio vectori minori; 1 = diſtantiæ in perihelio; *r* = radio tabularum ſinuum; *coſ* denotet coſinum; *s* ſinum; *t* tangentem; *cot* cotangentem. Anomalia vera major erit itaque 2a + 2x; minor 2a − 2x. Juxta ſeptimam

551. Quæratur diſtantia perihelii hujus orbitæ ex ſequente analogia: *ut quadratum radii eſt ad quadratum coſinus unius dimidiæ ex duabus anomaliis veris* (per præcedentem Articulum jam inventis); *ita eſt radius vector adjacens illi anomaliæ veræ ad diſtantiam perihelii* (209).

Sic logarithmus coſinus 22°, 44′, 26″½ eſt 9.964855; ejus duplum 9.929710 addatur logarithmo de S *m* 3.893142; habetur 3.822852 logarithmus diſtantiæ perihelii quæſitæ, quæ eſt 6650½ partium, quarum diſtantia media terræ a ſole eſt 10000; ſed quia hæc plerumque aſſumitur = 1, erit diſtantia perihelii 0.66505, cujus logarithmus eſt 9.822852.

552. E tabula generali N. 214. accipiantur dies diſtantiæ a perihelio reſpondentes anomaliis veris: reperientur 36.4781 dies pro 45°, 28′, 53″; & 77.1725 dies pro 75°, 55′, 55″½. Logarithmo eorum ſummæ 113.6506 addatur dimidium tripli logarithmi diſtantiæ perihelii: ſumma eſt logarithmus de 61.638 diebus: itaque (212) arcus parabolæ inventus non potuit percurri a cometa niſi tempore 61.638 dierum, cum debuiſſet deſcribi accurate intra 62 dies. Ex quo patet, primas duas diſtantias curtatas, quas ſuppoſuimus, dare parabolam, quæ ſolum duabus primis e quatuor conditionibus neceſſariis ſatisfacit. Itaque facta aliqua correctione in his diſtantiis alia quærenda eſt, qua tertia conditio impleatur; tandem ea reperietur, quæ omnes quatuor ſimul conditiones habet.

553. Igi-

---

analogiam, ut habeantur radii vectores, eſt $cos^2(a+x) : rr = 1 : b = \frac{rr}{cos^2(a+x)}$;

itaque $\sqrt{b} = \frac{r}{cos(a+x)}$; ſimiliter $\sqrt{c} = \frac{r}{cos(a-x)}$; & hinc $\sqrt{b} : \sqrt{c} = cos(a-x) : cos(a+x)$.

Eſt autem ex notis formulis ſummæ & differentiæ arcuum, quæ demonſtratæ habentur in pluribus tractatibus de conſtructione tabularum ſinuum, & a D. Mayer Volum. 2. Monum. Acad. Petropol. referuntur, $cos(a-x) : cos(a+x) = cos\,a \times cos\,x + s\,a \times s\,x : cos\,a \times cos\,x - s\,a \times s\,x$; ergo $\sqrt{b} : \sqrt{c} = cos\,a \times cos\,x + s\,a \times s\,x : cos\,a \times cos\,x - s\,a \times s\,x$. Et hinc $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{b} \times s\,a \times s\,x = \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x + \sqrt{c} \times s\,a \times s\,x$; & $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x = \sqrt{b} \times s\,a \times s\,x + \sqrt{c} \times s\,a \times s\,x$; & $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} = cos\,a \times cos\,x : s\,a \times s\,x = \frac{cos\,a}{s\,a} : \frac{s\,x}{cos\,x}$. Notum autem eſt, eſſe $\frac{cos}{s} = \frac{cot}{r}$: & $\frac{s}{cos} = \frac{t}{r}$, ex proportione, quæ eſt inter radium, ſinum, coſinum, tangentem, & cotangentem alicujus arcus: itaque erit etiam $\frac{cos\,a}{s\,a} : \frac{s\,x}{cos\,x} = \frac{cot\,a}{r} : \frac{t\,x}{r} = cot\,a : t\,x$. Unde denique habetur $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} = cot\,a : t\,x$.

Obſerva, analogiam ſeptimam, cujus in hac demonſtratione author mentionem facit, jam haberi hic N. 209; regulam vero inveniendi tempus, quæ in laudatis monumentis pag. 431. ab authore demonſtratur, pariter hic datam eſſe N. 202.

553. Igitur pro prima correctione ſupponatur, errorem inde provenire, quod diſtantia SM non ſit accurata, atque ideo ea augeatur 100 partibus, retenta SN = 10700. Interetur totus calculus in hac nova ſuppoſitione; prodibunt ſequentia.

554. *Secunda ſuppoſitio.* SM = 5600, & SN = 10700.

In hac hypotheſi longitudines heliocentricæ cometæ ſunt 5^s, $12°$, $38'$, $0''$; & 0^s, $27°$, $13'$, $17''\frac{1}{2}$. Latitudo 28 Maji eſt $45°$, $26'$, $32''\frac{1}{2}$. Logarithmus de S*m* 3.902083. Arcus *m*N $119°$, $58'$, $43''$. Anomaliæ veræ *m*SP, & PSN, $45°$, $32'$, $40''\frac{1}{2}$, & $74°$, $26'$, $1''\frac{1}{2}$. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.831591. Dies diſtantiæ a perihelio ex tabula 36. 541, & 74.448. Denique intervallum reductum eſt 62.039 dierum.

555. Ex his liquet, quod aucta SM 100 partibus, augeatur tempus 0.401 diei.

Hinc ad implendam tertiam conditionem, ſeu ad inveniendam parabolam, cujus arcus inter puncta determinata interceptus potuit intra 62 dies accurate deſcribi, quæratur: ſi 0.401 d. reſpondent 100 partibus; quot partes convenient tempori 0.362 d. quod deeſt in prima ſuppoſitione? reperientur $90\frac{1}{2}$. Unde fiat tertia ſuppoſitio, in qua ſumatur SM = $5590\frac{1}{2}$; & SN = 10700.

556. *Tertia ſuppoſitio.* SM = $5590\frac{1}{2}$, & SN = 10700.

Longitudines heliocentricæ reperiuntur 5^s, $12°$, $50'$, $53''$, & 0^s, $27°$, $13'$, $17''\frac{1}{2}$. Latitudo M*m* $45°$, $25'$, $54''$. Logarithmus de S*m* 3.901264. Arcus *m*N $120°$, $6'$, $24''$. Anomaliæ veræ $45°$, $32'$, $8''$; & $74°$, $34'$, $16''$. Dies correſpondentes 36.531, & 74.693. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.830802. Denique intervallum reductum 62.001, fere, ut requirit tertia conditio. Supereſt igitur, ut videamus, an hæc parabola ſatisfaciat quartæ conditioni; quod ſi ſit, problema ſolutum erit.

557. Hunc in finem determinentur omnia reliqua elementa orbitæ in tertia hac ſuppoſitione repertæ, quod citra difficultatem fit. Nam I. habetur nodus deſcendens in 0^s, $27°$, $13'$, $17''$, cum cometa in hac longitudine heliocentrica nullam habuerit latitudinem. II. Addita anomalia vera diei 29 Julii ad locum verum nodi, hoc eſt, additis $74°$, $34'$, $16''$, ad 0^s, $27°$, $13'$, $17''$, habetur locus perihelii in 3^s, $11°$, $47'$ $33''$. III. additis $\frac{3}{2}$ logarithmi diſtantiæ perihelii ad logarithmum 74.693 d. numero præcedente repertorum obtinetur intervallum temporis reductum inter tranſitum cometæ per ſuum nodum, & tranſitum ejuſdem per perihelium 41.6374 dierum, & momentum tranſitus per perihelium die 17 Junii, 17 h. 30'. IV. denique in triangulo rectangulo Sphærico M*m*N (fig. 77) e cognitis M*m* = $45°$, $25'$, $54''$, & *m*N = $120°$, $6'$, $24''$,

 repe-

reperitur angulus M N m = 55°, 26′, 16″, qui æquatur inclinationi plani orbitæ cometæ ad planum eclipticæ (Trig. 9).

558. Ex his Elementis quæratur (431) locus verus geocentricus cometæ pro die 17 Augufti A. 1739, 14 h. 20′, qui reperitur 6°, 55′, 37″ ♊, cum ex obfervatione fuerit 7°, 1′, 0″ ♊. Error itaque eft in defectu 5′, 23″; adeoque parabola modo inventa non nifi primis tribus conditionibus fatisfacit.

559. Quare ut habeatur parabola, quæ quartam quoque conditionem impleat, nova fiat fuppofitio; fcilicet, primam diftantiam S M fuiffe ab initio recte affumptam 5500 partium, erroremque profluxiffe e fecunda S N, quæ propterea 100 partibus augeatur, & totus calculus refumatur.

560. *Quarta fuppofitio.* S M = 5500, & S N = 10800.

In hac pofitione longitudines heliocentricæ funt 5^s, 15°, 2′, 2″; & 0^s, 27°, 47′, 4″. latitudo M *m* 47°, 17′, 49″½. Logarithmus de S *m* 3.893142. Arcus N *m* 121°, 6′, 2″. Anomaliæ veræ 44°, 49′, 57″; & 76°, 16′, 5″. Dies correfpondentes 35.8365; & 77.8022. Logarithmus diftantiæ perihelii 9.824898. Intervallum temporis reductum 61.068. dierum.

561. Hinc vero colligitur, fi præfens fuppofitio cum prima conferatur, ex aucta SN 100 partibus, creviffe intervallum 0.430 diei. Unde fiat: ut 0.430 funt ad 100; ita 0.362 ad 84. Oportebat itaque affumere S N = 10784 partium, ut obtineretur intervallum temporis accurate 62. dierum.

562. *Quinta fuppofitio.* S M = 5500, S N = 10784.

Longitudines heliocentricæ 5^s, 15°, 2′, 2″; & 0^s, 27°, 42′, 25″. Latitudo M *m* 45°, 17′, 49″½. Logarithmus de S *m* 3.893142. Anomaliæ veræ 44°, 55′, 54″; & 76°, 12′, 43″. Dies correfpondentes 35.934; & 77.697. Logarithmus diftantiæ perihelii 9.824588. Intervallum temporis reductum 61.999, idem proxime, ac quod tertia conditio requirit.

Alia elementa, ut fupra, (557) in hac orbita determinentur. Invenietur ☋ in 0^s, 27°, 42′, 25″. Perihelium in 3^s, 13°, 55′, 8″. Tempus tranfitus per perihelium die 16 Junii, 23 h. 23′. Inclinatio orbitæ 56°, 8′, 44″.

Ope horum elementorum reperitur locus cometæ geocentricus pro die 17 Augufti, 14 h. 20′ in 7°, 8′, 42″ ♊; qui locum obfervatum excedit 7′, 42″. Unde nec hæc nova parabola fatisfacit conditioni quartæ.

563. Supponatur itaque, correctiones factas in diftantiis affumtis SM & S N effe proxime proportionales differentiis inter calculum duarum orbitarum repertarum, & obfervationes, inferaturque

que: *Ut summa errorum, seu differentiarum inter utrumque calculum & observationes*, 5′, 23″ + 7′, 42″, *est ad errorem orbitæ ex tertia suppositione inventæ* 5′, 23″; *ita sunt* 90½ & 84 *seu correctiones factæ in distantiis* SM & SN, *ad* 36¾ & 34, *hoc est, ad correctiones faciendas, ut obtineatur parabola omnibus quatuor conditionibus prædita.*

564. Illud autem hic observandum, quod si uterque error esset in eandem partem, hoc est, si uterque consisteret in defectu, vel uterque in excessu, pro primo analogiæ termino non summa, sed *differentia errorum* adhibenda esset.

565. Ut jam repertæ correctiones debite applicentur, facile ex comparatione utriusque calculi cum observationibus apparet, SM esse in tertia suppositione justo majorem, & in quinta justo minorem assumtam. Igitur ex 5590½ subtrahendæ sunt partes 36¾; & ut intervallum temporis semper maneat accurate 62 dierum, ad SN in tertia suppositione addendæ sunt partes 34: ut denique pro veris distantiis curtatis cometæ a sole sumantur SM = 5553¾ & SN = 10734. Hinc iterum totus resumatur calculus.

566. *Sexta suppositio.* SM = 5553¾, SN = 10734.

Inveniuntur longitudines heliocentricæ 5ˢ, 13°, 42′, 15″; & 0ˢ, 27°, 25′, 14″. Latitudo M*m* 45°, 23′, 9″. Logarithmus de S*m* 3.898045. Arcus *m*N 120°, 30′, 20″. Anomaliæ veræ 45°, 16′, 54″; & 75°, 13′, 26″. Dies correspondentes 36.280; & 75.872. Logarithmus distantiæ perihelii 9.828388. Intervallum temporis reductum 62 dierum.

Ex his deducuntur vera elementa Theoriæ cometæ; nempe locus ☊ in 6ˢ, 27°, 25′, 14″. Locus perihelii in 3ˢ, 12°, 38′, 40″. Transitus per perihelium die 17 Junii 10 h. 9′½ tempore medio; & inclinatio orbitæ 55°, 42′, 44″.

Suppositis hisce elementis, quæratur locus verus cometæ pro die 17 Augusti, 14 h. 20′: & quia reperitur (540) in 7°, 0′ 55″½ ♊ cum latitudine Australi 14°, 54′, 4″, quæ ab observatis parum differunt, quartæque conditioni sunt conformia, problema resolutum censeri debet.

567. Observa I. Inventa parabola, quæ proxime congruat cum tribus positionibus selectis cometæ, inutilis foret labor, aliam, quæ exacte iis conveniat, quærere. Etenim tres observationes, quæ adhibentur, vel supponuntur accuratissimæ, vel tantum vero proximæ? si primum, impossibile est reperire parabolam, quæ cum positionibus observatis perfecte congruat, cum loca illa revera sint in ellipsi: si alterum, casui tribuendum est fortuito, si quis in talem incidat parabolam, quæ exacte respondeat observationibus:

bus: immo eadem parabola cum aliis obſervationibus cometæ omnibus haud quaquam accurate congrueret.

568. Obſerva II. Utile eſt, ab initio calculum radiorem quinque primarum ſuppoſitionum inſtituere neglectis ſecundis minutis, & fractionibus, ac diſtantiis SM, SN quingentis, imo mille partibus mutatis, ut diſtantiæ curtatæ ita veris propinquæ obtineantur, ut tum demum calculus novus primarum quinque ſuppoſitionum ineatur, diſtantiis his non plus, quam 60 vel 100 partibus mutandis, ſecundorum etiam, & fractionum ratione habita, ut vera orbita reperiatur.

Examen ſecundi & tertii Caſus.

569. In ſecundo & tertio caſu eadem accurate methodus, quæ in primo, adhibenda eſt, idque ſolum eſt diſcriminis, quod calculi paullo longiores fiant. Præterquam enim, quod obſervationes eæ ſeligendæ ſint, quæ maxime a ſe diſtent, in his duobus caſibus aliæ adhiberi nequeunt, quam in quibus habetur longitudo & latitudo geocentrica cometæ. Hinc *primo* ex duabus diſtantiis curtatis, quæ aſſumuntur, calculandæ ſunt utraque longitudo, & utraque latitudo heliocentrica cometæ cum ſuis diſtantiis S*m*, S*n* a ſole in plano orbitæ.

570. *Secundo.* Loco trianguli ſphærici M*m*N (fig. 77) conſtruenda figura (fig. 79 & 80), in qua circulus PEC repræſentet circulum latitudinis, EC eclipticam, P ejus polum, M longitudinem heliocentricam cometæ in prima obſervatione, N eandem longitudinem in ſecunda obſervatione. Præterea ducendi ſunt circuli latitudinis PM, PN, in quibus accipiendi ſunt arcus M*m* æqualis latitudini heliocentriæ cometæ in prima obſervatione, & N*n* æpualis latitudini in obſervatione ſecunda. Tandem per puncta *m* & *n* deſcribendus eſt circulus maximus O*m* *n*B, qui exhibet veram orbitam cometæ, cujus nodus in D, inclinatio angulus CDB. Itaque in triangulo ſphærico *m*P*n*, in quo nota ſunt latera P*m*, P*n*, æqualia complementis utriusque latitudinis, & angulus comprehendit *m*P*n*, æqualis differentiæ duorum locorum heliocentricorum cometæ (quippe quem menſurat arcus MN), invenietur (Trig. 124) latus *mn*, menſura anguli ad ſolem inter duo loca cometæ in ſua orbita, quocum etiam conſtruetur figura ſimilis 78ª, calculus quoque eodem modo inſtituetur, ut N. 549 & ſequentibus.

571. *Tertio.* Peracto calculo trium primarum ſuppoſitionum, dum quæruntur elementa reliqua orbitæ, ut N. 557, ut obtineatur nodus, in triangulo *m*P*n* (cujus tria latera & angulus ad P nota

nota ſunt) quæratur angulus nodo propior, ut P *n m*. Tum in triangulo *n* N D ad N rectangulo, habito angulo N *n* D, & latere N *n*, inveniatur latus N D, ut ſciatur differentia inter longitudinem cometæ in N, & locum nodi, qui adeo facile determinabitur. Ut porro locus perihelii innoteſcat, reperiatur in triangulo N *n* D hypotenuſa *n* D, quæ eſt arcus inter nodum, & locum verum cometæ in ſua orbita. Jam vero ex calculis figuræ 78 habetur anomalia vera cometæ pro tempore, quo fuit in puncto *n* ſuæ orbitæ, hoc eſt, habetur arcus ejus diſtantiæ a perihelio, ex quo deducitur facile diſtantia nodi a perihelio, & conſequenter poſitio perihelii. Denique invento angulo *n* D N ejusdem trianguli rectanguli, habetur inclinatio orbitæ.

Obſervanda circa Tabulam ſequentem.

Sequens tabula compendio complectitur, quidquid certi habetur de cometis, atque e ſcriptis diverſorum Aſtronomorum eſt excerpta. Viginti ſeptem primi cometæ (exceptis, qui ſunt viſi A. 1533, 1593, 1678) ab Halleyo calculati, ut etiam ex ejusdem cometographia deſumpti fuerunt. De illis qui apparuerunt A. 1723, & 1737, calculum inivit Bradleyus. Viſos A. 1533, 1678, & ſecundum A. 1748 habemus a Struyckio; ſecundum A. 1743 a Klingenbergio, & primum A. 1748 a Maraldo. Reliquorum calculum ego inivi. Sed non eadem in horum elementis eſt accuratio & certitudo, utpote cum plures, & maxime primi ſex, rudius ſint obſervati; quorumdam vero theoria, uti Annorum 1593, 1699, 1702, & utriusque Anni 1743, ac ſecundi A. 1748. ex obſervationibus brevi temporis intervallo habitis deducta ſit. Verum longum foret, omnia iſthic in particulari diſcutere.

Tabula Elementorum Theoriæ Præcipuorum Cometarum, qui ad præſens uſque tempus obſervati ſunt: Suppoſitis orbitis Parabolicis.

Annus apparitionis	Locus ☊				Inclinatio orbitæ			Locus perihelii				Logarithmus diſtantiæ perihelii	Tempus medium tranſitus per perihelium ad Meridiannm Pariſinum				Directio motus
	S.	G.	M.	S.	G.	M.	S.	S.	G.	M.	S.		Menſis	dies	h.	m.	
1337	2	24	21	0	32	11	0	1	7	59	0	9.609236	Junii	2	6	34	Retrograd.
1472	9	11	46	20	5	20	0	1	15	33	30	9.734584	Februarii	28	22	33	Retrograd.
1531	1	19	25	0	17	56	0	10	1	39	0	9.753583	Auguſti	24	21	27	Retrograd.
1532	2	20	27	0	32	36	0	3	21	7	0	9.706803	Octobris	19	22	21	Direct.
1533	4	5	44	0	35	49	0	4	27	16	0	9.307068	Junii	16	19	39	Retrograd.
1556	5	25	42	0	32	6	30	9	8	50	0	9.666424	Aprilis	21	20	12	Direct.
1577	0	25	52	0	74	32	45	4	9	22	0	9.263447	Octobris	26	18	54	Retrograd.
1580	0	18	57	20	64	40	0	3	19	5	50	9.775450	Novembris	28	15	9	Direct.
1585	1	7	42	30	6	4	0	0	8	51	0	10.038850	Octobris	7	19	29	Direct.
1590	5	15	30	40	29	40	40	7	6	54	30	9.760882	Februarii	8	3	54	Retrograd.
1593	5	14	15	0	87	58	0	4	26	19	0	9.949926	Julii	18	13	47	Direct.
1596	10	12	12	30	55	12	0	7	18	16	0	9.710058	Auguſti	10	20	4	Retrograd.
1607	1	20	21	0	17	2	0	10	2	16	0	9.768490	Octobris	26	3	59	Retrograd.
1618	2	16	1	0	37	34	0	0	2	14	0	9.579498	Novembris	8	12	32	Direct.
1652	2	28	10	0	79	28	0	0	28	18	40	9.928140	Novembris	12	15	49	Direct.
1661	2	22	30	30	32	35	50	3	25	58	40	9.651772	Januarii	26	23	50	Direct.
1664	2	21	14	0	21	18	30	4	10	41	25	10.011044	Decembris	4	12	3	Retrograd.
1665	7	18	2	0	76	5	0	2	11	54	30	9.027309	Aprilis	24	5	24	Retrograd.
1672	9	27	30	30	83	22	10	1	16	59	30	9.843476	Martii	1	8	46	Direct.
1677	7	26	49	10	79	3	15	4	17	37	5	9.448072	May	6	0	46	Retrograd.
1678	5	11	40	0	3	4	20	10	27	46	0	10.092724	Auguſti	26	14	12	Direct.
1680	9	2	2	0	60	56	0	8	22	39	30	7.787106	Decembris	18	0	15	Direct.
1682	1	21	16	30	17	56	0	10	2	52	45	9.765877	Septembris	14	7	48	Retrograd.
16,3	5	23	23	0	83	11	0	2	25	29	30	9.748343	Julii	13	2	59	Retrograd.
1684	8	28	15	0	65	48	40	7	28	52	0	9.982339	Junii	8	10	25	Direct.
1686	11	20	34	40	31	21	40	2	17	0	30	9.511883	Septembris	16	14	42	Direct.
1698	8	27	44	15	11	46	0	9	0	51	15	9.839660	Octobris	18	17	6	Retrograd.
1699	10	21	45	35	69	20	0	7	2	31	6	9.871570	Januarii	13	8	32	Retrograd.
1702	6	9	25	15	4	30	0	4	18	41	3	9.810165	Martii	13	14	22	Direct.
1706	0	13	11	40	55	14	10	2	12	29	10	9.629218	Januarii	30	4	32	Direct.
1707	1	22	46	35	88	36	0	2	19	54	56	9.934368	Decembris	11	23	39	Direct.
1718	4	8	43	0	30	20	0	4	1	30	0	10.011380	Januarii	14	23	48	Retrograd.
1723	0	14	16	0	49	59	0	1	12	52	20	9.999414	Septembris	27	16	20	Retrograd.
1729	10	10	32	37	76	58	4	10	22	40	0	10.629552	Junii	25	11	6	Direct.
1737	7	16	22	0	18	20	45	10	25	55	0	9.347960	Januarii	30	8	30	Direct.
1739	6	27	25	14	55	42	44	3	12	38	40	9.828388	Junii	17	10	9	Retrograd.
1742	6	5	38	29	66	59	14	7	7	35	13	9.884049	Februarii	8	4	48	Retrograd.
1743	2	18	21	15	2	19	33	3	2	41	45	9.921690	Januarii	10	20	35	Direct.
1743	0	5	16	25	45	48	20	8	6	33	52	9.716480	Septembris	20	21	26	Retrograd.
1744	1	15	46	11	47	5	18	6	17	10	0	9.347325	Martii	1	8	13	Direct.
1747	4	27	18	50	79	6	20	9	7	2	0	10.342128	Martii	3	7	20	Retrograd.
1748	7	22	52	16	85	26	57	7	5	0	50	9.924620	Aprilis	28	19	34	Retrograd.
1748	1	4	39	43	56	59	3	9	6	9	24	9.816410	Junii	18	1	33	Direct.

Articulus III.

De Calculo Cometarum in orbitis Ellipticis.

572. Fieri non poteſt, ut ex comparatione obſervationum, tempore unius ſolum apparitionis inſtitutarum, debita cum accuratione dimenſiones orbitæ ellipticæ cometæ determinentur; ſed ad hoc requiritur certum reditus intervallum, ut tempus periodicum haberi poſſit, e quo (170) quantitas axis majoris ellipſeos in partibus, quarum unitas eſt diſtantia media terræ a ſole, reperitur: ab hoc axe ſubtracta diſtantia perihelii (quæ eadem ratione, ac ſuperius in orbita parabolica quæritur), relinquitur diſtantia aphelii, qua data, eccentricitas innoteſcit. Poteſt etiam citra errorem ſenſibilem in orbita elliptica adhiberi inclinatio plani, & locus nodi aſcendentis repertus in orbita parabolica: atque hac ratione habentur omnia elementa neceſſaria, ut cometæ calculus ita inſtituatur, uti planetarum. Denique calculo cum obſervationibus collato, elementa adhibita corrigi poterunt, ut Theoria accuratior obtineatur. Verum operæ pretium non eſt, ut tabulæ peculiares pro ſingulis cometis conſtruantur, cum calculi longitudinum & latitudinum geocentricarum expedite fieri poſſint juxta methodum, & exemplum, quod jam ſubjiciemus.

573. E calculo Halley, elementa emendata cometæ A. 1682 ſunt - - - -. Revolutio periodica $75\frac{1}{2}$ annorum. Locus ☊ in 1^s, 20°, $48'$, $0''$. Inclinatio orbitæ 17°, $42'$. Diſtantia perihelii 0.5825. Diſtantia aphelii 35.1445. Eccentricitas 17.281. Locus verus perihelii 10^s, 1°, $36'$, $0''$. Tempus tranſitus per perihelium die 14 Septembris, 21 h. 22′ tempore medio, ad Meridianum Londinenſem. Quæritur locus cometæ pro die 29 Auguſti 16 h. 38′ tempore medio.

574. I. A logarithmo 360°, $0'$, $0''$ ſubtrahatur logarithmus 27575 dierum, ſive temporis revolutionis; habetur logarithmus motus medii diurni. Huic addatur logarithmus de 16 d. 4 h. 44′, ſeu 16.1972 dier. quod eſt intervallum inter tempus datum & tranſitum per perihelium: ſumma eſt logarithmus anomaliæ mediæ a perihelio computatæ. In exemplo poſito ea invenitur $12'$, $41''.25$ (ad ſecunda integra adhuc additur fractio decimalis duarum notarum, cum hic calculus valde accuratus eſſe debeat, quando anomalia media inventa non eſt plurium graduum).

575. II. Quæratur ab initio, quæ circiter eſſe debuerit anomalia vera, quæ inventæ mediæ reſpondeat. In hunc finem a logarithmo intervalli temporis ſubtrahantur $\frac{1}{2}$ logarithmi diſtantiæ perihe-

rihelii; residuum est (213) logarithmus numeri dierum, ope cujus in tabula generali N. 214 pro cometis in orbita parabolica constructa quaeratur anomalia vera correspondens: v. g. in nostro exemplo numerus dierum est 36.443, cui in tabula conveniunt 45°, 26′ (calculus hic rudius institui potest); e quo infertur, anomaliam veram quaesitam esse intra 45 & 46 gradus.

576. III. Assumatur ea anomalia 45° prima vice; postea 46°; utraque reducatur ad mediam (139), quae erit 12′, 36″.88; & 12′, 57″.67. E quo deducitur, proportione instituta, anomaliam veram, quae mediae 12′, 41″.25 respondet, esse 45°, 12′, 37″. Hac anomalia vera ad locum perihelii 10^s, 1°, 36′, 0″ addita, habetur longitudo cometae in sua orbita 11^s, 16°, 48′, 37″.

577. IV. Ope formulae ex iis, quae N. 140 allatae sunt, quaeratur distantia cometae a sole: tum vero insistendum erit praeceptis N. 471 & seqq. positis, ut obtineatur longitudo geocentrica 4^s, 18°, 13′, 40″; & latitudo borealis 25°, 48′, 50″.

SECTIO QUARTA.

Complectens Partem Alteram Astronomiae Solaris,

Sive

Explicationem legum motus diurni planetarum, ut e sole spectantur.

578. Quamvis omnia motus diurni telluris phaenomena fusius exposuerimus, idque methodo, quae facile cuivis alteri planetae accommodari potest; nihilominus, cum maximi momenti sit, ut accurate animo comprehendantur, quae si quis reipsa in sole constitueretur, oculis cernerentur, necessarium duximus, aliam hic loci eorundem phaenomenorum explicationem dare, quae fere nulla sui parte a priore dependeat. Praecipue vero illud ex ea enascetur commodi, ut rite intelligantur eclipses solis; theoria motus macularum, quae saepe in ejus superficie conspiciuntur, nec non in aliis planetis; diversa ratio, qua quodvis superficiei alicujus planetae punctum a sole illuminetur, indeque pendentes tempestatum vicissitudines, aliaque phaenomena tempore revolutionis periodicae emergentia.

579. Observator in sole positus, institutis per plures revolutiones annuas continua serie observationibus alicujus ad libitum electi planetae, cujus superficies distinctis maculis notata sit, v. g. Telluris; sequentia phaenomena extra omne dubium posita stabiliet, de quo-

quorum causa invenienda, motuumque legibus ad certas revocandis regulas deinceps agendum illi erit.

Articulus I.

De phænomenis generalibus motus diurni.

580. *Phænomenon* I. Lineæ, quas maculæ eodem tempore motu diurno Planetæ describunt, si eraum via in superficie, quæ disci instar plana apparet, notari supponatur, sunt parallelæ.

Ratio hujus obvia est. Globus in admodum magna distantia aliter apparere nequit, quam ut circulus planus; neque aliter circa axem suum volvi, quam ut singula ejus superficiei puncta describant circulos, quorum plana omnia ad axem sint normalia, adeoque inter se parallela.

581. *Phænomenon* II. Lineæ a maculis descriptæ plerumque curvæ apparent, versus disci limbos magis, quam circa medium, convexæ.

Ex hoc Phænomeno constat, *axem, circa quem Planeta vertitur, non esse ad planum suæ orbitæ annuæ perpendicularem*: talis enim si esset, lineæ omnes macularum essent rectæ inter se parallelæ. Nam in hoc casu omnes circuli a maculis descripti essent in planis parallelis ad planum orbitæ annuæ, in quo est centrum solis, consequenter oculus observatoris: & quia totus discus, aut diameter planetæ non nisi sub angulo aliquot secundorum videtur, evidens est, omnia circulorum a maculis descriptorum plana observatori apparitura talia, ut producta per ejus oculum transirent, adeoque omnes circulos instar rectarum suis diametris æqualium fore, secundum illud Optices principium, quod *oculus in productione plani figuræ cujusvis positus eam figuram videat ut lineam rectam æqualem dimensioni maximæ figuræ directe oculo obversæ*: nempe oculus in hoc situ partem solum perimetri figuræ videre potest, & nullo modo ejus superficiem planam.

582. *Phænomenon* III. Omnes curvæ macularum alicuius planetæ, versus unum idemque punctum cavitatem obvertunt.

Liquet, punctum istud debere esse unum e polaribus Planetæ, hoc est, alterutrum axis, circa quem movetur, extremum. Globo enim circa axem voluto, sola puncta extrema axis motu rotationis carent.

583. *Phænomenon* IV. Singulis annis circa 21 Junii lineæ macularum telluris fiunt prope medium parallelæ ad planum eclipticæ per dies plures. Versus limbum superiorem disci complures apparent

maculæ, quæ ſpeciem quamdam ellipſeos integræ *a*, *b*, *c*, (fig. 81) circa punctum fixum P (quod polus eſt (582), arcticus, vel borealis ab obſervatore dicendus) deſcribunt: quo fit, ut hæ maculæ nunquam in parte averſa Planetæ occultentur. Aliæ maculæ circa idem punctum polrae P deſcribunt portiones ellipſium *d*, *e*, *f*, eo majores ſemiellipſibus, quo polo P ſunt viciniores: unde maculæ eiusmodi ultra 12 horas in diſco ſunt viſibiles, & quidem eo diutius, quo polo P ſunt propiores. Ex oppoſito in parte inferiore diſci, portiones ellipticæ tanto magis deficiunt a ſemiellipſibus *h*, *i*, *k*, quo a polo P ſunt remotiores, & eadem ratione tanto 12 horis breviore tempore in diſco videntur maculæ, quæ eas deſcribunt.

584. *Phænomenon* V. Menſe Julio, & Auguſto ſequente, omnes hæ ellipſes quoad latitudinem contrahi videntur (fig. 82); primum quidem fere inſenſibiliter; poſtea admodum notabilis fit ea contractio. Præterea majorem ſemper ad planum eclipticæ inclinationem acquirunt; & polus P oblique ad limbum diſci accedit. Ellipſes *a*, *b*, *c*, quæ prius integræ videbantur, portionem ultra polum P ſitam in parte poſtica diſci abſcondunt ſucceſſive; & hinc etiam maculæ eas deſcribentes deſinunt eſſe ſemper viſibiles. Eodem modo portiones ellipticæ *d*, *e*, *f*, continuo deſcreſcunt, & ſemiellipſes fiunt, maculis, quarum ſunt ſemitæ, ſemper propius ad 12 horarum ſpatium, quo videri poſſint, accedentibus. At in parte diſci inferiore portiones *h*, *i*, *k*, augentur, ac ad ſemiellipſes accedunt, macularumque tempus, quo in diſco comparent, ad duodecim horas extenditur. Quin prope limbum infimum novæ ſucceſſive videntur maculæ, exiguas ellipſium portiones percurrentes, ut *l*, *m*, quarum dum longitudo creſcit, latitudo, ut ceterarum, contrahitur.

585. *Phænomenon* VI. Circa 23 ſeptembris (fig. 83) ellipſes partis ſuperioris diſci videntur adeo imminuta latitudine ad dimidias usque decreviſſe; & ellipſes partis inferioris decreſcente itidem latitudine usque ad dimidias auctæ, ut omnes evaſerint ſemiellipſes infinite parvæ latitudinis, aut potius ut cum axe ſuo majore congruant, conſequenter ſint rectæ axi majori æquales, parallelæ, & ad planum eclipticæ ſub angulo 23°, 28′, 20″, inclinatæ. Polus P attigit diſci peripheriam, & alter Q, qui in duobus præcedentibus phænomenis in parte averſa latebat, quique *antarcticus* ſeu auſtralis dicitur, itidem ad limbum extimum pervenit: conſequenter omnes telluris maculæ ſpatio duodecim horarum accurate factæ ſunt conſpicuæ.

586.

586. *Phænomenon* VII. Illico post diem 23 septembris, & per Octobrem ac Novembrem inclinatio linearum a maculis descriptarum ad eclipticam decrescit (fig. 84) ipsæque in portiones ellipticas abeunt, cavitatem polo Q obvertentes, qui oblique in anteriorem disci faciem progreditur, altero polo P sub eodem latente. Ellipses majorem semper acquirunt amplitudinem; & in parte inferiore eo magis excedunt semiellipses, quo sunt polo Q viciniores, ita ut *n*, *m*, *l* tandem integræ videantur, maculæque earum semper conspicuæ fiant; eæ vero, quæ percurrunt portiones *k*, *i*, *h*, eo diutius ultra 12 horas videntur, quo minus a polo antarctico sunt remotæ. Contrarium accidit portionibus partis disci superioris, quæ eo minores evadunt, maculis quoque tanto breviore temporis intervallo apparentibus, quo a polo Q magis distant, ut tandem *c*, *b*, *a*, ceteris remotiores, prorsus cum suis maculis occultentur.

587. *Phænomenon* VIII. Diebus aliquot 21 Decembris præcedentibus, ac sequentibus viæ macularum versus medium plano eclipticæ parallelæ apparent (fig. 85), omniaque situm oppositum obtinent ei, quo circa 21 Junii (583) videbantur: portiones ellipsium partis inferioris disci tanto sunt majores, quo in phænomeno IV minores fuerant. Ellipses *n*, *m*, *l*, 21 Junii invisibiles, nunc ex integro sunt conspicuæ; at *a*, *b*, *c* ex opposito totæ disparuerunt, eisque propinquæ *d*, *e*, *f* tanto magis deficiunt a semiellipsibus, quo 21 Junii magis excesserant: tempus denique, quo maculæ sunt visibiles, magnitudini portionum ellipticarum, quas describunt, est proportionale.

588. *Phænomena* IX, X, XI. Mensibus Januario & Februario (fig. 86) omnes ellipses contrahuntur, & in partem oppositam priori inclinantur. Polus Q versus circumferentiam redit. Ellipses partis disci inferioris minuuntur, polo Q proximæ cessant integræ videri; quæ vero in parte superiore sunt, augentur: paucis, omnia ad eum situm tendunt, quem Phænomeno IV habebant. Et reipsa 20 Martii (fig. 87) omnes ellipses cum axe suo majore coincidunt, adeoque mutantur in rectas parallelas, ad planum eclipticæ sub eodem angulo, nempe 23°, 28′, 20″, inclinatas, uti erant 23 Septembris, nisi quod inclinatio in alteram partem fiat. Omnes itaque maculæ per 12 horas tunc sunt visibiles, & poli Q & P in limbo disci existunt. Denique Mensibus Aprili & Majo (fig. 88) hæ rectæ in ellipses minus ad telluris orbitam inclinatas abeunt, cavitate polo P observa, qui in discum redit, altero Q sub eodem se occultante, sicque omnia restituuntur successive situi 21 Junii, Phænomeno IV descripto; tum rursus eodem ordine phænomena in orbem redeunt.

589. Omnia hæc phænomena in aliis planetis eveniunt, illo cum diſcrimine, quod ab annua cujusque revolutione dependeant: & in ſimilibus poſitionibus ellipſes in omnibus non æque notabiliter pandantur.

ARTICULUS II.

De iis, quæ ex allatis phænomenis immediate conſequuntur: de diebus, ac noctibus, eorumque diverſa longitudine: de viciſſitudine tempeſtatum Anni: de ſolſtitiis & æquinoctiis.

590. Ut Theoria generalis præcedentium phænomenorum conſtituatur, obſervator noſter ſupponet, planetas eſſe corpora diverſæ indolis a ſole, ut quæ per ſe luce careant, atque ſolum reflexa ſolari ſint conſpicua, quin etiam habitata: hinc ſupponet etiam ſingulas maculas in eorum ſuperficie apparentes, eſſe loca peculiari attentione digna, uti urbes quasdam &c. Hinc deducet

591. *Primo.* Incolas cujusvis maculæ luce carere, ſive habere noctem, toto eo tempore, quo maculæ in parte diſci a ſole averſa morantur; contra vero illuminari, ac habere diem, quamdiu maculæ in diſco ſunt viſibiles.

592. *Secundo.* Eo momento diem illis incipere, & noctem finiri, quo quævis macula ad limbum appellit, ut anteriorem diſci partem percurrat; & diem expirare, ſimulque inchoari noctem, quo macula iterum ad extimum limbum pervenit, ut ſub diſcum redeat.

593. *Tertio.* Dum uterque polus ſimul in peripheria diſci verſatur (fig. 83 & 87) habitatores planetæ habere diem per ſemirevolutionem diurnam, & per alteram ſemirevolutionem noctem: atque adeo tempora, quibus id continget, dicentur *æquinoctia planetæ.*

594. *Quarto.* Dum non niſi unus polus in diſco illuminato exiſtit, incolas ei vicinos habere diem perpetuum; qui vero circa polum oppoſitum habitant, continuam noctem.

595. *Quinto.* Diem eſſe eo longiorem, & noctem eo breviorem, quo planeticolæ polo illuminato propiores ſunt, & a latente in parte obſcura remotiores. Hinc illi, qui ab utroque polo æqualem habent diſtantiam, diem nocti æqualem toto anno habent. Hinc etiam *circulus æquinoctialis*, ſive *æquator planetæ* vocatur circulus maximus, qui inter utrumque polum per medium tranſit: in figura 81 & ſequentibus literis T*g* R notatur.

596. *Sexto.* Dies longiſſimos (conſequenter noctes breviſſimas) reſpectu incolæ non conſtituti in circulo æquinoctiali eſſe tunc, quan-

quando polus ei vicinior eſt circa mediam viam, quam per partem illuminatam diſci tranſiens deſcribit, ac maculæ, quam habitat, ſemita orbitæ planetæ parallela fit circa medium, ceſſatque portio elliptica augeri, ut iterum decreſcat. Ex oppoſito dies breviſſimos eſſe, dum polus vicinior in parte diſci latente mediam viam confecit, ſemita maculæ circa medium parallela ad orbitam, & portione ellipſis ceſſante minui, indeque augenda. Tempora, quibus hæc eveniunt, *ſolſtitia* appellantur; & *æſtivum* quidem, dum dies eſt longiſſima, calore reſpectu ejus habitatoris maximo, utpote qui tamdiu radiis ſolaribus, parum obliquis, eſt expoſitus: *hybernum* vero, quando dies eſt breviſſima, quippe cum radii ſolis & brevi tempore, & magis oblique ad incolam illum pervenire poſſunt, quo fieri debet, ut aër multum refrigeretur. *Æquinoctium vernum* dicitur, quod inter ſolſtitium hybernum & æſtivum intercedit; *Autumnale*, quod inter ſolſtitium æſtivum & hybernum eſt medium.

597. *Septimo.* Quoniam intervalla inter æquinoctium & ſolſtitium proximum, & inter hoc ſolſtitium uſque ad æquinoctium vicinum, ſunt ſemper æqualia quartæ parti revolutionis annuæ planetæ, quemlibet polum per dimidiam revolutionem continuo illuminari, & altero revolutionis dimidio in perpetua nocte verſari.

598. *Octavo.* In locis circa polos P, Q, habitatis, diem debere quandoque durare plures menſes, plures ſeptimanas, plures dies communes; inter hæc unum debere eſſe locum, in quo dies longiſſima in ſolſtitio æſtivo accurate ſit æqualis revolutioni diurnæ planetæ; eſt autem hic is locus, cujus ellipſis circumferentiam diſci ultra polum tangit, quæ adeo eſt ultima earum, quæ integræ in diſco videri poſſunt. Circuli planetæ, quos ellipſes iſtæ repræſentant, dicuntur *circuli polares planetæ*: in figuris ſuperius citatis notantur literis *c* & *l*.

599. *Nono.* Intra circulum polarem & æquatorem dies creſcere a ſolſtitio hyemali uſque ad ſolſtitium æſtivum, noctesque eadem proportione decreſcere; poſt ſolſtitium æſtivum uſque ad hybernum dies minui ita, ut in ſolſtitio hyberno nox æqualis ſit diei ſolſtitii æſtivi, & viciſſim.

600. *Decimo.* In tota ſuperficie planetæ ſummam omnium dierum collectim ſumtorum proxime æquari tempori omnium noctium.

ARTICULUS III.

De Cauſa Generali horum Phænomenorum.

601. Ut jam ratio generalis horum phænomenorum reddatur, animadvertet obſervator, quod cum non niſi die æquino-

ctii viæ macularum inſtar rectarum inter ſe parallelarum appareant, neceſſe ſit, eo die plana circulorum a maculis rotatione deſcriptorum ita verſus ſolem dirigi, ut producta per eundem tranſeant; aliis vero temporibus reſpectu ſolis aut oblique aliquantum elevari, aut deprimi. Eſt id ſequela legitima illius Optices principii, quod *oculus extra planum & axem circuli admodum remoti conſtitutus totam ejus ſuperficiem videat, ſed figura elliptica, plus minuſve contracta, prout oculus plano circuli producto vicinior, aut ab eodem remotior eſt; & ſiquidem oculus in hoc ipſo ſit plano, ſuperficies circularis adeo contrahatur, ut cum peripheria congruat, circulusque ut recta diametro æqualis appareat.* Tunc enim radii omnes ex oculo per ſingula peripheriæ circuli puncta ducti, in ſphæræ cæleſtis ſuperficiei parte aliqua, quæ ad ſenſum plana eſt, ac viſum terminat, projectionem orthographicam circuli hunc in modum depingunt (356).

602. Et quia centrum ſolis ſemper eſt in plano orbitæ planetæ (24), ſequitur, quod momento æquinoctii centrum ſolis ſimul ſit in plano orbitæ, ſimul in plano circuli æquinoctialis Planetæ: & hinc *ipſo æquinoctii momento centrum ſolis eſt in interſectione plani orbitæ planetæ cum plano ejus æquatoris.*

603. Quod ſi porro per centrum v. g. Telluris concipiatur axis E C (fig. 81 & ſequentes) ad planum orbis annui perpendicularis (quem *axem eclipticæ* vocabimus), & ſimul ſit alter axis P Q per utrumque polum tranſiens (qui dicetur *axis æquatoris*) facile oſtenditur, quod

Omnia Phænomena motus diurni alicujus planetæ, quæ durante una revolutione annua contingunt, neceſſario ex eo conſequantur, quod planeta videatur ſemel circa axem ſuum eclipticum rotari, eodem tempore, & eadem velocitate, qua revolutionem annuam peragit, dum interea reipſa perſæpe motu diurno circa axem æquatoris volvitur, qui ſemper ſub eodem angulo ad planum eclipticæ planetæ inclinatus manet.

Etenim ſi globus ſolo motu translationis in plano aliquo circa punctum fixum in eodem plano revolvatur, facile concipitur (& quisque in ſeipſo experiri poteſt, ſi circa corpus aliquod vicinum in circulum ſe moveat, facie ad punctum aliquod remotiſſimum ſemper converſa, ut certus ſit, ſe carere motu rationis), hunc globum e puncto illo viſum, circa quod movetur, debere apparere & motu revolutionis, & motu rotationis præditum, qui poſterior fiat circa axem ad planum, in quo revolvitur, perpendicularem, eadem celeritate angulari, qua motus revolutionis. Adeoque omnia ſuperficiei globi puncta ſucceſſive centro revolutionis obverti debent, & deſcribere circulos tum inter ſe, tum plano revolutionis parallelos, qui ea proportione abſolvuntur, qua ipſa revolutio. Hoc poſito

Con-

Concipiatur ab initio terra cum axe ſuo æquatoris (inclinato ſcilicet, ut notum eſt, ad planum eclipticæ) ſolo motu annuo circa ſolem revolvi: apparebit ſimul habere motum rotationis annuum, ſi e ſole ſpectetur, circa axem eclipticæ: omnia ejus ſuperficiei puncta, & nominatim poli æquatoris, ſucceſſive ſoli obvertentur, atque ab eo illuminabuntur: ſingula annis ſingulis deſcribent circulos eclipticæ parallelos, & eadem velocitate angulari, qua revolutio fit. Axis autem æquatoris, ob conſtantem ſuam inclinationem, videbitur circa axem eclipticum per terram tranſeuntem duos conos æquales, & oppoſitos deſcribere, quorum vertex communis eſt in centro terræ. Et quia axis eclipticus eſt ad planum orbis annui terræ perpendicularis, ejus poli ſemper eadem ratione ſoli ſunt expoſiti, utpote ſemper in circumferentia diſci exiſtentes, hoc eſt, in circulo maximo, communi lucis & umbræ termino: igitur uterque æquatoris polus debet medietatem ſui circuli in diſco illuminato, medietatem in obſcuro deſcribere: & quoniam diametraliter ſibi opponuntur, quantum alter in diſcum illuminatum progreditur, tantundem alter ſub obſcuro reconditur; alteroque ad limbum appellente, alter quoque ad limbum oppoſitum venire debet, itaque deinceps.

Interea patet, per hanc rotationem apparentem minime impediri motum verum rotationis Telluris circa axem æquatoris: utraque hæc rotatio combinata producet phænomena, quæ articulo præcedente in particulari expoſuimus, & quorum ſingulorum rationem in ſequentibus dabimus.

ARTICULUS IV.

De obliquitate eclipticæ; de diverſo ſitu polorum æquatoris reſpectu ſolis; de declinatione, ac aſcenſione recta ſolis.

604. I. Quoniam eo momento, quo æquinoctium accidit (Fig. 83 & 87) extrema P & Q axis æquatoris, æque ac extrema E & C axis eclipticæ, ſunt in peripheria diſci illuminati, evidens eſt, menſuram inclinationis horum axium eſſe arcum EP, vel QC, adeoque etiam inclinationis planorum eclipticæ & æquatoris. Hæc inclinatio *obliquitas eclipticæ* vocatur, ac in tellure proxime eſt $23°, 28', 20''$.

605. Ex hoc deducitur, *ut cognoſcatur inclinatio eclipticæ alicujus planetæ ad ſuum æquatorem, metiendam eſſe obliquitatem ſemitæ macularum, quando lineas rectas deſcribere videntur.*

606. II. Cum centrum solis directe opponatur puncto medio hemisphaerii illuminati Planetae, consequens est, ut intra revolutionem annuam uterque polus aequatoris accedat, ac iterum successive recedat ab hoc medio puncto disci illuminati. In aequinoctiis uterque polus ab eo 90° distat, cum distantia in superficie sphaerica accipiatur, & punctum illud sit polus circuli maximi hemisphaerium illuminatum terminantis. In solstitiis polus ille aequatoris, qui in disco illuminato est, minimam habet distantiam a puncto medio; alter, qui sub disco latet, maximam: aliis temporibus, dum polus in parte illuminata quamvis a puncto medio distantiam habet, alter in parte obscura tantundem accurate a puncto medio ejusdem partis obscurae distat.

607. III. Si itaque circa polos eclipticae E, C in superficie telluris ad distantiam 23°, 28′, 20″ (fig. 81 & seqq.) concipiantur duo circuli minores A D B, G K H, ii repraesentant viam a polis aequatoris tempore revolutionis annuae descriptam. Projectio horum circulorum est recta aequalis chordae arcus 46°, 56′, 40″ (qui est duplus de 23°, 28′, 20″), cum plana eorum ad planum eclipticae sint parallela & parum admodum ab eodem elevata, ob exilitatem diametri Planetae. Puncta interfectionum horum circulorum A, B, G, H, cum circulo maximo discum illuminatum terminante, sunt illa, in quibus poli aequatoris tempore aequinoctiorum versantur, qui in hisce circulis ea proportione progrediuntur, qua centrum terrae in orbe annuo. Quod si itaque detur arcus eclipticae a centro telluris ab ultimo aequinoctio descriptus, vel usque ad proximum aequinoctium describendus, facile geometrice determinatur locus poli aequatoris in disco illuminato. Exempli causa: 18 Aprilis 1745 in ipso meridie, cum terra ab aequinoctio Martii praecedentis descripserit in suo orbe 28°, 29′, 17″, construatur super diametro A B (fig. 88) semicirculus A O B, & a puncto A, in quo fuit polus tempore aequinoctii, accipiatur arcus A O 28°, 29′, 17″; ex O demittatur perpendiculum O P, quod determinabit locum poli P in disco illuminato (359).
Et si in parte aversa disci in projectione G H K concipiatur portio H q, quae repraesentet arcum 28°, 29′, 17″, punctum q erit polus australis in hemisphaerio obscuro.

608. IV. Determinatis hac ratione punctis polaribus aequatoris, si per punctum S medium hemisphaerii illuminati, & cui centrum solis respondet (ob quam causam in sequentibus illud locum solis vocabimus) concipiatur descriptus in superficie terrae semicirculus maximus P S Q, utrinque in polis P, Q, terminatus (fig. 81 & seqq.), manifestum est, *Primo*, quod cum ejus planum per ocu-

oculum obſervatoris tranſeat, projectio ejus ſemper debeat eſſe recta. *Secundo*, quod idem ſemicirculusſemper biſariam, & ad angulos rectos in *g* ſecetur a circulo maximo T*g* R, æquatorem repræſentante (Trig. 7, & 17), adeoque quod arcus P*g*, vel Q*g*, ſemper ſit 90°. Eodem modo liquet *Tertio*, hunc ſemicirculum non niſi in æquinoctiis integrum videri poſſe: aliis enim temporibus ſemper ejus aliqua pars ad P vel Q in hemiſphærio obſcuro latet, prout polus cognominis plus, minusve infra diſcum illuminatum receſſit. *Quarto*, Punctum interſectionis *g* ſemicirculi P S Q cum æquatore coincidere cum loco ſolis S in æquinoctiis: aliis vero temporibus hæc puncta eo magis a ſe diſtare, quo longius terra ab æquinoctiis abeſt. Hinc eorum diſtantia S *g* *declinatio ſolis* dicitur; & quidem *Borealis*, vel *Auſtralis*, prout vel polus Borealis, vel Auſtralis in diſco illuminato verſatur. Poteſt etiam ſemicirculus P S Q vocari ſemicirculus declinationis. Itaque *declinatio ſolis eſt quantitas arcus circuli maximi ſphæræ e loco ſolis ad æquatorem perpendiculariter ducti.* Hinc *Quinto*, declinatio ſolis ab æquinoctio usque ad proximum ſolſtitium, in quo maxima fit, creſcit; a ſolſtitio usque ad vicinum æquinoctium decreſcit, ita ut in æquinoctio ſit nulla; inde fit in hemiſphærium alterum diverſi nominis, hoc eſt e Boreali fit Auſtralis, aut ex Auſtrali Borealis, augeturque ab æquinoctio usque ſolſtitium: ab hoc minuitur usque ad proximum æquinoctium, poſt quod priorem denominationem acquirit, ſicque perpetuo ſuas variationes continuat. *Sexto.* In ſolſtitiis ſemicirculus P S Q congruit cum eo, qui per polos eclipticæ E, C ac punctum S, deſcribitur, tumque apparet facile, arcum declinationis maximæ ſolis æquari obliquitati eclipticæ, hoc eſt, 23°, 28′, 20″. Nam (fig. 81) tam arcus E S, quam P*g*, eſt 90°: arcus vero E P, ſeu diſtantia poli eclipticæ a circulo, quem annuatim polus æquatoris deſcribit, eſt 23°, 28′, 20″ (604); ergo P S debet eſſe 66°, 31′, 40″; conſequenter ſi P*g* = 90°, ſubtracto P S = 66°, 31′, 40″, manet S*g* = 23°, 28′, 20″. *Septimo* denique conſtat, arcum P S, vel Q S, diſtantiæ ſolis ab alterutro polo P vel Q, eſſe complementum declinationis ſolis, quando polus eſt in hemiſphærio illuminato; & ſummam ex declinatione & 90°, quando polus eſt in hemiſphærio obſcuro.

609. V. Si per idem hemiſphærii illuminati punctum medium S ducatur diameter I L, quæ interſectionem globi terreſtris cum plano eclipticæ exhibet, adeoque ſemicirculum maximum ſphæræ e ſole viſum (qui *ecliptica* vocabitur); *Primo* in æquinoctiis æquator T*g* R eclipticam I S L in puncto S, ſoli reſpondente, interſecat (fig. 83 & 87); alias punctum interſectionis a puncto S eo remo-

 tius

tius eſt, quo terra ab æquinoctiis: ita, ut in ſolſtitiis (fig. 81 & 85) æquator & ecliptica ſe interſecent in punctis ſignis ♈ & ♎ notatis in ipſa diſci peripheria. *Secundo*. Tempore revolutionis dimidiæ terræ, ab uno ſolſtitio uſque ad alterum, unum ex interſectionum punctis, v. g. quod habet ſignum ♈, (Fig. 81, 83, 83, 84, 85) percurrit ſemicirculum I L, totidemque in eo gradus conficit, quot polus æquatoris in ſuo circulo minore; tempore alterius revolutionis dimidiæ, alterum punctum interſectionis ♎ (Fig. 85, 86, 87, 88, 81) eundem ſemicirculum I L percurrit. *Tertio*. Angulus ſphæricus S ♈ *g*, vel S ♎ *g*, (Fig. 81 & ſeqq.) ſemper æquatur obliquitati eclipticæ, quippe cum a planis æquatoris & eclipticæ ſe interſecantibus efficiatur. Unde data diſtantia terræ ab æquinoctio proximo, ſive arcu, quem terra ab ultimo æquinoctio percurrit, vel uſque ad proximum percurret, facile inveniri poteſt declinatio ſolis, ejusque a polis æquatoris diſtantia. Nam in triangulo ſphærico S ♈ *g* (Fig. 81, 82, 83, 84, 85), vel S *g* ♎ (Fig. 85, 85, 87, 88) ſemper ad *g* rectangulo (Trig. 16), arcus ♎ S, vel ♈ S, eſt æqualis arcui diſtantiæ terræ ab æquinoctio proximo; angulus S ♎ *g*, vel S ♈ *g*, æquatur obliquitati eclipticæ, ſive 23°, 28′, 20″.

610. VI. Arcus æquatoris *g* ♈, inter interſectionem ♈ æquatoris cum ecliptica, & arcum S *g* a loco ſolis ad æquatorem perpendicularem, interceptus, eſt *aſcenſio recta* ſolis: computatur ſecundum ſignorum ordinem a 0° uſque ad 360°, initio ſemper ab interſectione ♈ ſumto. Hoc poſito, circulus P S Q ad æquatorem ſemper normalis, cum etiam in ſolſtitiis normalis ſit ad eclipticam, ſecat & æquatorem, & eclipticam in diſtantia 90° a communi eorum interſectione (Trig. 18). Itaque (Fig. 81, 85) ♎ S, ♈ S, ♎ *g*, ♈ *g* ſunt quadrantes circuli: & hinc aſcenſio recta ſolis in æquinoctio verno eſt 0°; in ſolſtitio ſequente 90°; in æquinoctio autumnali 180°; in ſolſtitio hyberno 270°; in reditu ad æquinoctium vernum denique 360°, ſeu 0°. Quare ſi detur obliquitas eclipticæ, & arcus diſtantiæ terræ a proximo æquinoctio, aſcenſio recta ſolis facile reperitur, cum in triangulis ſphæricis rectangulis ♈ *g* S, ♎ *g* S dentur angulus S ♈ *g*, vel S ♎ *g*, & latus ♈ S, vel ♎ S.

ARTICULUS V.

De temporibus rotationis planetarum circa ſuos axes; de tempore vero & medio.

611. VII. Supponatur, quod planum ſemicirculi P S Q non participet motum diurnum, ſed ſolummodo motum annuum tellu-

telluris, adeoque refpectu motus diurni fixum maneat, (quo cafu hic femicirculus *Meridianus cœleftis* dicitur), evidens eft *primo*, quod motu diurno omnia fuperficiei terreftris puncta, imo etiam omnia circulorum ISL, TgR, qui in ea defcripti concipiuntur, fucceffive per planum hujus meridiani tranfeant, defcribantque circa æquatoris axem omnes eos circulos, qui e fole vifi, ellipfium inftar apparent. Momentum, quo punctum quodvis per meridianum tranfit, *Meridies* illius puncti appellatur.

612. *Secundo* patet, quod circulorum omnium arcus per meridianum tranfeuntes femper effent accurate proportionales tempori, fi folum motum rotationis haberent; fed ob motum annuum (quo planeta tempore revolutionis integræ videtur femel circa axem fuum eclipticæ rotari) fit, ut intervallum reditus maculæ cujusvis ad meridianum componatur ex revolutione integra diurna & æquabili circa axem æquatoris, & fimul ex parte revolutionis annuæ circa axem eclipticæ, quæ tempori illius intervalli refpondet, & velocitati motus annui in orbita proportionalis eft. Hinc fequitur

613. *Tertio*, quod dato tempore revolutionis maculæ refpectu folis, reperiatur tempus revolutionis planetæ circa axem æquatoris ex hac analogia: *ut* 360° *plus motu proprio planetæ tempore revolutionis maculæ, funt ad tempus hujus revolutionis, ita funt* 360° *ad tempus rotationis.*

614. *Quarto*, quod cum celeritas motus annui non fit femper eadem, quodlibet intervallum, quo macula ad meridianum redit (& quod eft menfura diei refpectu illius maculæ) debeat effe inæquale, confequenter fi terræ incolæ habeant horologia, quorum motus fit admodum æquabilis, ea non poffint ab uno usque ad alterum meridiem oftendere 24 h. 0′. 0″; fed aliquot fecundis plus, quando motus terræ acceleratur, & aliquot minus, dum retardatur.

615. Ut igitur hujus differentiæ ratio habeatur, duplex tempus, vel dies ftatuendus eft; alterum nempe *verum* feu *apparens*, eftque intervallum a tranfitu maculæ per meridianum usque ad ejusdem reditum; alterum *medium*, eftque intervallum ab uno usque ad alterum meridiem, quale obfervaretur, fi motus rotationis & revolutionis effet femper æquabilis, quodque ab horologiis, fi rite fint conftituta, oftendi debet. Die uno temporis medii 360°, 0′, 0″ æquatoris per meridianum tranfeunt una cum 59′, 8″ quæ eft pars ex motu annuo 360°, uni diei temporis medii proportionalis. Die autem uno vero per meridianum tranfeunt 360 gradus æquatoris cum arcu ejusdem, qui refpondet arcui eclipticæ eo die defcripto, & motus in afcenfione recta vocatur.

Quinto. Illud etiam patet, diem temporis medii non poffe congruere cum die temporis veri, nifi quando terra motu diurno in

 afcen-

aſcenſione recta 59′, 8″ conficit. Alias ſemper inter meridiem temporis veri (hoc eſt, inter tranſitum verum alicujus puncti per meridianum), & meridiem temporis medii (hoc eſt, inter momentum, quo idem punctum veniſſet ad meridianum, ſi motus terræ circa ſolem ſemper eſſet æquabilis) notabilis eſſe debet differentia &c (vide N. 315 & ſeqq.).

ARTICULUS VI.

De differentia Meridianorum; de Longitudinibus & Latitudinibus Geographicis; de Methodo Geographorum.

616. E Succeſſivo punctorum ſuperficiei terræ tranſitu per meridianum P S Q, (quo momentum meridiei ſingularum macularum determinatur) illud etiam conſequitur, quod macularum incolæ ſucceſſive meridiem habeant, alii poſt alios, ut illi, quorum macula una hora tardius per meridianum tranſit, tunc meridiem agant, quando prioris maculæ incolæ jam horam poſt meridiem numerant. Idem eſt de aliis. Verum quorum maculæ eodem tempore ad meridianum veniunt, ii eodem momento eandem horam numerant. Unde in ſuperficie planetarum dantur loca, in quibus eodem tempore eædem numerantur horæ; ſed dantur etiam loca alia, in quibus eodem tempore horæ cenſentur diverſæ. Eſt autem manifeſtum, quod ea loca, in quibus eodem momento eſt meridies, cum ſimul debeant ad meridianum P S Q venire, talem habeant in ſuperficie globi ſitum, ut omnia ſint ſub eodem aliquo ſemicirculo ab uno ad alterum polum ducto; ea vero, in quibus meridies eſt diverſis temporibus, nequeant ſub tali ſemicirculo eſſe ſita. Quod ſi igitur per polos æquatoris P, Q, & ſingula ejus peripheriæ puncta deſcribantur ſemicirculi (qui *meridiani terreſtres* dicentur, ut a cæleſti P S Q diſtinguantur), quivis ſemicirculus determinabit in ſuperficie telluris omnia ea loca, in quibus eodem tempore eædem horæ numerantur, eaque ab aliis diſcernet. Et ſi numerus graduum æquatoris inter duos meridianos terreſtres comprehenſus, vel, quod idem eſt (Trig. 10), numerus graduum, qui metitur angulum ad polum, quem duo illi meridiani terreſtres efficiunt, convertatur in tempus, tribuendo 360 gradibus 24 horas; ſcietur differentia hoarum, quæ ſub iisdem meridianis ſimul numerantur, & quæ in Aſtronomia *differentia meridianorum* dicitur.

Evidens porro eſt, *loca, quæ ſunt ſub eodem meridiano terreſtri, ita eſſe ſita reſpectu polorum æquatoris, ut duo eorum nequeant ab eodem polo eandem habere diſtantiam.*

617.

617. Ulterius liquet, quod si detur hora, quæ in loco quovis superficiei telluris numeratur, & differentia meridianorum inter hunc, & alium quemcunque locum, sciatur etiam hora, quæ in alio illo loco eodem tempore est; & vicissim datis horis duorum locorum eodem tempore, datur etiam differentia meridianorum

618. Cum motus diurnus fiat circa polos æquatoris, omnia puncta superficiei globi, quæ ab eodem polo habent eandem distantiam, moventur in eodem circulo, seu si e sole spectentur, videntur eandem ellipsin describere. Itaque si ab æquatore usque ad utrumque polum in tota globi superficie describantur circuli ad æquatorem paralleli (vocantur autem simplici nomine *paralleli*, suntque circuli minores sphæræ) ex iis singuli determinabunt puncta a polo æquidistantia, & quæ successive per meridianum P S Q transeunt, ita, ut sit impossibile, ut duo puncta sint simul in eodem parallelo, & simul eandem horam numerent, sive simul sint sub eodem meridiano terrestri. Unde deducitur, certa & constante ratione determinari posse situm puncti cujusvis in superficie telluris, si nempe designetur parallelus, in quo est, & differentia meridianorum respectu puncti æquatoris, per quod primus meridianus transit, cum, ut vidimus, fieri nequeat, ut duo diversa puncta easdem has duas conditiones habeant.

619. Et reipsa Geographi hac methodo puncta notabiliora in superficie terræ determinant. *Primo* Æquatorem in 360° partiuntur, & per singula divisionum puncta describunt meridianos: ex his divisionibus unam seligunt, a qua ceteras ordine numerent, & meridianum per eam descriptum vocant *primum meridianum*. Verum est quoddam apud eos hac in re discrimen: alii enim, ut Angli, volunt, ut primus eorum meridianus per Londinum transeat; alii, ut Hollandi, eum ducunt per Picum Teneriffæ (montem insignem insulæ unius e Canariis), Galli quidam eundem per Parisios describunt: quamvis satis inter eos conveniat, recte meridianum primum duci per insulam maxime occidentalem e Canariis, quam *Ferri* vocant, quemadmodum & antiqui fecerunt Geographi, & Ludovicus XIII suis præscripsit. A primo Meridiano Geographi alios ab occidente versus orientem numerant, dicendo, quod omnia puncta, quæ sub meridiano a primo gradu uno versus ortum distante sunt, habeant gradum unum longitudinis; quæ sub meridiano sequente, habeant duos gradus longitudinis &c. *Secundo.* Meridianum primum, aut quemvis alium, ab æquatore usque ad polum in 90° dividunt, & per singulos describunt circulos minores æquatori parallelos: punctis omnibus, quæ sub primo ab æquatore parallelo sunt, tribuunt gradum unum latitudinis borealis, si quidem parallelus sit ex parte poli borei; vel australis, si sit ex parte poli australis. Similiter omnia puncta, quæ sunt sub parallelo ab æquatore secundo, dicuntur habere duos gradus latitudinis borealis, vel australis, prout parallelus vel ex parte poli borealis, vel ex parte poli australis fuerit, & sic de reliquis Itaque *Longitudinem geographicam alicuius loci metitur arcus æquatoris interceptus inter primum meridianum, & meridianum loci, ab occasu in ortum numeratus; latitudinis vero geographicæ ejusdem loci mensura est arcus circuli maximi, qui metitur distantiam æquatoris a parallelo per locum transeunte:* aut quod idem est, *mensura latitudinis est arcus meridiani loci inter locum ipsum, & æquatorem interceptus.* Hinc sequitur, *latitudinem geographicam alicujus loci esse complementum ejus distantiæ a polo.*

ARTICULUS VII.

De altitudinibus solis, & earum variationibus.

620. Dum punctum aliquod superficiei telluris motu diurno in via sua elliptica (ut quidem e sole apparet) progreditur, evidens est I, quod dum versus meridianum cælestem S P Q accedit, simul etiam loco solis fiat vicinius: exempli causa quando est in limbo extimo disci illuminati, consequenter quando oritur, vel occidit, arcus ejus distantiæ a puncto S repræsentatur per radium hemisphærii illuminati, adeoque est 90°. Post ortum suum semper magis ac magis ad meridianum S P Q accedit, ideoque etiam ad solem, ita ut dum jam sub meridiano cælesti constitutum est, minimum, ac eo die possit, a puncto S distet. Etenim viæ veræ macularum sunt circuli minores globi, quorum poli sunt P, Q: omnes secant perpendiculariter circulos maximos per polos P, Q transeuntes; igitur etiam meridianum cælestem P S Q: & hinc dum macula ad hunc meridianum appellit, ejus distantia a loco solis S est arcus circuli P S Q, ex puncto S perpendiculariter ad viam maculæ ductus: quare hic arcus est distantia minima puncti S a via, quam macula actu percurrit; & macula, dum est in meridiano, propius eo die ad locum solis S accedere non potest.

621. II. si supponamus incolam terræ situ erecto consistere, hoc est, tali, ut recta a capite ad pedes ducta (quæ linea *verticalis*, aut *perpendiculi* dicitur) sit semper ad terræ superficiem normalis, eumque situm objectorum, quæ circa se videt, ad hanc lineam verticalem, seu potius ad planum referre, quod eandem verticalem, ubi per oculum transit, secat perpendiculariter (quod *planum horizontale*, seu *planum libellæ* vocatur) adeoque terram in puncto oculi spectatoris tangit; si præterea hæc comparatio fiat per angulos, qui comprehenduntur a plano libellæ, & radio ab oculo ad objectum ducto; ita, ut arcus, qui metiuntur hos angulos, dicantur *altitudines*, consequenter objectum censeatur nullam habere altitudinem, quod in plano libellæ est positum; ad quæ vero ducti radii ex oculo efficiunt cum eodem plano angulos 30°, 40°, 60°, iis altitudo 30°, 40°, 60° tribuatur: hæc, inquam, si supponamus, homini illi sol apparere debet ascendere, & descendere, prout locus superficiei terræ, in quo est, ad locum solis S vel accedit, vel ab eodem recedit: ita *ut altitudo solis semper videatur proxime æqualis complemento hujus distantiæ.* Sit enim in E oculus habitatoris constitutus (fig. 89), E Z ejus linea verticalis, E N linea horizontalis, sive libellæ; sit in S locus, cui respondet centrum solis infinite fere a terra in linea C S *f* remotum; arcus E S, sive distantia oculi E a puncto me-

dio

dio hemisphærii illuminati, ſit 90° (dum nempe (592) punctum E reſpectu ſolis oritur vel occidit): cum angulus E C S ſit rectus, linea C S ſ e centro terræ ad ſolem ducta eſt parallela ad lineam libellæ E N; ſi itaque e puncto E ducatur recta E ſ verſus centrum ſolis ad diſtantiam admodum magnam remoti, ea non concurret cum recta C S ſ, niſi ad diſtantiam admodum magnam a centro terræ: jam vero rectæ, quæ non niſi in magna valde diſtantia concurrunt, ſunt fere parallelæ, & quidem eo propius ad paralleliſmum accedunt, quo in majore diſtantia concurrunt, ita ut abſolute ſint parallelæ, ſi non niſi infinite productæ concurrant; igitur rectæ C S ſ, E ſ ſunt proxime parallelæ: & quoniam linea libellæ E N reipſa parallela eſt cum linea C S ſ, recta E ſ, ex oculo ad centrum ſolis ducta, fere coincidit cum linea libellæ E N; hinc angulus ab iis comprehenſus eſt infinite parvus, adeoque altitudo ſolis apparet fere nulla, quando diſtantia ſpectatoris a puncto medio hemiſphærii illuminati eſt 90°. Sit jam ſpectator in *e* poſitus; ejus verticalis *e z*, linea libellæ *e n*, diſtantia a puncto medio hemiſphærii illuminati *e* S = 40°. Si ducatur e puncto *e* recta *e ſ* ad centrum ſolis, quæ erit proxime parallela cum recta C S ſ, angulus altitudinis ſolis habebit menſuram angulum *n e ſ*, cujus complementum eſt *ſ e z* = 50°: & quia rectæ C S ſ, *e ſ* ſunt fere parallelæ, anguli *ſ e z*, *e* C S ſunt proxime æquales: igitur menſura anguli altitudinis ſolis eſt proxime complementum arcus *e* S, ſive diſtantiæ ſpectatoris a puncto medio hemiſphærii terræ illuminati.

Obſerva: angulus inclinationis rectarum E ſ, *e ſ*, e ſuperficie terræ ad centrum ſolis ductarum, ad lineam, quæ e centro terræ ad centrum ſolis ducitur, vocatur *parallaxis ſolis*. De hac alibi (429) egimus. Et quia hæc parallaxis, dum maxima eſt, non excedit 10″, eam hic negligimus, & ſupponimus, omnes rectas, e quocunque terræ puncto ad ſolem ducantur, eſſe inter ſe parallelas, adeoque altitudinem ſolis e terra viſam eſſe accurate æqualem complemento diſtantiæ oculi ſpectatoris a puncto medio hemiſphærii illuminati.

622. III. His poſitis, dum punctum aliquod ſuperficiei terreſtris eſt in meridiano, meridianus terreſtris, in quo eſt, cum meridiano cæleſti P S Q (Fig. 81 & ſeqq.) congruit. Igitur arcus diſtantiæ ſpectatoris ab æquatore, & arcus diſtantiæ loci ſolis S ab eodem æquatore, in eodem circulo P S Q accipiendi ſunt: & hinc ſi uterque locus ſit ad eandem æquatoris partem, differentia arcuum diſtantiæ ab æquatore eſt diſtantia eorum inter ſe; ſed ſi ſint ad diverſas æquatoris partes, diſtantia eorum inter ſe eſt ſumma arcuum diſtantiæ ab æquatore, hoc eſt ſumma latitudinis geographicæ loci ſpectatoris in terra, & declinationis ſolis. Atque

ex

ex hoc facile deducetur ratio omnium phænomenorum viciſſitudinis tempeſtatum anni, inæqualitatis dierum ac noctium, diverſarum altitudinum meridianarum ſolis, cum iſta ſolummodo dependeant e combinata declinatione ſolis cum diſtantia ſpectatoris ab æquatore terreſtri.

623. IV. Cum axes minores omnium ellipſium a maculis deſcriptarum ſint in plano meridiani cæleſtis P S Q, arcus ejusdem ellipſeos ad æqualem utrinque a meridiano diſtantiam æquales eſſe debent, & æqualiter poſiti: conſequenter ejusdem maculæ a puncto medio S hemiſphærii illuminati diſtantiæ temporibus ante & poſt tranſitum per meridianum æqualibus ſunt æquales: ſeu, quod idem eſt, altitudo ſolis æqualibus ante, & poſt meridiem temporis intervallis eadem eſt. Atque ex hoc licet tempus verum in terra obſervare (325).

ARTICULUS VIII.

Phænomena expoſita Geometrice & Trigonometrice determinantur.

624. PROBLEMA I. *Datis declinatione ſolis, & latitudine geographica puncti in ſuperficie Planetæ, ellipſin ejus paralleli geometrice deſcribere, & determinare loca, in quibus quavis diei, noctisve hora exiſtit.*

Reſolutio. Repræſentet circulus E Z C R (fig. 90) diſcum illuminatum; E C axem eclipticæ. Determinato (607) ſitu unius e polis P, ducatur diameter M P S Q, quæ erit projectio meridiani; accipiantur in ea partes S F, æqualis ſinui latitudinis geographicæ, & S I, æqualis ſinui differentiæ inter latitudinem geographicam & declinationem datam; S N vero æqualis ſinui earum ſummæ (fit hoc expedite, ſi utrinque a puncto M accipiantur arcus M T, æquales complemento latitudinis geographicæ; & arcus T D, T R æquales declinationi ſolis: ducanturque T T, R R, D D); habebitur T F T, diameter paralleli puncti dati, quæ ſimul erit axis major ellipſeos (356); & I N, axis minor. Nam (622) quando declinatio, & latitudo geographica ſunt ejusdem nominis, locus puncti dati in diſco illuminato eſt in meridie in I; quando vero declinatio eſt diverſi nominis, locus puncti dati in meridie eſt in N. Itaque in caſu priore eſt N locus puncti dati media nocte ſub diſco, & in caſu altero eſt punctum datum media nocte in I. Hoc poſito, centro V, medio partis I N puncto, deſcribantur duo circuli radiis V N, & F T: dividatur uterque in quindenos gradus, initio a Meridiano M Q ſumto, determinabitur (361) ellipſis, quæ erit projectio quæſita, itaque ſimul diviſa, ut punctum datum

quavis

quavis hora in locis in ea notatis reperiatur: & siquidem declinatio & latitudo Geographica sint ejusdem nominis, pars inferior ellipsis inter duo puncta circa T & T comprehensa, in quibus limbum disci tangit, designabit tempus, quo sol visibilis est, seu diei longitudinem; pars autem ejus superior, nocturnum tempus exhibebit: oppositum fiet, si declinatio habeat diversam denominationem. Itaque puncta contactus ellipseos cum limbo disci, horam ortus & occasus puncti dati respectu solis determinabunt. Ordo horarum diurnarum est ab occasu in in ortum, quippe cum hac directione hemisphaerium illuminatum planetae respectu solis moveatur.

625. Observa: In ejusmodi projectione omnes peculiares affectione motu diurni geographice exprimi possent; verum omittemus ista, quoniam multo major accuratio per calculum trigonometriae sphaericae habetur. Itaque ostendemus solum, qua ratione in disco illuminato inveniri debeant triangula sphaerica ad id requisita, figura rudius constructa, utpote quae solum in persequendo calculo nos dirigat.

626. Problema II. *Datis tribus ex his quatuor*, Primo *latitudine Geographica puncti cujusvis in superficie planetae, v. g. telluris;* Secundo *declinatione solis;* Tertio *momento quocunque temporis veri, quod in loco puncti dati numeratur;* Quarto *altitudine solis ex eo puncto visa, invenire quartum ope calculi Trigonometrici.*

Casus I, quando latitudo Geographica & declinatio solis habent diversam denominationem. Esto latitudo Geographica 48°, 51′ Borealis; declinatio solis 13°, 18′ Australis; tempus datum, tres horae ante meridiem. Describatur circulus E I C R (fig. 92) qui disignet discum illuminatum: notentur in eo poli eclipticae E, C; & quia declinatio solis est australis, prope C ducatur recta G H, quae exhibeat circiter viam poli antarctici, tum in disco illuminato versantis: designetur in ea locus poli antarctici Q, 13 circiter gradibus a limbo. Tum descripto per Q & S circulo Q S *g* M, qui meridianum caelestem repraesentat, in distantia Q *g* 90° ducatur aequator T *g* R, & supra eum in distantia *g* M 48°, 51′ parallelus I M L V, qui viam puncti dati in disco illuminato designat. Est autem punctum aequatoris T ad occasum punctorum terrae, R ad eorum ortum. In arcu aequatoris *g* R accipiatur *g* O = 45°, a meridiano *g* versus occidentem numeratis, cum tempus datum sit trium horarum ante meridiem, & 3 h = 45°. Per polum Q, & punctum O ducatur arcus circuli maximi, parallelum, seu viam puncti dati I M L V, secans in L: erit punctum L locus verus puncti dati in disco illuminato tempore dato. Denique per centrum S & punctum L describatur quadrans circuli S L N; erit L N arcus distantiae puncti

dati L a limbo hemisphærii illuminati, aut, quod idem eſt, (621) altitudo centri ſolis e puncto L viſa. His poſitis, in triangulo ſphærico S Q L, latus S Q æquatur diſtantiæ ſolis a polo, ſive complemento declinationis ſolis S g, adeoque in noſtro exemplo eſt S Q $76°$, $42'$: arcus Q L = Q O + O L = $90°$ + $48°$, $51'$, hoc eſt = $138°$, $51'$; anguli S Q L ad polum menſura eſt arcus gO = $45°$; latus S L eſt diſtantia ſolis a zenith. Unde cognitis tribus ex his, quartum facile per calculum invenitur; v. g. S L reperietur $73°$, $47'$; adeoque L N $16°$, $13'$.

627 Caſus II, quando latitudo Geographica, & declinatio ſolis ſunt ejusdem denominationis. Sit itaque illa $48°$, $51'$ Borealis; hæc vero $13°$, $18'$ itidem borealis: detur idem tempus, quod prius, nempe tres horæ ante meridiem: quæratur altitudo ſolis. Circulus E C T (fig 93) exhibeat diſcum illuminatum, S locum ſolis, E & C polos eclipticæ. Quoniam declinatio ſolis eſt Borealis, polus æquatoris borealis verſatur in diſco illuminato, cujus via circa polum E ſit A P B, locus vero circiter in P. Meridianus cæleſtis deſignetur per P S g; æquator in diſtantia $90°$ a polo P per T g R, & parallelus loci dati per I M L V, in diſtantia $48°$, $51'$ ab æquatore. Si, ut prius, accipiatur in æquatore gO $45°$ verſus occidentem, & ducatur P L O, hujus cum parallelo I M L V interſectio determinat locum L, in quo eſt punctum datum tempore dato: & ſi porro ducatur S L N, arcus L N eſt altitudo ſolis. Reperitur vero iterum ope complementi ſui S L, quod eſt latus trianguli ſphærici P S L, in quo notum eſt P L $41°$, $9'$, complementum diſtantiæ loci dati L ab æquatore L O; item S P, $76°$, $42'$, complementum declinationis ſolis S g; denique angulus S P L, quem metitur arcus gO $45°$; reperietur itaque S L $51°$, $14'\frac{1}{2}$, & hinc altitudo ſolis $38°$, $45'\frac{1}{2}$.

628. Ex reſolutione horum triangulorum inveniri etiam poteſt hora ortus vel occaſus ſolis pro quovis telluris loco, cujus latitudo Geographica cum declinatione ſolis datur. In iisdem enim triangulis Q S L, vel P S L arcus S L ſumendus eſt $90°$, hoc eſt, puncta N & L debent coincidere; arcus Q S, vel P S pariter notus eſt, cum ſit complementum declinationis ſive auſtralis, ſive Borealis: denique ſcitur etiam arcus Q L vel P L ex latitudine Geographica loci dati: unde reſtat ſolum, ut inveniatur angulus S Q L vel S P L, qui in tempus converſus (tributis $360°$ viginti & quatuor horis) dat intervallum temporis inter appulſum puncti dati ad meridianum, & appulſum ejusdem ad limbum diſci illuminati. Hoc intervallum *arcus ſemidiurnus* dici ſolet. Hac ratione invenietur (fig. 92), angulus S Q L = $69°$, $32'$, ſeu 4h. $38'$, $8''$ in tempore; & angulus S P L

(fig.

(fig.93) = 110°, 28′, five in tempus converfus, 7 h, 21′, 52″. Duplum arcus femidiurni determinat moram loci dati in difco illuminato tempore unius revolutionis diurnæ terræ.

Articulus IX.

Quædam obfervanda circa Theoriam præcedentem; & de præceffione æquinoctiorum.

629. I. Quæ hucusque de viis ellipticis macularum alicuius Planetæ diximus, non nifi quantum fenfibus percipi poteft, vera funt. *Primo* enim, cum Planetæ perpetuo motu annuo in fua orbita progrediantur, viæ illæ in fe funt epicycloides; & quoniam oblique fpectantur, funt epicycloides ellipticæ. *Secundo* quia axis minor harum ellipfium jam longior, jam brevior perpetuo evadit, eædem curvæ funt fpecies quædam fpiralium ellipticarum. Hinc fi rem in fe fpectemus, ut vere eft, curvæ, quæ exhibent vias macularum e fole vifas, funt admodum compofitæ, utpote quæ oriuntur ex tribus inter fe complicatis motibus, qui in diverfis planis peraguntur, fcilicet e motu annuo planetæ in plano fuæ eclipticæ; ex ejusdem motu diurno in plano fui æquatoris; & e motu annuo apparente & conico axis æquatoris circa axem eclipticæ. Interea tamen in praxi fupponuntur hæ curvæ effe veræ ellipfes pro tempore valde brevi, v. g. aliquot tantum horarum, cum celeritas angularis motus diurni fit admodum magna, fi cum celeritate reliquorum duorum motuum comparetur.

630. II. Momentis, quibus eædem anni tempeftates redeunt, collatis cum momentis, quibus nova terræ revolutio refpectu ejusdem ftellæ fixæ incipit, animadverfum eft, quod tempus reditus ejusdem tempeftatis anni prævertat revolutiones annuas 20′ in tempore, adeoque revolutio apparens annua polorum æquatoris terreftris circa polos eclipticæ abfolvatur intra 365 d. 5 h. 49′; & revolutio terræ circa folem intra 365 d. 6 h. 9′; ita, ut dum polus æquatoris circa polum eclipticæ jam videtur defcripfiffe 360°, terra circa folem reipfa non confecerit, nifi 359°, 59′, 10″. Ex quo apparet, punctum interfectionis plani æquatoris cum plano eclipticæ (quod eft punctum æquinoctiale) debere fingulis annis 50″ videri regredi. Motus hic *præceffio æquinoctiorum* vocatur, (hujus calculum vide Sect. VI. Cap. I. Artic. 9).

SECTIO QUINTA.

Complectens Partem Tertiam Astronomiæ Solaris,

Sive

Explicationem motuum planetarum secundariorum e sole visorum.

Ut de legibus motuum planetarum secundariorum, seu satellitum, aliquid certi constitui possit, assumenda sunt observata quædam indubitata, ex quibus, quemadmodum in præcedentibus fecimus, sequelæ evidente nexu conjunctæ deducantur. Itaque observator noster, quem in sole collocatum supponemus, consideratis attente Saturni, Jovisque satellitibus, ac illo telluris comite, quem suo nomine *lunam* vocabimus, sequentes faciet animadversiones.

631. *Phænomenon* I. *Satellites Saturni, Jovis, ac terræ alternis vicibus ad partem orientalem, & occidentalem suorum primariorum conspiciuntur, jam in hanc, jam in alteram plagam digressi: cumque in maxima sunt digressione, quantum ex una, tantum ex altera parte distant; atque æqualibus fere temporis intervallis ad eandem ex eadem parte digressionem veniunt.* Sequens Tabula tempora reditus ad eandem digressionem, & quantitatem elongationis maximæ a centro eorum primarii exhibet.

	Tempora, quibus singuli satellites ad eandem ex eadem parte digressionem redeunt. Dies	horæ	minuta	secunda	*Digressio maxima orientalis & occidentalis satellitum in semidiametris primarii.*
Satellitum Saturni	1	21	18	27	$8\frac{7}{8}$.
	2	17	41	22	$11\frac{1}{4}$.
	4	12	25	12	15.
	15	22	41	14	36.
	79	7	48	0	108.
Satellitum Iovis	1	18	28	36	$5\frac{2}{3}$.
	3	13	18	52	9.
	7	3	59	40	$14\frac{1}{3}$.
	16	18	5	6	$25\frac{1}{3}$.
Lunæ	29	12	44	3	$60\frac{1}{5}$.

Ex his digressionibus & temporibus satellites alter ab altero distinguuntur: ita dicitur *satelles primus* Saturni, vel Jovis, ille, qui minimum omnium ab eo digreditur, minimoque omnium tempore revolutionem suam peragit; *secundus* est, qui post primum habet minimam elongationem, & sic de aliis.

632. Ex hoc Phænomeno sequitur, quod *quæcunque sit satellitum orbita, ea tamen in se redeat,* ut circulus vel ellipsis; & *quod planeta primarius*

marius sit in ea orbitæ hujus diametro, cujus directio ad solem tendit. Id enim nisi esset, digressio satellitum versus occidentem non foret æqualis digressioni versus orientem.

633. *Phænomenon* II. *Quando satellites a digressione occidentali ad digressionem orientalem progrediuntur, sæpissime fit, ut sub disco planetæ primarii occultentur, ultra quem consequenter transeunt: sunt tamen aliqui, qui vel supra, vel infra eundem transeunt, nunquam tamen cis eum.* Ex opposito, *in progressu a digressione orientali ad occidentalem, nunquam post discum primarii transeunt, sed ante eum; vel vero, si in priore casu ultra planetam supra discum transierunt, in hoc infra eum transeunt cis planetam, & vicissim.*

634. Ex hoc phænomeno tria deducuntur. Primo. *Satellites omnes versus eandem partem moveri.* Secundo. *Primarium esse intra eorum orbitas, seu, quod idem est, satellites circa primarios suos revolvi.* Tertio. *Plana orbitarum satellitum esse inclinata ad planum orbitæ primarii.*

Nam *primo*, si satellites non omnes moverentur eadem directione, quidam in progressu a digressione orientali ad occidentalem deberent cis primarium transire, quidam trans eum.

Secundo. Si orbita alicujus satellitis esset respectu solis tota trans primarium, satelles nunquam posset per discum illius transire; & si esset tota cis primarium, satelles nunquam foret sub disco.

635. Duplex igitur conjunctio cum primario contingit in revolutione satellitis; altera respectu solis trans primarium in transitu a digressione occidentali ad orientalem, diciturque *conjunctio superior*; altera cis eum in transitu a digressione orientali ad occidentalem, estque *conjunctio inferior*. Vocatur etiam *semicirculus superior* satellitis ea pars orbitæ, intra puncta digressionis orientalis & occidentalis maximæ comprehensa, in qua fit conjunctio superior; & *semicirculus inferior* pars altera, in qua fit conjunctio inferior.

Tertio. Si plana orbitarum satellitum essent parallela ad planum orbitæ planetæ primarii, producta transirent per solem, cum planum orbitæ cujusvis primarii per eum transeat: & hinc omnes satellites viderentur semper moveri in linea recta juxta diametrum planetæ (581), in qua a plano orbitæ suæ secatur: adeoque nunquam supra vel infra centrum sui primarii transirent, quando cum eodem sunt in conjunctione.

636. Illud quoque ex hoc phænomeno sequitur, quod si planetæ, eorumque satellites, aliud non habeant lumen, nisi quod a sole participant, quando satelles ante discum sui primarii in conjunctione inferiore transit, debeat illis planeticolis solem obtegere, qui infra ejus semitam habitant, seu, quod est idem, ejusmodi planeticolæ in ejus umbram incurrere debeant; unde horum respectu tunc *eclipsis solis* erit. Dum autem in conjunctione superiore infra

 discum

difcum primarii tranfit, fatelles in ejus umbram immergi debeat, ac tamdiu luce folari deftitui, oculisque eripi, quamdiu in illa umbra manet. Quare tunc incolis primarii continget *eclipfis fatellitis*, feu *lunæ*.

637. *Phænomenon* III. *Semitæ fingulorum fatellitum, fi ad centrum fui primarii referantur, quandoque totæ apparent rectilineæ, per centrum tranfeuntes, ac ad orbitam illius certa ratione inclinatæ. Paullo poft in ellipfes abeunt, quæ magis ac magis fefe pandunt, axibus ad parallelifmum cum plano orbitæ vergentibus, itaque apparent per quartam revolutionis annuæ primarii partem, poft quam conjunctiones fuperiores fiunt ex parte boreali centri primarii, & conjunctiones inferiores ad meridiem refpectu ejusdem: poft hæc durante altera quarta revolutionis parte ellipfes contrahuntur, earum axes contrariam priori inclinationem acquirunt, fatellites in conjunctionibus propius ad centrum tranfeunt, ita ut tandem ellipfes in lineas rectas videantur mutatæ, eadem quantitate, fed in partem oppofitam priori, inclinatæ. Tum per fequentem revolutionis annuæ quadrantem fefe rurfus in formam ellipticam explicant; conjunctiones fuperiores ad meridiem centri, inferiores ad boream contingunt. Denique ultimo revolutionis quadrante latitudo ellipfeos minuitur, omniaque ad priftinum fitum reftituuntur, primario ad idem orbitæ fuæ punctum redeunte. Hinc tamen excipi debet luna, cujus orbitæ phafes poft octoginta & fex dies femper mutantur, hoc eft, intervallo quinque fere diebus minore, quam fit quadrans revolutionis annuæ telluris, ita ut lunæ orbita, jam fecundo fiat rectilinea, dum terra adhuc 19°, 20′ percurrere debet, ut revolutionem integram abfolvat.*

638. Caufa hujus phænomeni eft obliquitas planorum orbitarum fatellitum ad planum orbitæ eorum primarii. Ex quo infertur, vias fatellitum eadem accurate debere habere phænomena cum femitis macularum planetarum, adeoque easdem deducendas effe fequelas. Sic

639. *Primo.* Dum via fatellitis apparet rectilinea, oculus obfervatoris, confequenter fol, debet effe (601) in plano illius orbitæ; & quia fol femper eft in plano orbitæ primarii (25), fequitur, folem tunc effe in linea communis interfectionis utriusque plani. Eft autem (242) fol femper in puncto diametraliter oppofito loco primarii: itaque via, quam fatelles defcribit, e fole vifa eft rectilinea, & per centrum primarii tranfit, dum primarius eft in linea interfectionis plani fuæ orbitæ cum plano orbitæ fatellitis.

640. Recta, in qua planum orbitæ fatellitis fecat planum orbitæ primarii, dicitur *linea nodorum*; & *nodus afcendens fatellitis* eft illud punctum, ultra quod conjunctiones fuperiores incipiunt fieri ad partem borealem centri primarii; *nodus* vero *defcendens* eft illud, ultra quod conjunctiones fuperiores incipiunt fieri ad partem meridionalem centri primarii.

641.

641. *Secundo.* Inclinatio harum rectarum indicat inclinationem plani orbitæ cujusvis ſatellitis ad planum orbitæ primarii (605).

642. *Tertio.* Omnes ejusdem primarii ſatellites eſſe in eodem plano, & habere nodum eundem, colligitur, ſi eorum orbitæ omnes ſimul appareant rectilineæ, & per centrum tranſeant, eandemque habeant inclinationem. Ex oppoſito, plana eorum, nodos, & inclinationem eſſe diverſa, infertur tum ex diverſa inclinatione viarum rectilinearum, tum ex diverſitate locorum, in quibus eſt primarius, quando ſatellitum orbitæ fiunt rectilineæ.

643. Atque hac ratione determinari poteſt inclinatio viæ rectilineæ, quam luna deſcribere videtur, ad planum eclipticæ, 5°, 9′ fere, qui angulus inclinationem orbitæ lunæ ad eclipticam menſurat; item retrogradatio annua nodorum lunæ 19°, 20′; nam dum terra ſuam revolutionem abſolvit, 19°, 20′ abeſt ab illo puncto, in quo via lunæ e ſole viſa ab initio revolutionis apparebat rectilinea.

Similiter invenitur, quod nodus aſcendens quinque ſatellitum Saturni ſit circa 20° ♒, numerationis initio a prima ſtella arietis facto, quoniam viæ omnium horum ſatellitum videntur rectilineæ, Saturno in 20° ♒ exiſtente; item quod plana orbitarum primorum quatuor inclinentur ad planum orbitæ ♄ circiter 30°; quinti vero fere 15°: ita, ut a 20° ♒ usque ad 20° ♌ conjunctiones ſuperiores fiant ad boream reſpectu centri Saturni. Pariter reperitur nodus aſcendens ſatellitum Jovis in 15° ♑; inclinatio eorum orbitarum circiter 2°, 55′. Denique hinc eruitur, nodos & inclinationem in his eſſe fere conſtantem, cum eædem phaſes redeant, dum Saturnus & Jupiter in iisdem circiter ſuarum orbitarum punctis verſantur.

644. Obſerva. In explicatione phyſica Theoriæ Lunæ patebit (Sect. VI. Cap. I. Art. VI.) lineam nodorum ſatellitum non poſſe eſſe immobilem, nec inclinationem conſtantem. Hinc etiam inæqualitates notabiles deprehenſæ ſunt, qua de re conſuli poſſunt, quæ in monumentis Acad. Reg. ſcient. diverſis locis a DD. Maraldi ſunt annotata.

645. *Quarto.* Si orbita ſatellitis circa ſuum primarium ſit valde arcta, eiusque planum exiguam inclinationem habeat ad planum orbitæ primarii, in omnibus conjunctionibus inferioribus ſatelles alicui parti ſuperficiei primarii ſolem occultat, atque illius aſpectum iis locis eripit ſucceſſive, per quæ umbra ab eo projecta tranſit, unde his locis tum *eclipſis ſolaris* fiet. In omnibus autem conjunctionibus ſuperioribus idem ſatelles umbram primarii trajicere debet, ac eclipſin pati.

646. *Quinto.* At ſi vel exiguam inclinationem habeat ſatellitis orbita, ſi magna admodum ſit, ut quarti & quinti ſatellitis Saturni; quarti item ſatellitis Jovis, & Lunæ, in conjunctionibus, quæ lon-

longe a nodis fiunt, dum orbita apparet ellipsis tam lata, ut ejus diameter minor diametrum primarii excedat, in conjunctionibus, inquam, inferioribus satelles nullam primarii partem soli obtegit, adeoque nulla tunc esse potest eclipsis solaris; & in conjunctionibus superioribus primarius radios solares, quo minus ad satellitem pertingant, non impedit; hinc nulla eclipsis satellitis, seu lunaris fit: itaque *eclipses non contingunt, nisi dum syzygiæ prope nodos orbium satellitum fiunt.*

647. Igitur planeta primario in ipso nodo momento conjunctionis inferioris existente, in eclipsi solari umbra satellitis per medium disci primarii transit; & in conjunctione superiore satelles per axem coni umbrosi a primario projecti transit.

648. Quo primarius longius a nodo abest, eo remotius a centro umbra satellitis per discum illuminatum in conjunctionibus inferioribus transit; eo etiam remotius a centro umbræ satelles in conjunctionibus superioribus transit.

649. Dum planeta primarius jam prope puncta illa suæ orbitæ attingit (attamen adhuc intra illa existit) in quibus si versetur, satellites remotiores non amplius patiuntur eclipsin (dicuntur ea puncta *limites ecliptici*), non nisi pars satellitis in conjunctionibus inferioribus aliquantum ex superficie primarii soli obtegit; & in conjunctionibus superioribus pars tantum satellitis in umbram primarii immergitur, eoque minor, quo primarius limitibus vicinior est. Ejusmodi eclipses vocantur *partiales*; aliæ *totales*. Igitur *eclipses, quæ fiunt prope nodos, sunt totales; quæ contingunt prope limites (attamen intra eos) partiales sunt.*

650. Illud quoque manifestum est, quod in conjunctionibus inferioribus eclipticis solis aspectus non eripiatur nisi illis locis superficiei primarii, quæ sunt in ipsa semita umbræ satellitis: igitur si planeta primarius respectu satellitis habeat magnitudinem non ita modicam, ejus incolæ ab intersectione cum eclipticæ plano remotiores, non habebunt eclipsin solarem, nisi quando satelles aliquantum distat a plano eclipticæ sui primarii versus illam partem, in qua ipsi habitant: & tunc illi, qui existunt ex altera eclipticæ parte, non videbunt hanc eclipsin. Hinc *respectu incolarum planetæ circa ejus polos habitantium, eclipsis solaris non contingit, nisi satelles habeat aliquam latitudinem ejusdem nominis cum elevatione poli horum incolarum.* Atque ideo Parisiis, ubi altitudo poli Borealis est 48°, 51′, eclipses solis non sunt notabiles, nisi luna in conjunctione habeat latitudinem borealem 30, vel 40 minutorum.

651. Ex opposito in conjunctionibus superioribus, dum satelles in umbram immergitur, ejus lux deficit, e quacunque mundi plaga spectetur. Unde fieri nequit, ut satelles respectu quorundam

patia-

patiatur eclipſin, non item reſpectu aliorum. Itaque dici poſſunt *eclipſes lunæ vel ſatellitum univerſales; ſolares vero tantum reſpectu aliquorum planetæ primarii incolarum fieri.*

652. In eclipſibus ſolaribus fieri poteſt, ut ſatelles e ſuo primario viſus non appareat tam magnus, ut ſpectatori totum ſolem tegat, ſed ſolummodo partem ejus circa centrum, limbis adhuc viſibilibus, & undique annulum lucidum efformantibus. Hujus generis eclipſis dicitur *eclipſis annularis.* Verum quando ſatelles ita magnus videtur, ut totum ſolem Planeticolis cooperiat, eclipſis ſimpliciter *totalis* appellatur.

653. Denique cum eclipſis ſolaris ſolum ex ſucceſſiva interpoſitione ſatellitis inter ſolem & planetam primarium oriatur, qua tractus quidam umbræ ſatellitis efficitur ſucceſſive per diverſa ſuperficiei primarii loca traſiens; facile intelligitur *primo*, eclipſin tunc incipere alicui ſpectatori, quando ſatelles motu ſuo adeo propinquus factus eſt loco ſolis apparenti, ut diſtantia centri ſatellitis a centro ſolis videatur æqualis ſummæ angulorum, ſub quibus ſemidiametri ſatellitis & ſolis eidem ſpectatori apparent; finiri autem tunc, quando centrum ſatellitis ad eandem diſtantiam a centro ſolis iterum receſſit. *Secundo*, ſpectatori in certo ſuperficiei Planetæ loco poſito tum primo videri eclipſin initium ſumere, quando alteri alio in loco ſito jam ejus medium eſt; imo finiri alicubi, dum alibi nondum incipit. *Tertio*, Planeticolas ad limbos interiores umbræ poſitos non niſi momento habere eclipſin totalem, dum alii profundius umbræ immerſi longiore tempore totalem habent. *Quarto*, Eos vero, qui ad limbum umbræ externum ſunt collocati, partem ſolummodo ſolis obſcuratam videre, eo quidem minorem, quo longius ab umbræ limite ſunt remoti, quippe quibus pars tantum ſatellitis ſolis aſpectum impedit, ita ut in certa a limbo umbræ diſtantia nulla prorſus eclipſis videatur. Atque hac ratione eadem eclipſis ſolaris poteſt eſſe totalis in certa Planetæ regione, partialis in altera: hic quidem obſcurari poteſt pars diſci ſolaris ſeptentrionalis, illic auſtralis.

654. At vero in eclipſibus ſatellitum, ut ſatelles umbram ingreditur, parteſque illius illuminari ac videri ceſſant; ita omnes, qui ſatellitem ſpectare poſſunt, vident eum tempore eodem eademque quantitate in umbram immergi; totum quidem, ſi eclipſis ſit totalis; partem, ſi ſit partialis. Univerſim, duo quivis ſpectatores nullam diverſitatem in phaſibus eclipſeos lunæ, aut ſatellitis obſervare poſſunt, quibuſcunque in locis ſint poſiti, modo ſatelles utrique ſit viſibilis.

655. Hinc deducitur, obſervationes temporum, quibus eædem phaſes in eclipſibus ſatellitum contingunt, peculiarem uſum habere in determinatione immediata differentiæ meridianorum locorum duorum, in quibus obſervationes ſunt factæ: ſed tempora obſervata in phaſibus eclipſium ſolarium eam differentiam non oſtendunt, niſi debitæ prius reductiones fiant: id, quod in ſequentibus uberius explicabitur.

656. Illud hic obſervandum, propagationem luminis, quæ non ſit inſtantanee, efficere, ut eadem phaſis eclipſeos e diverſis univerſi locis ſpectata eo tardius videatur contingere, quo oculus obſervatoris a planeta vel ejus ſatellite eſt remotior. Reipſa advertitur, ceteris omnibus paribus, eclipſes ſatellitum Jovis in ſuperficie telluris obſervatas fieri 8 circiter minutis temporis tardius, dum Jupiter eſt prope quadraturas ſuas cum ſole, quam dum eſt in oppoſitione. Jam vero planeta, dum prope quadraturas eſt, reſpectu terræ fere tantundem ab ea diſtat, quantum a ſole, quando autem eſt in oppoſitione, telluri vicinior eſt, quam ſoli, toto intervallo diſtantiæ terræ a ſole: unde concluditur, juxta obſervationes lumen indigere 8′, ut hanc diſtantiam percurrat, adeoque ſi ejus motus ſit æquabilis, radios e ſole exeuntes non niſi poſt 8′ circiter ad terram pertingere. Verum quia luna plus tercenties vicinior telluri, quam ſol, lumen non opus habet, niſi 2″ temporis, ut ab ea ad terram propagetur: hinc motus luminis in uſu obſervationum lunæ non attenditur.

657. *Phænomenon* IV. *Si motus ſatellitum referantur ad ſtellas fixas, & non ad centrum primarii; tres priores ſatellites Saturni, & primus Jovis, ſunt* Primo *ſtationarii, ſeu quodammodo immoti aliquo tempore in duobus locis orbitæ, nempe ante digreſſionem occidentalem, & poſt digreſſionem orientalem.* Secundo *directi ſunt, ſeu ſecundum ordinem ſignorum Zodiaci progrediuntur, poſt ſtationem occidentalem, usque ad ſtationem orientalem.* Tertio *fiunt retrogradi, ſeu moventur contra ſignorum ordinem, poſt ſtationem orientalem usque ad ſtationem occidentalem.* Quarto *quando hi planetæ ſecundarii ſunt in ſuis digreſſionibus, nec tardius, nec celerius, quam eorum primarii, moventur; ſed eorum velocitas augetur poſt locum alterum ſtationis usque ad proximam conjunctionem; inde vero retardatur usque ad punctum ſtationis ſequentis.* Quinto *longiore tempore indigent, ut a digreſſione occidentali veniant ad digreſſionem orientalem, quam ut ab hac ad illam pertingant, quamvis eorum velocitas major ſit in conjunctione ſuperiore, quam in inferiore.*

658. *Sed luna, quartus & quintus ſatelles Saturni; ſecundus, tertius & quartus Jovis ſemper ſunt directi, nunquam ſtationarii: in ſuis digreſſionibus eandem accurate habent velocitatem, quam eorum primarii, quemadmodum & reliqui; verum poſtea in tranſitu a digreſſione occidentali ad conjunctionem ſuperiorem, motum accelerant, tranſeuntque ultra primarium ad orientem: poſt conjunctionem ſuperiorem, velocitas eorum iterum minuitur, ita ut in digreſſione orientali æquetur velocitati primarii. Poſt hæc velocitas ita pergit minui, ut primarius motu ſuo ultra hos ſatellites in eorum conjunctione inferiore tranſeat, eosdemque poſt ſe ad occidentem relinquat. Hac peracta conjunctione celeritas ſatellitum augetur, fitque in digreſſione occidentali velocitati primarii æqualis, itaque deinceps easdem variationes apparentes continuat.*

659.

659. Quamvis omnia ista phænomena facile ex Theoria motus relativi & epicycloidum explicari possint, uti eam motui apparenti planetarum e terra viso superius applicuimus; ostendemus tamen, quomodo independenter ab hac theoria exponi queant.

660. Manifestum est, tria esse, quæ motui alicujus satellitis apparenti, dum ad stellam fixam quampiam refertur, varietatem inducunt, *primo* velocitatem realem satellitis. *Secundo* ejus directionem ad spectatorem relatam. *Tertio* velocitatem ipsius planetæ primarii, orbitam satellitis secum abripientis, adeoque ipsum etiam satellitem directione sui motus.

661. Velocitas vera satellitum ad sensum æquabilis est, utpote in orbitis fere circularibus motorum: supponamus talem quoque esse velocitatem primarii: inæqualitates enim motus proprii Saturni, Jovis, & terræ, tantæ non sunt, ut tam magnas variationes in his phænomenis efficere possent: supponamus præterea, S (Fig. 91) esse locum solis, I locum planetæ primarii in sua orbita directione IK progredientis. ODBG sit orbita satellitis. Ducatur ex S per I recta SO, quæ punctum O, in quo fit conjunctio superior, determinabit, uti etiam punctum C conjunctionis inferioris. Denique si rectæ SD, SG tangant orbitam, designabit punctum D digressionem orientalem, & G digressionem occidentalem.

662. *Primo.* Dum satelles est in sua conjunctione superiore ad O, cum ejus directio OA sit ad radium SO perpendicularis, seu, quod idem est, parallela, & versus eandem partem cum directione primarii, satelles, si ad punctum fixum referatur, videtur moveri velocitate æquali summæ velocitatis veræ propriæ & velocitatis veræ primarii: igitur velocitas & motus apparens satellitis est tunc omnium maximus, & directus.

663. *Secundo.* Quando satelles versatur in P, inter conjunctionem superiorem, & digressionem orientalem, cum ejus directio PQ sit ad radium SP obliqua, consequenter etiam ad directionem primarii IK; oculus in S constitutus nequit ejus velocitatem talem videre, qualis in se est; sed solummodo apparet ei ut PT, adeoque minor, quam reipsa sit: unde tunc satellitis motus videtur directus etiamnum, & æqualis summæ ex PT, & motu vero primarii. Atque adeo in transitu a conjunctione superiore ad digressionem orientalem satelles apparet directus, sed ejus velocitas magis, ac magis semper decrescit, cum ejus motus directio semper fiat magis obliqua respectu oculi observatoris.

664. *Tertio.* Quando satelles ad digressionem orientalem in D pervenit, quoniam ejus directio DR cum radio SD coincidit, debet videri nec secundum ordinem signorum IK, nec contra hunc

ordinem IM moveri; sed quemadmodum in eodem radio SD perstat, ita absque omni motu appareret, nisi motu primarii abriperetur. Igitur satelles in digressione orientali est directus, & ejus celeritas est accurate æqualis celeritati primarii.

665. *Quinto.* Post digressionem orientalem cum satelles ad H pervenit, ejus motus veri directio HF est contra signorum ordinem; sed quia ad radium SH obliqua est, ejus velocitas tantum apparet ut HN: & hic quidem triplex potest esse casus: nam vel HN est minor, quam velocitas vera primarii secundum signorum ordinem; & tunc excessu velocitatis veræ primarii supra velocitatem apparentem HN satelles abripitur a primario secundum ordinem signorum; vel HN est æqualis velocitati primarii secundum ordinem signorum; & tunc duabus his velocitatibus sese destruentibus satelles videtur sine motu, & stationarius. Vel denique HN major est velocitate vera primarii; & tunc satelles videtur retrogradus velocitate æquali excessui HN supra velocitatem veram primarii. Et quoniam directio motus satellitis semper minus obliqua fit ad radium e sole ductum, ita ut tandem in loco conjunctionis inferioris C sit ad eum normalis, consequens est, ut in transitu a digressione orientali usque ad conjunctionem inferiorem satellitis celeritas contra signorum ordinem augeatur, ejusque motus componatur ex differentia velocitatis veræ primarii, & velocitate apparente satellitis. Ergo in transitu a digressione orientali ad conjunctionem inferiorem, satelles videbitur stationarius, postea retrogradus celeritate crescente, si ejus velocitas apparens contra signorum ordinem possit primo quidem æquare, deinde vero superare velocitatem veram primarii, id, quod contingit in primo, secundo, & tertio ♄, & primo satellite ♃; verum si satellitis velocitas apparens contra signorum ordinem nequeat æquare velocitatem veram primarii secundum ordinem signorum progredientis, satelles nec stationarius, nec retrogradus apparebit, sed solum ejus velocitas videbitur minui: & hoc evenit lunæ, secundo, tertio & quarto satelliti ♃, item quarto & quinto ♄.

666. *Quinto.* In conjunctione inferiore ad C, cum satellitis directio CB contra signorum ordinem tota visui exponatur, differentia ejus a velocitate vera primarii erit hic omnium maxima. Itaque in conjunctione inferiore vel satellitis retrogradi velocitas est maxima omnium, quas toto retrogradationis tempore habet; vel vero si satelles semper manet directus, est omnium minima secundum signorum ordinem.

667. *Sexto.* In transitu a conjunctione inferiore ad digressionem occidentalem in G, directio motus veri & retrogradi satellitis, fit sem-

ſemper magis obliqua ad oculum obſervatoris, & hinc is ſemper magis retardari videtur: igitur differentia inter velocitatem apparentem ſatellitis, & velocitatem veram primarii ſemper creſcit: & hinc ſi ſatelles in conjunctione inferiore fuit retrogradus, ejus velocitas contra ſignorum ordinem decreſcit, ut primo fiat ſtationarius, poſtea directus; aut ſi in conjunctione inferiore non fuit retrogradus, ejus velocitas apparens ſecundum ordinem ſignorum ſemper magis creſcit.

668. *Septimo.* In digreſſione occidentali G manifeſtum eſt, apparentem velocitatem ſatellitis æqualem eſſe velocitati veræ primarii, quemadmodum in digreſſione orientali D.

669. *Octavo.* In tranſitu a digreſſione occidentali ad conjunctionem ſuperiorem, directio motus veri ſatellitis eſt ſecundum ſignorum ordinem, ſemperque minus obliqua fit ad obſervatoris oculum: unde hic ejus velocitas addenda eſt volocitati primarii, & ſumma utriusque ſemper creſcit usque ad conjunctionem ſuperiorem in O.

670. Ex his facile quoque apparet *primo*, cur velocitas ſatellitis retrogradi in conjunctione inferiore ſit minor velocitate in conjunctione ſuperiore, dum ſecundum ordinem ſignorum movetur; illa enim eſt differentia velocitatum verarum ſatellitis & primarii; hæc vero earundem ſumma. *Secundo* cur ſatelles longiore tempore indigeat, ut a digreſſione occidentali veniat ad digreſſionem orientalem, quam ut ab orientali ad occidentalem redeat: nam radii tangentes S E, S G nequeunt dimidiam orbitam ſatellitis intercipere, ſed tantum ejus partem D C B; alias enim inter ſe paralleli eſſe deberent, adeoque orbita ſatellitis ad infinitam a ſole diſtantiam remota. Hinc autem ſequitur, quod quo orbita alicujus ſatellitis minor fuerit, ac magis a ſole remota, eo tempus, quo inferior ſemicirculus deſcribitur, propius accedat ad æqualitatem cum tempore, quo ſemicirculus ſuperior percurritur, & ex oppoſito.

671. Verum ut inveniantur velocitates veræ ſatellitum, earumque ad velocitatem primarii ratio, ex digreſſionibus determinanda eſt ratio radii orbitæ eorum ad radium orbitæ primarii, nec non temporis revolutionis ad tempus revolutionis primarii. Etenim manifeſtum eſt, velocitatem alicujus corporis in orbita revoluti eo eſſe majorem, quo ejus orbita, vel orbitæ radius, major eſt, & ſimul quo tempus revolutionis eſt brevius; ut adeo *velocitates veræ planetarum ſint in ratione compoſita ex directa radiorum orbitarum, quas deſcribunt, & reciproca temporum periodicorum.*

672. Ut habeatur ratio radii orbitæ ſatellitis ad radium orbitæ primarii, inveniri debet, quoties radius orbitæ primarii contineat

femidiametrum ipfius primarii, atque is numerus, qui hoc indicat, per quantitatem digreffionis fatellitis dividi. In exemplo, cum femidiameter Jovis fit $18''\frac{1}{2}$ (vide Tabulam N. 170), fi quæratur in triangulo rectangulo, cujus cathetus minor eft $= 1$, & angulus ei oppofitus $= 18''\frac{1}{2}$, cathetus major, ea reperietur $= 11151$; itaque radius orbitæ ♃ continet 11151 femidiametros ♃; & fi 11151 dividatur per digreffionem primi fatellitis Jovis $5\frac{2}{3}$, quotus fit 1964, hinc orbita Jovis eft ad orbitam primi fatellitis ut 1964 ad 1.

673. Similiter, ut obtineatur ratio temporis periodici fatellitis ad tempus periodicum primarii, tempus revolutionis primarii dividendum eft per tempus revolutionis fatellitis. Atque ita fequens tabula conftruetur.

		Ratio radii orbitæ primarii ad radium orbitæ cujusvis fatellitis.	*Ratio temporis periodici primarii ad tempus periodicum cujusvis fatellitis.*	*Ratio velocitatis veræ fatellitis cujusque ad velocitatem veram primarii.*
Saturni	1	ut 2905 ad 1	ut 5702 ad 1	ut 5702 ad 2905.
	2	- - 2292 - - 1	- - 3932 - - 1	- - 3932 - - 2292.
	3	- - 1719 - - 1	- - 2382 - - 1	- - 2382 - - 1719.
	4	- - 717 - - 1	- - 675 - - 1	- - 675 - - 717.
	5	- - 238 - - 1	- - 135 - - 1	- - 135 - - 238.
Iovis	1	ut 1964 ad 1	ut 2449 ad 1	ut 2449 ad 1964.
	2	- - 1236 - - 1	- - 1220 - - 1	- - 1220 - - 1236.
	3	- - 778 - - 1	- - 606 - - 1	- - 606 - - 778.
	4	- - 443 - - 1	- - 260 - - 1	- - 260 - - 443.
Lunæ		ut 320 ad 1	ut $12\frac{1}{3}$ ad 1	ut $12\frac{1}{3}$ ad 320.

674. Ex hac tabula colligitur, primos tres Saturni fatellites, & primum Jovis, cum velocitatem veram habeant majorem, quam eorum primarii, debere videri retrogrados in conjunctione inferiore, reliquos perpetuo directos: item fecundum fatellitem Jovis cujus velocitas vera eft prope æqualis velocitati primarii, fere ftationarium debere effe in fua conjunctione inferiore.

675. Denique univerfim liquet, cujusvis fatellitis motum e fole vifum effe compofitum e motu illius proprio, & motu primarii; & hinc in fatellitibus duplex revolutionum genus attendendum effe, nempe inprimis revolutionem *periodicam*, feu tempus, quo fatelles e fuo primario fpectatus 360 gradus percurrit; deinde revolutionem *fynodicam*, quæ eft tempus, quo fatelles ad eandem refpectu folis phafin revertitur. Manifeftum autem eft, revolutionem periodicam excedi a fynodica toto eo tempore, quo fatelles in fua orbita arcum tot graduum defcribit, quot planeta primarius tempore revolutionis periodicæ fatellitis confecit.

676.

676. *Phænomenon* V. *Si tempora conjunctionum superiorum comparentur cum temporibus conjunctionum inferiorum in satellitibus Jovis & Saturni, eorum intervalla ad sensum æqualia sunt semirevolutionibus satellitum. At vero in luna hæc intervalla jam longiora sunt, jam breviora, quinque vel sex horis.*

Hoc Phænomenon junctum cum primo, ex quo constat, elongationes satellitum utrinque esse æquales ad sensum, ostendit, motum satellitum, quantum sensu percipitur, esse æquabilem, orbitasque eorum esse circulos, quorum centrum primarius occupat; motum autem lunæ irregularitatibus quibusdam notabilibus esse obnoxium, quas deinceps examinabimus.

677. Quod ad causam physicam motus satellitum circa suos primarios attinet, ea analoga est illi, ob quam ipsi planetæ primarii circa solem revolvuntur. Etenim radii vectores satellitum verrunt areas temporibus proportionales, cum orbitæ eorum sint circuli, in quorum centro sunt primarii: radii quoque orbitarum sunt ut radices cubicæ quadratorum temporum periodicorum circa primarios, quemadmodum id facili calculo e Tabula N. 631 reperitur. *Credibile igitur est, satellites moveri circa suos primarios motu projectionis cum vi centrali ad planetam primarium tendente composito.* In sectione sequente videbimus, quid effectum harum duarum virium augeat quandoque, minuatve.

SECTIO SEXTA.

Continens Partem Tertiam Astronomiæ Terrestris;

Sive

Explicationem Theoriæ lunæ e terra visæ; & hinc ducta analogia, aliorum satellitum, ut e suis primariis spectantur.

CAPUT I.

Theoria motuum lunæ.

678. Quamvis terra sit id respectu lunæ, quod sol respectu terræ, & hinc motus lunæ fere easdem leges sequatur, si ad terram referatur, quas terra respectu solis; attamen tam variæ in eo animadversæ sunt inæqualitates, ut maxima astronomorum sæculi superioris pars putarit, fieri non posse, ut eæ omnes ad legem quandam constantem revocentur. Atque hinc non nisi postquam a Newtono demon-

monstratum est, vera theoriæ satellitum elementa dependere a gravitate mutua solis, planetæ primarii, & ejus satellitis, tabulæ construi cæperunt, calculis motuum lunarium accuratioribus utiles. Nos ea solum in particulari discutiemus, quæ causis physicis omnium harum inæqualitatum cognoscendis sufficiunt.

ARTICULUS I.

De phasibus lunæ.

679. Phases lunæ dicuntur diversæ ejus disci figuræ, quas decursu lunationis integræ nobis exhibet. Nemo est, qui ignoret, die conjunctionis lunæ cum sole, quæ *novilunium*, sive *luna nova* appellatur, ejus discum in cælo non videri; die sequenti cornuta facie apparere, convexitate semper soli obversa, atque deinceps cavitatem semper minui usque ad oppositionem cum sole, sive *plenilunium*, seu *lunam plenam*, qua discum integrum circularem nobis obvertit. Post hanc pars lunæ occidentalis videri desinit, orientalis successive fit cornuta, semperque tenuior, usque dum ex integro dispareat: tum easdem successive formas resumit.

680. Causa horum phænomenorum in aperto est: luna corpus est globosum, nec lucidum, nec diaphanum. Lumen, quo eam videmus, e sole venit, quemadmodum nec terra aliud recipit, quam solare. Ex regulis autem opticis, & natura corporum sphæricorum, certum est

681. I. *A sole sensibiliter non nisi medietatem superficiei lunæ illustrari.* Itaque lunæ alterum hemisphærium semper illuminatur, alterum semper est obscurum.

682. Et hinc hemisphærium illuminatum dividitur ab hemisphærio obscuro per circulum maximum, cujus planum est semper perpendiculare ad rectam e sole ad lunam ductam. Compendii causa, hunc circulum vocabimus E.

683. II. *Nequit e globo, nisi dimidia circiter superficies, uno aspectu videri.*

684. Unde *primo* ex omnibus circulis maximis in superficie globi descriptis is solus integer videri potest, qui terminat hemisphærium visibile (sive, quod idem est, cujus planum est perpendiculare ad radium ex oculo ad centrum globi ductum); reliquorum vero omnium necesse est, ut medietas videatur. Circulum hemisphærium lunæ e superficie telluris visibile terminantem dicemus V.

685.

685. *Secundo* ſitus plani circuli V reſpectu telluris eſt conſtans, & ſemper figura circulari apparere debet.

686. III. Ex phænomenis phaſium lunæ manifeſtum eſt, hemisphærium illuminatum reſpectu hemisphærii e ſuperficie terræ viſibilis facere revolutionem integram ſingulis lunationibus circa lineam communis interſectionis planorum circulorum E & V, quæ neceſſario (Trig. 7) eſt aliqua diameter globi.

687. Hinc *primo* planum circuli E hemiſphærium illuminatum terminantis ſucceſſive omnes ſitus poſſibiles reſpectu radii ex oculo obſervatoris ad centrum lunæ ducti acquirit; conſequenter figura hujus circuli jam apparet circularis, jam elliptica, alias rectilinea, prout ejus planum ad illum radium vel perpendiculare, vel inclinatum fuerit, vel etiam ſecundum radii longitudinem diſpoſitum.

688. Ex revolutione circuli E circa diametrum circuli V fieri debet, ut pars ſuperficiei lunæ, quæ e terra illuminata apparet, ſemper comprehendatur inter duos ſemicirculos, quorum alter (medietas nempe circuli V) ſemper figura ſemicirculari videtur (685); alter, medietas circuli E, jam ſemielliptica, jam etiam inſtar lineæ rectæ.

689. His ita ſe habentibus, in conjunctione lunæ cum ſole, quando luna accurate inter terram & ſolem exiſtit, circulus E terminans hemiſphærium illuminatum, congruit cum circulo V, hemiſphærium viſibile terminante; ſed quoniam tunc hemiſphærium illuminatum, ſoli directe obverſum, a terra averſum eſt, nulla pars lunæ illuminata videtur.

690. Verum luna in ſua revolutione progrediente, hemiſphærium illuminatum ſucceſſive tranſit in hemiſphærium viſibile; ſemicirculi E & V ſe ad angulos ſphæricos acutos interſecant: & hinc aliquo poſt novilunium tempore ſpatium quoddam exiguum illuminatum, quod inter ſemicirculum occidentalem V, & ſemicirculum E comprehenditur, videri debet. Semicirculus ille E tunc apparet ellipticus, ſed ab initio parum a figura ſemicirculi differt, cum nondum longe a ſitu perpendiculari ad radium e terra ad lunam ductum ejus planum receſſit: convexitas porro hujus ellipſis obvertitur cavitati ſemicirculi V, & hinc luna cornuta apparet: apices utriusque cornu, qui ſunt vertices angulorum ſphæricorum, ſunt puncta extrema diametri lunæ, circa quam circulus E gyratur.

691. Quando circulus E ulterius ſemper in hemiſphærio viſibili progreditur, & ad apices utriusque cornu angulos majores efficit, ejus planum ſemper magis ad radium e terra ad lunam ductum inclinatur, ideoque ejus media pars ſemiellipſis videtur, quæ

ſemper magis contrahitur usque ad quadrantem revolutionis, ubi planum circuli E fit perpendiculare ad planum circuli V, atque adeo ſecundum longitudinem radii e terra ad lunam ducti porrigitur, ut ſemiellipſis jam in lineam rectam abeat, figura autem partis lunæ illuminatæ ſit ſemicirculus, ſemiperipheria diſci & diametro terminatus. Hæc lunæ phaſis dicitur *primus quadrans*, vel *quadratura prima*.

692. Continuante porro motum ſuum in hemisphærio viſibili ſemicirculo E, & cum ſemicirculo V angulos magis & magis obtuſos efficiente, ſemiellipſis (qua figura nempe ſemicirculus E videtur) convexitatem ſuam in partem oppoſitam medietati occidentali circuli V vertit: hinc magis ſemper, magisque ſe pandit, & parti illuminatæ lunæ figuram tribuit ſemper propius ad circulum integrum accedentem, quem quidem refert denique luna in oppoſitione cum ſole, quando planum circuli E fit ad radium e terra ad lunam ductum perpendiculare, totusque hic circulus videtur, & cum circulo V coincidit. Hæc phaſis lunæ *plenilunium* vocatur; & tunc circulus E æque dimidiam revolutionem abſolvit, ac ipſa luna.

693. Denique circulo E alteram ſemirevolutionem peragente eædem figuræ redeunt. Semicirculus E, qui cum ſemicirculo orientali V partem lunæ illuminatam comprehendit, fit denuo ſemiellipſis, primo quidem ſemicirculo admodum vicina, poſtea ſemper arctior, donec inſtar lineæ rectæ appareat, quod poſt tres revolutionis quadrantes contingit, diciturque ea phaſis, *ultimus lunæ quadrans*, vel *altera quadratura*. Poſt hanc phaſin ellipſis ſemper magis panditur, convexitate cavitati ſemicirculi V obverſa: diſparet denique, dum, luna nova, cum circulo V congruit.

ARTICULUS II.

Enumerantur præcipua elementa theoriæ motuum lunæ, ex obſervationibus Aſtronomicis deducta.

Antequam explicationem theoriæ phyſicæ lunæ aggrediamur, neceſſarium duximus, ut ſequentia, apud omnes recepta Aſtronomos, utpote non ex ratiocinio quodam phyſico, ſed ex ipſis deducta obſervationibus, tanquam certa conſtituamus.

694. I. Luna revolutionem integram reſpectu fixarum abſolvit intra 27 d. 7 h. 43′, 12″; reſpectu autem primi puncti ♈, intra 27 d. 7 h. 43′, 5″; atque hæc dicitur *revolutio periodica*: reſpectu ſo-
lis

lis *revolutio synodica* fit 29 d. 12 h. 44′, 3″; refpectu alicujus nodi fui, 27 d. 5 h. 5′, 35″: & refpectu fui apogæi, 27 d. 13 h. 18′, 34″, quæ *revolutio anomaliftica* appellatur.

695. II. Linea apfidum lunæ facit revolutionem integram refpectu primi puncti ♈ intra 8 annos, 309 dies, 8 horas, 20 minuta.

696. III. Linea nodorum lunæ habet motum retrogradum, & revolutionem integram refpectu primi puncti arietis abfolvit 18 an. 224 d. 5 h.

697. IV. Motus lunæ in fyzygiis eft admodum regularis, fcilicet in noviluniis & pleniluniis; verum alias inæqualitatibus valde mutabilibus eft obnoxius, quarum termini partim funt in quadraturis, partim in punctis orbitæ inter fyzygias & quadraturas mediis, quæ *octantes lunæ* vocantur.

698. *Primam quadraturam* dicemus illam, ad quam luna in tranfitu a conjunctione ad oppofitionem venit; *fecundam quadraturam* vero eam, ad quam venit, dum ab oppofitione ad conjunctionem tendit.

699 V. Orbita lunæ inclinatur ad planum eclipticæ fub angulo mutabili a 5° ufque ad 5°, 18′.

700. VI. Diftantia lunæ a terra, ex ejus parallaxi deducta, quando eft maxima, eft $64\frac{2}{3}$ femidiametrorum terræ; & dum eft minima, $55\frac{3}{4}$: ita, ut diftantia media fit $60\frac{1}{5}$ femidiametrorum terreftrium. Continet vero femidiameter terræ, fecundum menfuras ab aftronomis acceptas, pedes 19611500; confequenter diftantia lunæ media a centro terræ eft circiter 1180612300 pedum.

701. VII. Luna eft fere tercentis viginti vicibus vicinior terræ, quam fol. Eft enim (429) diftantia folis a terra 19230 femidiametrorum terreftrium.

702. VIII. Luna eft faltem quinquagefies minor tellure; nam fecundum obfervationes, diameter vera lunæ eft ad diametrum terræ ut 3 ad $11\frac{1}{7}$; confequenter foliditas, feu volumen (Elem. 718) ad foliditatem ut 27 ad 1384, feu ut 1 ad $51\frac{1}{4}$. At enim certum non eft, per hanc rationem exprimi rationem maffarum lunæ & terræ, cum incertum fit, an utraque ex eadem conftet materia, aut an utriusque fit eadem denfitas.

703. IX. Luna circa axem fuum rotatur intra 27 d. 7 h. 43′, 5″, hoc eft, tempore revolutionis periodicæ; quod ex eo deducitur, quod luna femper eandem nobis faciem obvertat. Etenim manifeftum eft, quod fi objectum quodpiam circa alterum moveatur, illudque alterum eadem fui parte femper refpiciat, fimul circa axem fuum vertatur, ea proportione, qua alterum circuit. Quisque hujus rei in fe ipfo experimentum capere poteft.

 704.

704. X. Maculæ lunæ videntur ſingulis revolutionibus motum quemdam particularem reſpectu centri ſui habere. Videntur enim tam in longitudine, quam in latitudine ad illud accedere; poſtea iterum recedere, ac in priſtinum ſitum redire. Vocatur vero hic motus *libratio lunæ*, quippe qui totum corpus lunare afficit.

ARTICULUS III.

De natura vis centralis lunæ reſpectu terræ; & ducta hinc analogia, de natura vis centralis planetarum reſpectu ſolis.

705. Cum diſtantia media lunæ a terra ſatis accurate ſit cognita, ſcilicet 60. 2 ſemidiametrorum terreſtrium, inveniri poteſt quantitas abſoluta, qua luna per vim centralem a directione motus projectionis ſingulis momentis verſus terram deflectitur. Inito autem calculo reperitur ea talis accurate, qualem exigit gravitas, ſeu vis illa acceleratrix, quam quotidie experimur, quæ corpora omnia noſtratia verſus centrum terræ propellit, dum libere cadentia 15.1 pedes intra primum lapſus ſui minutum ſecundum percurrunt, ſive intra minutum primum 54360 pedes, cum ſit (59) quadratum de $1''$ ad quadratum de $60''$, ut 15.1. ad 54360.

706. Et certe ſi ſupponatur, quod hæc gravitas ſit eadem cum vi centrali lunæ, cum vis centralis ſemper debeat eſſe in ratione reciproca duplicata diſtantiæ a centro (163), ſequitur, in diſtantia 60.2 ſemidiametrorum hanc fore $\frac{1}{60.2 \times 60.2}$ illius, quam luna in telluris ſuperficie haberet. Unde vis centralis lunam intra unum minutum primum verſus terram retrahet $\frac{54369}{60.2 \times 60.2}$, hoc eſt, 15 ped. accurate.

707. Sit jam LN (fig. 98) arcus orbitæ lunæ in diſtantia media, qui intra unum minutum primum percurritur: erit $32''$, $56'''\frac{1}{2}$, cum 360° tempore 27 d. 7 h. $43'$, $12''$ deſcribantur. Sit terra in centro hujus arcus C, ducantur CL, & CM occurrens in M tangenti LM: patet, MN reſpondere quantitati abſolutæ vis centralis lunæ. Eſt autem MN exceſſus hypotenuſæ CM ſupra latus CL = 1180612300 ped.; eſt item idem MN exceſſus ſinus totius CM ſupra coſinum CL (Elem. 788) anguli LCM = $32''$, $56'''\frac{1}{2}$; & juxta tabulas ſinuum hic exceſſus poſterior eſt 0.000000012754, ſinu toto aſſumto pro 1. Igitur eſt ut 1 ad 0.000000012754; ita 1180612300 ad 15 pedes. Ex quo apparet, vim centralem lunæ nil aliud eſſe, quam ejuſdem gravitatem in ratione quadrati ſuæ diſtantiæ a centro terræ imminutam.

708.

708. Obſerva. In hoc calculo neglecta fuit gravitas lunæ in ſolem, quæ ejus gravitatem in terram aliquantulum mutat, ut in ſequente Articulo videbimus, verum quæ in quantitatem repertam nullum ſenſibile diſcrimen inducit.

709. Analogia hinc ducta merito infertur, *vim centralem, qua corpus aliquod cæleſte circa alterum tanquam primarium volvitur, non eſſe aliud, quam ejus gravitatem in primarium.*

Articulus IV.

Da cauſis phyſicis, quæ diverſas inæqualitates lunæ in revolutione ſynodica efficiunt.

710. Si luna nullam aliam vim centralem haberet, quam qua ſingulis momentis verſus centrum terræ nititur, de ſe easdem omnino leges in ſuis inæqualitatibus ſequeretur, quas alii planetæ reſpectu ſolis obſervant; hoc eſt, deſcriberet ellipſin regularem & immotam, in cujus foco terra foret, areæque inter radios vectores comprehenſæ rationem temporum accurate ſequerentur. Verum quoniam omnes obſervationes lunæ in eo conſentiunt, quod ejus inæqualitates non ſolum in diverſis anomaliæ gradibus, ſed etiam in diverſis reſpectu ſolis poſitionibus ſint variæ, merito concluditur, *lunam ſimul præditam eſſe vi centrali in ſolem tendente, & in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a ſole variabili.* Sequela hæc ex eo videtur etiam legitima, quod luna, cum ſit corpus ſimilis naturæ, ac terra, nec hac magis a ſole remota, æque in ſolem debeat eſſe gravis. *Itaque diverſæ inæqualitates lunæ producuntur per diverſas mutationes, quas ejus vis centralis in ſolem efficit in vi centrali in terram*, quemadmodum id jam in particulari exequemur.

711. Et ne plures ſimul difficultates complicemus, ſupponamus primum, lunam æquabiliter moveri in circulum circa terram, quæ in ejus centro ſit conſtituta, dum ipſa interea tellus motu æquabili circulum circa ſolem tanquam centrum deſcribit.

Sit (Fig. 94 & 95) luna in quovis puncto L ſuæ orbitæ C R O Q. Ejus motus ſit ſecundum ordinem ſignorum directione L R Q. Sit locus terræ T, centrum orbitæ lunæ, S ſit ſol, O C S linea ſyzygiarum, C punctum conjunctionis (Fig. 94) vel oppoſitionis (Fig. 95), R quadratura proxima poſt tranſitum lunæ per C. Ducantur T S, & L S, quarum illa deſignet diſtantiam terræ a ſole, hæc diſtantiam lunæ ab eodem. Evidens eſt, quod propter ſitum lunæ in L ejus niſus verſus ſolem ſit major (Fig. 94), vel minor

(Fig. 95), quam nisus terræ versus eundem, in ratione ST^2 ad SL^2. Unde sequitur, in utroque casu nisum lunæ versus terram imminui. Et quidem de primo casu nullum videtur dubium (Fig. 94); de secundo idem manifestum erit, si cogitetur (Fig. 95), quod excessus vis centralis terræ in solem supra vim centralem lunæ in eundem reddat vim lunæ in terram eadem quantitate inefficacem, sicque terram vi lunæ quodammodo subtrahat.

712. Ut autem determinetur, quomodo, & qua proportione hæc diminutio fiat, ducatur per solem S recta LD, quæ sit ad TS, ut gravitas lunæ in solem ad gravitatem terræ in eundem, seu ut ST^2 ad SL^2; & super LD tanquam diagonali construatur parallelogrammum LGDF, cujus latera LG, DF sint parallela, & æqualia distantiæ ST. Itaque vis centralis lunæ in solem, quæ per LD exhibetur, potest in duas resolvi, alteram per LG designatam, quæ cum æqualis sit, & parallela ad ST, agit eadem directione, & quantitate, ac vis centralis terræ in solem, adeoque nullam in motu lunæ circa terram inæqualitatem producit; & in alteram LF, quæ exprimit eam partem gravitatis lunæ in solem, qua luna magis in solem nititur (Fig. 94) quam terra per suam gravitatem; vel (Fig. 95) repræsentat eam quantitatem, qua excessus gravitatis terræ in solem minuit gravitatem lunæ in terram. Jam vero cum terra plus tercenties magis distet a sole, quam a luna, recta SD respectu ST exigua est, adeoque DF, quantum ad sensum, coincidit cum parallela ST, & punctum F cum puncto A, ita, ut citra errorem sensibilem LA possit pro differentia virium terræ & lunæ in solem haberi, & pro quantitate vim inæqualitates motus lunæ producentem exprimente. Atque ideo hæc linea *expressio vis perturbatricis* nobis dicetur.

713. Producta, si opus sit, recta TL, construatur super LA tanquam diagonali parallelogrammum rectangulum LEAB: liquet, vim LA resolvendam esse in duas; nempe in LE, quæ cum sit in directione radii vectoris, nititur lunam (in hisce duabus figuris) a terra removere, adeoque exprimit quantitatem, qua vis perturbatrix imminuit gravitatem lunæ in terram; & in LB, quæ, utpote ad radium TL perpendicularis, sive tangens orbitæ lunæ, & directione LB agens, retardat velocitatem lunæ directione opposita ab L ad R progredientis. At enim dantur etiam casus, quibus puncto E inter T & L cadente, vis LE auget gravitatem lunæ in terram; item dantur alii, quibus directio vis LB conspirat cum motu lunæ, & ejus celeritatem auget.

Jam vero ratio linearum LA, LE, LB determinanda est, quæ vires has exprimunt, ut judicium ferri possit de modo, quo motum lunæ perturbant.

714. Lemma. *Si* a ± b *fit quantitas ejusmodi, in qua* b *refpectu* a *fit quam minima, dico, fupponi poffe, quadratum de* a ± b *effe* aa ± 2ab; *&* *errorem eo fore minorem, quo* b *ad* a *minorem rationem habuerit.*

Demonftratio. Nam fi b fit quantitas adeo parva, ut fupponi poffit $b = \frac{1}{\infty}$, quadratum de $a \pm b$ erit $aa \pm \frac{2a}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}$, ubi apparet effe $\frac{1}{\infty^2}$ infinitefimum fecundi ordinis, adeoque $= 0$, fi cum $\frac{2a}{\infty}$ conferatur: Quod fi igitur folummodo ponatur, b refpectu a effe admodum exiguam quantitatem, non autem infinite parvam, in quadrato de $a \pm b$, quod eft $aa \pm 2ab + bb$, terminus $+bb$ eo facilius negligi poteft, quo b refpectu a minorem rationem habet.

715. Hoc pofito, I: ob $DL : ST = ST^2 : SL^2$, & $SL = ST - HL$ (fig. 94), confequenter (714) $SL^2 = ST^2 - 2HL \times ST$, eft $DL : ST = ST^2 : ST^2 - 2HL \times ST = ST : ST - 2HL$; igitur $DL : ST = ST : ST - 2HL$; & $DL - ST : ST = ST - ST + 2HL : ST$, vel $DL - ST : ST = 2HL : ST$; & hinc $DL - ST = 2HL$. Simili argumento reperietur (fig. 95) $ST - DL = 2HL$. Univerfim itaque differentia inter DL & ST eft $2HL$, adeoque DS, quæ eft differentia inter DH & ST, eft $= 3HL$. Quoniam vero rectæ LG, FD, ST æquales funt, & (712) DF, quantum ad fenfum, coincidit cum SA; habetur $DS = TA$; & hinc $TA = 3HL$. Eft autem HL finus diftantiæ lunæ a proxima quadratura, five cofinus ejus diftantiæ a linea fyzygiarum; igitur *expreffio vis perturbatricis lunæ eft femper latus tertium trianguli rectilinei, in quo latus unum eft radius orbitæ lunæ, alterum triplum cofinus diftantiæ lunæ a proxima fyzygia.*

716. II. Si continuetur LH usque in I, erit $LI = 2LH$. Et fi demittatur perpendicularis IK in radium LT, productum, fi opus fit; triangula rectangula ILK, ATE fiunt fimilia, ob AE, KI parallelas: itaque eft $AT : LI = AE$ (five LB) : IK. Eft autem $AT : LI = 3HL : 2HL = 3 : 2$; ergo $LB : IK = 3 : 2$, & $LB = \frac{3}{2} IK$. Atqui IK eft finus anguli ITK, qui eft duplus anguli $KLI = CTL$, five angulo diftantiæ lunæ a linea fyzygiarum; hinc *vis* LB, *quæ motum lunæ in fua orbita accelerat, vel retardat, femper eft ut* $\frac{3}{2}$ *finus duplæ diftantiæ lunæ a linea fyzygiarum.*

717. III. In iisdem triangulis fimilibus ILK, ATE, habetur $AT : LI = 3 : 2 = TE : LK = TL + LE : TL + TK$; igitur $3TL + 3TK = 2TL + 2LE$. Si utrinque fubtrahatur $2TL$, manet $TL + 3TK = 2LE$, adeoque $LE = \frac{1}{2} TL + \frac{3}{2} TK$. (fi punctum E caderet intra L & T, foret $LE = \frac{1}{2} TL - \frac{3}{2} TK$). Eft autem

TK

TK cosinus anguli KTI, duplæ distantiæ lunæ a linea syzygiarum; *ergo vis* LE, *quæ vim centralem*, *sive gravitatem lunæ in terram minuit vel auget*, *est ut summa vel differentia dimidii radii*, & $\frac{3}{2}$ *cosinus duplæ distantiæ lunæ a linea syzygiarum.*

ARTICULUS V.

De combinatione causarum physicarum, *quæ regularem motum lunæ perturbant.*

718. Quoniam inæqualitates lunæ proveniunt ex combinatis inter se tribus viribus, quarum rationes Articulo præcedente jam invenimus; ut earum effectus proxime detegamus, illud nunc superest, ut limites reperiamus, in quibus hæ vires vel sunt maximæ, vel minimæ, vel nullæ.

Si pro singulis punctis arcus CR construatur triangulum TLA, semperque accipiatur TA = 3LH. . . .

719. I. Vis perturbatrix LA reperitur maxima, quando TA est maxima, ob TL constantem: hoc itaqne fit, dum LH æquatur radio TL, adeoque angulus RTL est rectus, sive dum punctum L est in C. Ergo *vis perturbatrix* LA *est maxima in syzygiis*, *ejusque expressio tunc est* 2TL.

720. Ob rationem contrariam LA est minima, quando TA vel LH evanescit, sive quando punctum L incidit in R: igitur *vis perturbatrix est minima in quadraturis*, & *exprimitur per* LT.

721. II. Quia angulus TLA mutari potest a 180° usque ad 0°, perpendicularis AE debet extra punctum L respectu T cadere, quando angulus TLA est obtusus; debet cadere in ipsum punctum L, dum angulus TLA est rectus; debet denique intra T & L cadere, quando angulus TLA est acutus. In primo casu determinat quantitatem LE exprimentem imminutionem gravitatis lunæ in terram, utpote cum tunc designet vim in directione puncto T opposita agentem. In casu secundo diminutio est nulla. In tertio casu exprimit LE vim gravitatem lunæ in terram augentem, directione nempe illius tunc versus T tendente.

722. III. *Vis* LB *nulla est*, quando sinus duplæ distantiæ a syzygiis evanescit: tunc enim etiam $\frac{3}{2}$ hujus sinus evanescunt; id, quod contingit *in syzygiis.*

723. *Vis* LB *fit maxima*, *dum luna est in octantibus.* Nam cum sinus omnium maximus sit 90°, necesse est, ut quando vis LB est maxima, dupla distantia lunæ a syzygia sit 90°; igitur ipsa distantia 45°.

Patet ex hoc, quod dum vis LB est maxima, fit $= \frac{3}{2}$ TL.

724.

724. IV. *Vis* L E *eſt maxima*, quando coſinus diſtantiæ a ſyzygia eſt maximus, quod contingit in ſyzygia, ubi L E congruit cum cum L A, adeoque in hoc caſu L E = 2 T L.

725. *Vis* L E *nulla eſt*, dum angulus T L A eſt rectus, aut quando termini eam exprimentes ſe mutuo deſtruunt, quod fit, ſi $\frac{1}{2}$ T L = $\frac{3}{2}$ T K, vel T L = 3 T K, vel $\frac{1}{3}$ T L = T K, hoc eſt, quando coſinus duplæ diſtantiæ lunæ a ſyzygia æquatur tertiæ parti radii. Eſt autem radii 1000000 pars tertia = 333333, quæ eſt coſinus 109°, 28′, cujus anguli dimidium eſt 54°, 44′: hinc *vis* L E *eſt nulla*, *quando luna a ſyzygia* 54°, 44′ *diſtat.*

726. Si quæratur expreſſio ejusdem vis L E in quadratura, cum tunc diſtantia a linea ſyzygiarum ſit 90°, coſinus dupli anguli 180°, ſeu 0°, æquatur radio T L; unde habetur L E = $\frac{1}{2}$ T L — $\frac{3}{2}$ T L = — T L. Ex quo apparet, quod in quadratura directio vis L E ſit R T, & quod gravitatem lunæ in terram augeat quantitate, quæ per T L vel R T poſſit exprimi.

727. V. Denique manifeſtum eſt & ex æquali diminutione gravitatis tam in oppoſitione, quam in conjunctione; & ex æquali ejusdem augmento tam in prima, quam in ſecunda quadratura, (patebit id etiam ſi pro ſingulis caſibus peculiares figuræ conſtruantur), *quod omnes inæqualitates motus lunæ, quæ in tranſitu ab una ſyzygia ad quadraturam proximam contingunt, eædem iterum redeant, iiſdemque gradibus, in tranſitu lunæ ab hac quadratura ad alteram ſyzygiam; & quod ab iſta ſyzygia usque ad ſequentem quadraturam priore rurſus incipiant ordine, & inde a quadratura uſque ad primam ſyzygiam denuo repetantur, & ſic deinceps.*

728. Obſerva Cum diſtantia lunæ a ſole circiter $\frac{1}{180}$ minor ſit in conjunctionibus, quam in oppoſitionibus, vis perturbatrix, conſequenter etiam inæqualitates motus, ſunt paullo majores circa conjunctionem, quam circa oppoſitionem. Verum tantilla variatio hic a nobis negligi debet, cujus ratio non niſi in accuratis motuum lunæ calculis habenda eſt.

ARTICULUS VI.

Exponuntur effectus, qui ex viribus tribus allatis, ac inter ſe compoſitis oriuntur.

Si præciſa interea utriusque orbitæ lunæ, ac terræ eccentricitate, ſupponamus, hæc duo corpora ab initio determinata fuiſſe, ut alterum quidem circa ſolem magnum circulum deſcriberet, alterum vero minorem circa tellurem, in plano vicino admodum eclipticæ, ſequentia theoremata conſtitui poſſunt.

729 THEOREMA I *Vis perturbatrix minuit gravitatem lunæ in terram, quando luna eſt in ſyzygiis; & auget eandem, dum eſt in quadraturis:*

ſed decrementum in ſyzygiis eſt duplum augmenti in quadraturis.

730. THEOREMA II. *Quatuor ſunt puncta in orbita lunæ, ſingula 54°, 44′ utrinque a ſyzygiis, in quibus gravitas lunæ in ſolem non mutat ejusdem vim centralem in terram.*

731. THEOREMA III. *Variatio vis centralis lunæ in terram nititur ejus orbitam planiorem reddere circa ſyzygias, & magis curvam circa quadraturas (80), ita ut orbita lunæ, ſi ab initio circularis fuit, debuerit in ovalem, ſive ellipticam mutari, in qua axis major eſt in linea quadraturarum, axis minor in linea ſyzygiarum, & in centro tellus.*

732. THEOREMA IV. *Velocitas lunæ a ſyzygiis usque ad quadraturas minui debet; & a quadraturis usque ad ſyzygias augeri.* Cum enim axes curvæ ſint perpendiculares ad tangentes per eorum extrema puncta ductas (Elem. 772 & 773); & velocitates in curvis ſint (86) in ratione reciproca perpendiculorum e centro virium demiſſorum in tangentes curvas in iis locis, in quibus ſunt corpora; manifeſtum eſt, lunam tanto velocius debere moveri in ſyzygiis, quam in quadraturis, quanto magis ſemiaxis minor orbitæ exceditur a ſemiaxe majore.

733. THEOREMA V. *Quantitas, qua velocitas lunæ decreſcit, dum a ſyzygia ad quadraturam tendit, vel qua augetur, dum a quadratura ad ſyzygiam movetur,* (eſt hæc quantitas illa, quam producit vis L B) *debet creſcere a ſyzygia uſque ad vicinum octantem, & ab hoc usque ad quadraturam proximam decreſcere: eſtque ſemper in ratione ſinus duplæ diſtantiæ lunæ a ſyzygia.* Hæc inæqualitas dicitur *variatio lunæ.*

734. THEOREMA VI. *In ſyzygiis, & quadraturis luna deſcribit in ſua orbita arcus, qui cum radiis vectoribus comprehendunt areas temporibus proportionales; aliis vero in locis areæ, quas verrunt radii vectores, eo minus ſequuntur accuratam rationem temporum, quo luna octantibus eſt propior.*

Etenim in ſyzygiis & quadraturis directio vis perturbatricis L A coincidit cum radio vectore lunæ, adeoque vis compoſita ex hac vi perturbatrice & gravitate lunæ tendit verſus centrum terræ: in omnibus aliis punctis vis L A eo magis obliqua eſt ad radium vectorem T L, quo luna eſt vicinior octantibus; & hinc eo magis etiam directio vis compoſitæ ex vi perturbatrice, & gravitate lunæ, a centro telluris diſcedit.

735. Obſerva. Quamvis hucusque ſuppoſuerimus, orbitam lunæ eſſe circulum, quæ reipſa eſt ellipſis, cujus focum terra occupat; nihilominus facile intelligitur, quod etiam in ellipſi inæqualitates expoſitæ ſuum effectum ſortiri debeant, atque arcus elliptici magis convexi fieri in quadraturis, minus in ſyzygiis; & hinc per easdem inæqualitates luna debeat in quadraturis longius a terra recedere, & magis ad eam accedere in ſyzygiis. Et alias etiam

elli-

ellipsis lunæ est parum admodum eccentrica. Quia porro vis centralis lunæ in syzygiis minuitur, & in quadraturis augetur, patet, quod hæc vis jam sit minor, jam major, quam ut exactam rationem reciprocam duplicatam distantiæ lunæ a tellure sequatur, id, quod tamen est necessarium (163), ut orbita lunæ sit ellipsis regularis, in cujus foco terra existat.

736. Hoc distantiarum discrimen, una cum eccentricitate orbitarum lunæ & terræ, & inclinatione plani orbitæ lunæ ad planum eclipticæ, causa sunt quinque inæqualitatum periodicarum admodum notabilium in motu lunæ; scilicet *primo* inæqualitatis in tempore plurium revolutionum periodicarum continuarum lunæ. *Secundo* motus lineæ apsidum. *Tertio* mutationis continuæ in eccentricitate orbitæ lunæ. *Quarto* retrogradationis nodorum lunæ. *Quinto* denique mutationis in inclinatione orbitæ. Hæc jam singillatim sequentibus theorematis exponentur.

737. THEOREMA VII. *Tempus revolutionis periodicæ lunæ majus est, quando terra est in perihelio, quam dum est in aphelio.*

Demonstratio. Quo terra soli vicinior est, eo gravitas terræ & lunæ in solem est major, adeoque etiam major est in syzygiis immunitio gravitatis lunæ in terram: & quamvis sit etiam majus tunc augmentum illius in quadraturis; nihilominus cum diminutio sit fere duplo major augmento (729), universim apparet, lunam minus gravitare in terram, dum hæc est in perihelio, quam dum est in aphelio, adeoque etiam minus ad terram accedere in primo, quam in secundo casu. Ex quo sequitur, ceteris omnibus paribus, orbitam lunæ esse majorem terra in perihelio existente, quam dum ea est in aphelio. Sunt autem (168) tempora revolutionum periodicarum ut radices quadratæ axium majorum orbitarum, & hinc majora, quando orbitæ sunt majores: ergo tempus revolutionis periodicæ lunæ majus est, & illius celeritas angularis minor, dum terra est in perihelio, quam dum est in aphelio.

738. Ob eandem rationem patet, tempus revolutionis lunæ respectu apogæi, & nodi sui majus esse, dum terra versatur in perihelio, quam dum est in aphelio.

739. Corollarium. Igitur motus medii lunæ, ejus apogæi, & nodi non sunt uniformes per totum annum, sed indigent æquatione, quæ dependet a velocitate, quam tunc habet tellus, & consequenter ab æquatione centri solis.

740. THEOREMA VIII. *Linea apsidum lunæ directe progreditur, sive secundum ordinem signorum, dum luna est in syzygiis; & regreditur, dum luna est in quadraturis: progreditur velocitate maxima, quando coincidit cum linea syzygiarum; & regreditur velocitate maxima, dum congruit cum linea*

quadraturarum: summa quantitatum, quibus pluribus continuis revolutionibus progreditur, superat summam quantitatum, quibus iisdem revolutionibus regreditur: ex quo fit, ut linea apsidum absolvat integram revolutionem secundum signorum ordinem fere intra novem annos.

Demonstratio. *Primo.* Quoniam alternum augmentum, & decrementum gravitatis lunæ in terram efficit, ut vis centralis jam sit minor, jam major, quam requirat ratio reciproca duplicata radii vectoris (735); sequitur (174), supponi non posse, orbitam lunæ esse ellipsin, cujus focum terra occupet, nisi simul linea apsidum mobilis supponatur. In hac autem hypothesi, motus lineæ apsidum est directus in syzygiis, ubi vis centralis minor est: & retrogradus in quadraturis, ubi vis centralis est major.

741. *Secundo.* Quia decrementum vis centralis in syzygiis non solum duplum est incrementi in quadraturis; sed etiam se extendit usque ad 54°, 44′ utrinque a syzygiis, dum incrementum non nisi per 36°, 16′ utrinque a quadraturis durat; manifestum est, motum retrogradum excedi a directo, atque hinc apogæum debere sensibiliter progredi secundum ordinem signorum.

742. *Tertio.* Evidens est, quod cum orbita lunæ sit ellipsis, in cujus foco est terra, distantiæ TL non sint per totam orbitam æquales, sed minores versus perigæum, & majores versus apogæum: igitur vis perturbatrix LA, quæ in syzygiis est semper $= 2$ TL (719), eo major est, quo luna in syzygiis vicinior est suo apogæo; & ex opposito eo minor, quo luna propior est perigæo. Sit distantia lunæ in apogæo $= D$, & in perigæo $= d$: quando linea apsidum coincidit cum linea syzygiarum, vis perturbatrix maxima est, & $= 2D$ in syzygia apogæi; & eadem vis minima, ac $= 2d$ in syzygia perigæi. Quod si jam vis perturbatrix abesset, vis centralis lunæ in apogæo esset ad vim centralem lunæ in perigæo, ut dd ad DD; verum quia reipsa vis perturbatrix adest, eæ vires centrales sunt inter se ut $dd - 2D$ ad $DD - 2d$; quæ ratio tanto magis recedit a ratione $dd : DD$, reciproca duplicata distantiarum, quanto D majus est, quam d; est autem D distantia omnium maxima, & d omnium minima: igitur quando linea apsidum coincidit cum linea syzygiarum, vires centrales lunæ omnium maxime discedunt a ratione reciproca duplicata distantiarum: adeoque tunc vis perturbatrix effectum maximum præstat, qui est, ut linea apsidum cum velocitate maxima progrediatur.

743. Verum in eodem casu, quo lineæ syzygiarum & apsidum coincidunt, puncta distantiarum mediarum lunæ a terra sunt quam proxima lineæ quadraturarum QR; & vis centralis lunæ in R est ad ejus vim centralem in Q, ut $TQ^2 + TR$ ad $TR^2 + TQ$. Hæc

ra-

ratio eo minus recedit a ratione reciproca duplicata diſtantiæ, quo T Q minus differt a T R: ſunt autem hæ duæ quantitates æquales, quia puncta Q & R ſunt circa diſtantias medias lunæ; igitur dum linea apſidum coincidit cum linea ſyzygiarum, vis perturbatrix L A quam minimum officit rationi reciprocæ duplicatæ diſtantiarum lunæ a terra in quadraturis: & hinc linea apſidum tunc regreditur cum minima velocitate.

744. Simili ratiocinio facile demonſtratur, quod dum linea apſidum coincidit cum linea quadraturarum, eadem progrediatur cum minima velocitate, quando luna eſt in ſyzygiis, & regrediatur cum maxima velocitate, quando luna eſt in quadraturis.

745. Obſerva. Complures Geometræ demonſtrarunt, quod quamvis vis perturbatrix 2 T L poſſit motum lineæ apſidum lunæ inæqualem reddere, nequeat tamen niſi dimidiam circiter velocitatem illius, quæ per obſervationes Aſtronomicas determinata eſt, in hoc motu efficere, atque ideo aliæ hic addeſſe debeant conditiones, quæ effectum hujus vis augeant. Qua de re conſuli poſſunt ea, quæ DD. Euler, Clairaut, & d'Alembert ſcripſerunt, qui tamen motum apogæi lunæ obſervationibus conformem ex ſyſtemate gravitatis deduxerunt.

746. Theorema IX. *Eccentricitas orbitæ lunæ ſingulis momentis mutatur: maxima eſt, dum linea apſidum incidit in lineam ſyzygiarum; minima, dum linea apſidum cum linea quadraturarum congruit.*

Demonſtratio. Si vis perturbatrix L A vel non minueret vim centralem lunæ in ſyzygiis, vel dum minuit, non mutaret rationem ad diſtantiam, vis centralis eadem ratione, iisdemque gradibus, a tranſitu per perigæum ad apogæum decreſceret, qua in tranſitu ab apogæo ad perigæum crevit, ideoque luna tantum in priore caſu recederet a centro terræ, quantum in poſteriore accederet, & eccentricitas orbitæ lunæ foret conſtans. Verum ſi decrementum vis centralis lunæ, quod vis perturbatrix L A efficit, majus eſt, dum vis centralis in tranſitu a perigæo ad apogæum decreſcit; & minus, dum vis centralis in tranſitu ab apogæo ad perigæum creſcit, ita ut ratio reciproca duplicata diſtantiarum magis turbetur, dum vis centralis decreſcit, quam dum creſcit; evidens eſt, quod pro ratione hujus perturbationis luna debeat magis recedere a cento terræ in tranſitu a perigæo ad apogæum, & minus accedere ad illud in tranſitu ab apogæo ad perigæum; & hinc eadem proportione diſtantia apogæi fieri major, & diſtantia perigæi minor, adeoque eccentricitas augeri.

Cum autem dicta ratio reciproca omnium maxime perturbetur (742), quando linea apſidum congruit cum linea ſyzygiarum, patet, quod tunc etiam eccentricitas omnium maxima eſſe debeat. Argumento contrario, cum linea apſidum incidente in lineam quadraturarum, augmentum vis centralis ſit fere idem in tranſitu lunæ

 a peri-

a perigæo ad apogæum, ac in tranſitu ab apogæo ad perigæum ratio reciproca duplicata diſtantiarum per illud omnium minime turbatur, adeoque etiam eccentricitas orbitæ lunæ omnium minime augetur.

747. THEOREMA X. *In ſingulis lunæ revolutionibus nodi illius orbitæ ſunt ſemper ſtationarii, dum luna eſt in quadratura; ut plurimum ſunt retrogradi, dum luna eſt in ſyzygiis: regrediuntur maxima velocitate ab una usque ad alteram quadraturam, quando linea nodorum coincidit cum linea quadraturarum; & eodem intervallo regrediuntur minima velocitate, dum linea nodorum congruit cum linea ſyzygiarum.*

748. THEOREMA XI. *In ſingulis lunæ revolutionibus angulus inclinationis illius orbitæ ad planum eclipticæ augetur ab una ſyzygia ad quadraturam proximam, & minuitur a quadratura uſque ad ſyzygiam ſequentem. Hic angulus eſt omnium maximus in quadratura, dum linea nodorum congruit cum linea ſyzygiarum; & eſt omnium minimus in ſyzygia, dum linea nodorum cum linea quadraturarum coincidit.*

Demonſtratio utriusque præcedentis Theorematis. Si planum orbitæ lunæ non eſſet inclinatum ad planum eclipticæ, parallelogramma L G D F, L E A B (fig. 94 & 95), quæ exhibent reſolutionem diverſarum virium centralium lunam moventium, forent in plano eclipticæ, adeoque nihil agerent ad dimovendam lunam ex hoc plano; ſed quia planum orbitæ lunaris circiter ſub angulo 5°; 9′ eſt inclinatum, ſequitur, dicta parallelogramma non eſſe in plano eclipticæ, niſi luna L in aliquo ſuorum nodorum verſante, & tunc diverſas illas vires in lunam agentes nihil in ſitu plani illius orbitæ poſſe mutare. Verum quando luna L aliquam latitudinem habet, ſi ſtricte loquamur, nulla linea parallelogrammi L G D F eſt in plano eclipticæ. Interea tamen quemadmodum ſuppoſuimus D F coincidere cum S T, ita triangulum T L A concipiendum eſt, tanquam latus illius T A foret in plano eclipticæ, & reliqua duo T L, L A ad idem planum eſſent inclinata. Ex puncto A (fig.99) ducatur A V ad planum orbitæ lunæ (quod ſufficienter productum ſupponitur) perpendicularis, ita ut punctum V ſit in eo plano, & conſtruatur parallelogrammum L M A V, cujus diagonatis ſit L A, ut hæc vis L A in duas reſolvatur, alteram L M = A V, ad planum orbitæ lunæ perpendicularem; alteram L V, quæ ſit in plano ipſo orbitæ. Quoniam latus L V ſemper admodum magnum eſt reſpectu lateris L M, & ob angulum inclinationis orbitæ lunæ exiguum, angulus V L A valde parvus, ſumi poteſt L V = L A. Vidimus autem jam theorematis præcedentibus effectus vis L A; unde hic reſtat, ut eos perpendamus, quos L M producit, ejusque rationem ad augmentum & decrementum vis centralis lunæ inveſtigemus.

974.

749. Ut ratio vis L M five A V ad T L, quæ incrementum vis centralis in quadratura exprimit, inveniatur, fit T P linea nodorum; e puncto V demittatur ad eam perpendiculum V P, & jungatur P A. Manifeftum eft (Elem. 630) angulum V P A effe æqualem inclinationi plani orbitæ lunæ ad planum eclipticæ. Habetur igitur T R (five T L): T A = R: 3 *fin* L T R (715); TA: A P = R: *fin* A T P (Elem. 747); & AP: A V (five L M) = R: *fin* A P V. Multiplicatis jam his rationibus inter fe, & prima per T A × A P divifa, fit (Elem. 296) T L : L M = R^3: 3 *fin* L T R × *fin* A T P × *fin* A P V, hoc eft, *augmentum vis centralis in quadraturis eft ad vim agentem in planum lunæ, ut cubus radii ad factum ex triplo finus diftantiæ lunæ a quadratura in finum diftantiæ nodi a fyzygia ductum in finum inclinationis orbitæ lunæ*. Ex quo fequitur *primo*, hanc vim evanefcere in tribus cafibus: quando luna eft in quadraturis; quando linea nodorum incidit in lineam fyzygiarum; & quando latitudo lunæ eft nulla. Nam in fingulis iftorum cafuum unus e finibus evanefcit, hinc factum ex eo in reliquos pariter eft = o. *Secundo* fequitur, hanc vim effe maximam, dum luna exiftens in fyzygiis eft fimul in fuis limitibus. Tunc enim tres finus, quibus factum conftat, funt maximi. *Tertio*, univerfim hanc vim eo effe majorem, quo cum majore latitudine luna fyzygiæ eft propior.

750. Effectus vis L M eft, ut lunam continuo verfus planum eclipticæ impellat, in quod tendunt vires T L, A L; confequenter vis L M non modo nititur inclinationem orbitæ lunæ ad planum eclipticæ minuere, fed etiam efficit, ut luna citius ad planum eclipticæ perveniat, illudque tranfeat, quam dempta hac vi fieret. Unde deducitur, quod ficut vis L M augetur, minuitur, vel prorfus evanefcit; fic etiam inclinatio orbitæ lunæ minuatur, augeatur, vel maxima fiat; ac nodus, verfus quem luna progreditur, ad eam plus, minusve accedat, aut immotus maneat.

751. Etenim fit *primo* luna in L in tranfitu a conjunctione ad primam quadraturam R: patet, ob nifum verfus M, & motum proprium fecundum ordinem fignorum verfus N, lunam (67) debere fequi viam mediam L *n*, quæ fit in directione diagonalis parallelogrammi, cujus latera exprimunt rationem utriusque tendentiæ: igitur orbita lunæ acquiret fitum L *n*, ita ut nodus *n* ab N verfus *n* accedat contra fignorum ordinem, & inclinatio orbitæ, feu angulus fphæricus L *n* D augeatur. Idem fit in tranfitu (727) ab oppofitione ad fecundam quadraturam. *Itaque univerfim in tranfitu a fyzygia ad quadraturam proximam nodus lunæ regreditur, & inclinatio orbitæ augetur.*

752. Sit *ſecundo* luna in *l* in tranſitu a ſecunda quadratura ad conjunctionem, ſit *l m* directio vis lunam ad planum eclipticæ admoventis: manifeſtum eſt, quod ob duplicem niſum *l m*, & *l* C, motus proprii ſecundum ſignorum ordinem, luna debeat directione media *l* Q moveri, & ejus orbita D *l* C acquirat ſitum *d l* Q, quo fit, ut angulus inclinationis *l d m* reddatur minor angulo *l* D *m* ac ut nodus e loco D moveatur contra ſignorum ordinem in *d*. Ergo *in tranſitu a quadratura ad ſequentem ſyzygiam, nodus lunæ regreditur, & inclinatio orbitæ minuitur.*

753. Univerſim itaque apparet, *nodum lunæ nunquam ſecundum ordinem ſignorum moveri; ſtationarium eſſe, quando luna eſt in quadratura, vel ſine latitudine; in omnibus aliis caſibus eum regredi celeritate eo majore, quo luna ſyzygiæ eſt propior, & quo majorem habet latitudinem.*

754 *Quod ad inclinationem orbitæ lunæ attinet*, liquet, eam quater ſingulis revolutionibus mutari: bis augeri, bis minui: *eſt ea maxima, dum linea nodorum coincidit cum linea quadraturarum; minima, dum linea nodorum incidit in lineam ſyzygiarum.*

ARTICULUS VII.

De libratione lunæ.

755. Cum luna ſingulis ſuis revolutionibus circa terram pluribus inæqualitatibus notabilibus ſit obnoxia, dum motus rotationis illius (229) æquabilis manet, conſequitur, duos hos motus haud debere inter ſe ſemper congruere. Exempli cauſa, ſi dum luna accurate quartam partem ſuæ rotationis abſolvit, nondum quadrantem ſuæ revolutionis in orbita confecit, quod ejus celeritas tam in tranſitu per apogæum, quam ob concurſum duarum virium centralium, quibus movetur, diminuta ſit; maculæ, quæ ſunt ad limbum orientalem lunæ, debent videri ulterius in diſco progreſſæ. Oppoſitum eveniret, ſi aucta lunæ celeritate, eodem tempore plus quam quadrantem in ſua orbita percurriſſet.

756. Altera cauſa, quæ cum priore concurrit, eſt inclinatio plani æquatoris lunæ ad ſuam eclipticam. Ob hanc inclinationem fieri debet, ut quivis æquatoris polus ſit oculo in plano eclipticæ lunæ poſito conſpicuus tempore ſemirevolutionis, & tempore alterius ſemirevolutionis occultetur, ut ſuperius (603) vidimus. Verum quia ob motum lunæ in latitudinem oculus in ſuperficie terræ conſtitutus jam eſt ſupra planum eclipticæ lunæ, jam infra illud; ex hac diverſa oculi poſitione, juncta cauſis duabus jam expoſitis,

tis, magna varietas in phænomenis librationis oriri debet; quæ singillatim discutere, nimis longum foret.

Articulus VIII.

De inæqualitatibus motus telluris e gravitate lunæ provenientibus.

757. Si tellus omni destituta esset satellite, nulla in eam daretur actio, quæ quidem sentiri posset, præterquam gravitatis in solem; sed quoniam lunam, cujus vis centralis in eam tendit, perpetuo sibi adjunctam habet, fieri non potest, quin motus telluris circa solem perturbetur, lunæque reactione velocitas telluris augeatur, dum lunæ velocitas minuitur, & vicissim.

758. Interea tamen hæ inæqualitates in motu telluris annuo exiguæ sunt, quippe quæ alias in motu apparente solis perciperentur. Inæqualitates lunæ, quæ ex combinatione gravitatis mutuæ lunæ, solis, & telluris oriuntur, & quarum summa ad tres circiter gradus exurgit, non essent nobis sensibiles, nisi tanta esset lunæ, ac terræ vicinia; itaque eædem inæqualitates e sole spectatæ 320 vicibus minores videri debent, consequenter 33″ aut 34″ ad summum. Si igitur luna omnes suas inæqualitates actione sua in terram transferret, motus annuus apparens solis inde non posset plus turbari, quam 34″, quæ quantitas exigua prorsus est. Verum cum luna sit 51 vicibus minor tellure, & massa quoque ejus certo minor sit, quam massa terræ, manifestum est, actione lunæ in terram non posse in terra inæqualitates tam magnas effici, ac oriantur in luna actione terræ in lunam. Hinc gravitas mutua lunæ ac terræ impedire nequit, quo minus eadem fere accuratione calculi motus apparentis solis, sive veri telluris, procedant, ac si tellus nullum haberet satellitem.

759. Geometræ, qui effectus actionum mutuarum lunæ & telluris ad calculos exactissimos revocarunt, deprehenderunt, ex omnibus inæqualitatibus lunæ maxime sensibilem in motu terræ esse *variationem lunæ*, consentientibus etiam observationibus (vide Monum. Acad. Scient. Reg. Parif. ad A. 1750): hæc inæqualitas facit, ut in theoria solis adhibenda sit æquatio 10, vel cum maxima est, 12 secundorum in gradibus. Ejus ratio habenda est in calculis solis accuratioribus. En autem regulam: *subtrahe locum verum solis a loco vero lunæ pro tempore dato, ut habeatur distantia lunæ a sole*, (sufficit autem, si sciatur utriusque locus circiter ad unum gradum), *tum infer: ut radius est ad sinum duplæ distantiæ lunæ a sole; ita sunt* 10″ *ad*

æquationem quæsitam, *quæ longitudini solis* per tabulas astronomicas *inventæ in primis sex signis distantiæ lunæ a sole addenda est*, *ab eadem vero in postremis sex signis subtrahenda*, ut obtineatur longitudo solis per hanc variationem mutata, sive æquatione lunari correcta.

760. Gravitas lunæ in terram, juncta figura telluris ad polos depressa, adhuc duo alia notatu digna phænomena producit, quorum alterum est fluxus & refluxus maris, qui ab astronomia pura extraneus est, alterum, quod inæqualiter mutetur positio plani æquatoris ad planum eclipticæ, hoc est, quod intersectio horum duorum planorum inæquali celeritate regrediatur, & variationem periodicam in eorum inclinatione efficiat; id, quod paucis jam exponimus.

761. Imprimis autem illud observandum est, quod cum planum orbitæ lunæ ad planum eclipticæ sub angulo circiter 5°, 9′ sit inclinatum, & linea nodorum successive per omnes eclipticæ gradus spatio 19 annorum transeat; idem planum orbitæ lunaris singulis momentis inclinationem ad planum æquatoris terrestris mutet. Nam dum nodus ascendens lunæ incidit in primum punctum arietis, in quo est nodus ascendens æquatoris, inclinatio orbitæ lunæ est ejus respectu 28° $\frac{2}{3}$ (quæ est summa ex 5° $\frac{1}{6}$ & 23° $\frac{1}{2}$): at dum nodus ascendens lunæ incidit in primum punctum libræ, in quo est nodus descendens æquatoris, orbita lunæ inclinatur ad æquatorem sub angulo 18° $\frac{1}{3}$. Atque hac ratione inclinatio orbitæ lunæ ad planum æquatoris terrestris crescit paullo plus quam 9 annis, ab 18° $\frac{1}{3}$ usque ad 28° $\frac{2}{3}$; & per novem alios annos iterum decrescit.

762. Præterea notandum est, quod si terra esset globus homogeneus exacte rotundus, ejus vis centralis in solem & lunam nullam efficeret mutationem in situ sui axis (229). Verum quia ejus figura accedit ad sphæroides (519) rotatione ellipseos circa axem suum minorem genitum, si cogitetur huic sphæroidi inscripta sphæra, cujus diameter æqualis sit axi minori sphæroidis, materia, quæ sphæra inscripta non comprehenditur, eidem sphæræ undique incumbet, ac circa polos stratum efficiet valde tenue, sed cujus crassitudo utrinque versus æquatorem semper fit major.

763. Hoc posito, concipiatur jam tota illa massa sphæroidis sphæræ inscriptæ incumbens in annulum quemdam efformari, qui ea parte cohæreat telluri, ubi ejusdem massæ fuit maxima profunditas, hoc est, in plano æquatoris: tum vero duo puncta intersectionis hujus annuli cum plano eclipticæ, aut si ita vocare libeat, *duo ejus nodi*, sunt duo puncta æquinoctialia, arietis, & libræ. Supponamus etiam, particulas materiæ hunc annulum componentis esse totidem veluti lunulas exiguas, quæ revolutionem suam circa ter-

terram eodem tempore peragant, quo ipſa ſuperficiei telluris puncta circa axem gyrantur, hoc eſt, intra 23 h. 56′, 4″: omnes hæ lunulæ triplici vi centrali, ſeu gravitate, prædita ſunt: primo verſus centrum terræ, quæ fere infinities excedit duas reliquas: ſecundo verſus lunam veram; & tertio verſus ſolem.

764. Quod ſi itaque prima harum trium virium cum ſingulis reliquis duabus ea ratione combinetur, qua ſuperius duplex lunæ gravitas, apparet.....

I. Quod *nodi hujus annuli ſemper debeant regredi, & conſequenter linea interſectionis planorum æquatoris & eclipcicæ debeat eſſe retrograda, ex quo præceſſio æquinoctiorum oritur.*

765. II. Quod cum planum eclipticæ, in quo eſt ſol, conſtanter cum plano æquatoris faciat angulum 23° $\frac{1}{2}$, quantitas præceſſionis æquinoctiorum, quæ provenit ex combinatione gravitatis annuli in terram, & gravitatis ejusdem in ſolem, maneat ſingulis revolutionibus terræ æqualis.

766. III. Quod cum orbita lunæ ad planum æquatoris jam inclinetur ſub angulo 18° $\frac{1}{3}$, jam ſub angulo 28° $\frac{2}{3}$, ea quantitas retrogradationis nodorum annuli, ſive præceſſionis æquinoctiorum, quæ provenit ex combinatione gravitatis annuli in terram cum gravitate ejusdem in lunam, debeat eſſe mutabilis, & major, quando angulus hujus inclinationis major eſt, & viciſſim; nam LM (fig. 99) quæ deſignat vim effectricem retrogradationis nodorum lunæ, eo major eſt, quo plana DMN, DCN magis a ſe diſtant.

767. Hinc infertur, *quod præceſſio æquinoctiorum*, quæ ex utraque hac cauſa oritur, *periodo 19 annorum circiter variabilis ſit; quod ſit maxima* (& ſecundum oſbervationes Bradlay, circiter 58″ intra annum), *quando nodus aſcendens lunæ ingreditur ſignum arietis; quod ſit minima* (& fere 43″ per annum), *quando nodus aſcendens lunæ ingreditur ſignum libræ: denique quod ſit media* (proxime 50″ $\frac{1}{3}$ per annum), *quando nodi lunæ ſunt in coluro ſolſtitiorum.*

768. Ex eadem ratione inclinatio hujus annuli, & conſequenter etiam plani æquatoris ad planum eclipticæ, debet perpetuis variationibus eſſe ſubjecta: quarum illæ, quæ ſeu ex revolutione diurna annuli, ſeu ex actione ſolis oriuntur, minores ſunt, quam ut obſervari poſſint; illæ vero ſolæ, quæ ex inæqualitate actionis lunæ intra revolutionem ejus nodorum proveniunt, fiunt ſenſibiles. Ex quo fit, ut dum nodus aſcendens lunæ eſt in puncto æquinoctiali arietis, obliquitas eclipticæ 18″ fere major obſervetur, quam dum is nodus eſt in puncto æquinoctiali libræ, ita ut obliquitas eclipticæ per novem circiter annos creſcat, poſtea per ſequentes novem iterum decreſcat.

ARTICULUS IX.

Explicatio, & calculus inæqualitatum apparentium in motu aſtrorum, quæ ab inæquali præceſſione æquinoctiorum pendent; cum methodo calculandi omnes motus apparentes fixarum, comprehenſa etiam earum aberratione.

769. Sit A E C (Fig. 75) dimidium circuli, quem colurum æquinoctiorum vocavimus, E polus eclipticæ, cujus dimidium ſit A D C: ſit P polus æquatoris, A K C dimidius æquator: A, C puncta æquinoctialia. Polus æquatoris ſemper 90 gradibus diſtat a punctis æquinoctialibus: unde ſi concipiatur polus P æquabiliter ſpatio 25740 annorum circulum minorem P H N deſcribere, cujus polus eſt in E, interſectiones A & C ſucceſſive per omnes eclipticæ gradus tranſibunt: atque hoc eſt, quod *præceſſio æquinoctiorum media* dicitur, eſtque annuatim $50''\frac{1}{3}$.

770. Verum quia obſervationes fixarum oſtendunt, quod ſingulis revolutionibus nodi lunæ, inclinatio plani æquatoris ad planum eclipticæ mutetur, ita ut inde in axe æquatoris enaſcatur motus conicus; ſequitur, polum æquatoris non poſſe in circulo P H N manere, ſed, præciſo motu ejus æquabili, de quo priore numero egimus, debere eundem intra 19 annos circa punctum P epicyclum quemdam $p\,t\,r$ deſcribere, qui motus *nutatio axis terræ* appellatur.

771. Combinatis motu æquabili in circulo P H N, & motu altero in epicyclo $p\,t\,r$, polus p æquatoris reipſa deſcribit epicycloides admodum prolongatas, quarum baſis ſecundum obſervationes Bradley eſt $6'$, $13''$ circuli maximi, & axis $18''$ pariter circuli maximi.

772. Quoniam longitudines ſyderum computantur ab actuali interſectione punctorum A & C æquatoris cum ecliptica; complementa latitudinum à polo E; aſcenſiones rectæ ab interſectionibus actualibus A, & C; & complementa declinationum a polo p; evidens eſt I, quod *nec præceſſio media æquinoctiorum, nec nutatio axis terræ latitudines ſyderum mutare poſſint*, quippe puncto E manent fixo. II, quod *præceſſio media mutet æquabiliter omnes longitudines; ſed inæqualiter omnes aſcenſiones rectas*, quia in duobus coluris efficit motum æquabilem angularem circa punctum E, cum interea aſcenſiones rectæ computentur per angulos circa polum P. III. Quod *nutatio poli inæqualiter longitudines & aſcenſiones rectas mutet*, cum ea nutatio nunc in hanc, alias in alteram partem fiat. IV. Quod *ex utraque hac cauſa declinationes ſyderum inæqualiter mutentur.*

773. Ut omnes hos exiguos fixarum motus ad calculum reducamus, una cum aberratione, cujus theoriam N. 385. & ſeqq. dedimus,

dimus, eos tribus titulis comprehendemus: effectum præceſſionis mediæ æquinoctiorum, ſimplici nomine vocabimus *præceſſionem:* effectum e nutatione axis terræ oriundum dicemus *deviationem;* illuſionem denique opticam ex ſucceſſiva lucis propagatione *aberrationem* appellabimus.

Calculus Præceſſionis.

774. Præceſſio in longitudine, cum fiat motu æquabili, tempori ſemper eſt proportionalis, anno uni reſpondentibus $50''.3$: hinc ſemper ſupponitur data, ut reducatur ad præceſſionem in aſcenſione recta, & ad præceſſionem in declinatione.

775. *Pro præceſſione in aſcenſione recta.* Quæratur in tabulis Aſtronomicis punctum eclipticæ reſpondens puncto æquatoris deſignanti aſcenſionem rectam ſtellæ. Ex iisdem tabulis accipiatur declinatio hujus puncti eclipticæ; & ſumma ex hac declinatione & declinatione ſtellæ, ſi ſunt diverſi nominis; vel differentia earum, ſi ſunt ejuſdem denominationis, vocetur X. Tum fiat hæc analogia: *Ut factum ex coſinu declinationis ſtellæ in coſinum declinationis puncti eclipticæ aſcenſioni rectæ ſtellæ reſpondentis, eſt ad factum ex coſinu obliquitatis eclipticæ in coſinum arcus X; ita eſt præceſſio in longitudine ad præceſſionem in aſcenſione recta*, quæ ſemper eodem ſigno afficitur, quo præceſſio in longitudine, excepto caſu, quo arcus X 90° excedit; tunc enim præceſſio in aſcenſione recta eſt negativa reſpectu præceſſionis in longitudine.

Nam in triangulo PEA (Fig. 45), cujus partium denominationes datas vide N. 295) in quo PE & AE ſunt conſtantia, habetur (Trig. 189) $dE : dP = cof\,AO \times t\,PAE : cof\,AR \times f\,PAE$. Eſt autem in triangulo ASR (Trig. 130) $t\,RAS$ (ſive $t\,PAE$) $= \frac{cot\,ASR}{cof\,AS}$; & (Trig 129) $f\,PAE = \frac{cof\,ASR}{cof\,AR}$; itaque $dE : dP = \frac{cof\,AO \times cot\,ASR}{cof\,AS} : \frac{cof\,AR \times cof\,ASR}{cof\,AR} = cof\,AO \times cot\,ASR : cof\,AS \times cof\,ASR$. Si pro ratione $cot\,ASR : cof\,ASR$ ſubſtituatur ratio $1 : f\,ASR$ (Trig. 33) ſive, cum $f\,ASR$, vel $f\,OSC = \frac{cof\,SCO}{cof\,OS}$ (Trig. 129), ratio $cof\,OS : cof\,SCO$, habetur $dE : dP = cof\,AO \times cof\,OS : cof\,SCO \times cof\,AS$.

776. *Pro præceſſione in declinatione.* Fiat: *ut quadratum radii ad factum ex ſinu obliquitatis eclipticæ in coſinum aſcenſionis rectæ ſtellæ; ita eſt præceſſio in longitudine ad præceſſionem in declinatione*, quæ eſt $\left\{ \begin{array}{c} \text{additiva} \\ \text{ſubtractiva} \end{array} \right\}$

 in

in ſtellis { borealibus / auſtralibus }, quando earum aſcenſio recta intra 270° & 90° conſiſtit; ſed eadem eſt { ſubtractiva / additiva }, quando aſcenſio recta eſt intra 90° & 270°. Attamen id intelligendum eſt, quando declinatio temporis anterioris reducenda eſt ad declinationem temporis poſterioris; quod ſi enim declinatio temporis poſterioris reduci deberet ad declinationem temporis anterioris, ſigna mutanda forent.

Calculus Deviationis.

777. Juxta theoriam ſuperius expoſitam, quando nodus aſcendens lunæ eſt in ♈ 0°, polus æquatoris maxime diſtare debet a polo eclipticæ, conſequenter debet eſſe in puncto *r* epicycli *p u r* (Fig. 75); & dum ☊ lunæ eſt in ♎ 0°, idem polus debet eſſe in *u*. E quo infertur, quod additis 3 ſignis ad longitudinem ☊ lunæ, habeatur locus poli in ſuo epicyclo, qui locus vocari poteſt *aſcenſio recta poli*, quoniam per angulos circa punctum P computatur.

Sit itaque hæc aſcenſio recta in puncto *p* tempore dato; erit tum E *p d* portio coluri ſolſtitiorum; *a* E *c* dimidius colurus æquinoctiorum; *a* F, ſeu *a* E S menſura longitudinis apparentis ſtellæ S; S F ejus latitudo non mutata; *a p* S, ſive *a k*, menſura ejus aſcenſionis rectæ; S K ejus declinatio; & obliquitas, quam actu habet ecliptica, E *p*. Differentiæ jam inter has poſitiones, & inter eas, quæ haberentur, ſi colurus ſolſtitiorum tranſiret per punctum P, dicuntur *deviatio in longitudine*, *in aſcenſione recta*, *in declinatione* reſpective.

778. *Pro deviatione in longitudine.* Calculetur locus ☊ lunæ, & eidem addantur 3 ſigna, ut habeatur aſcenſio recta poli: tum fiat: *ut ſinus obliquitatis eclipticæ ad coſinum aſcenſionis rectæ poli; ita ſunt* 9″ *ad deviationem in longitudine*, quæ addenda eſt ad longitudinem, ſi aſcenſio recta poli ſit vel in tribus poſtremis, vel in tribus primis ſignis; & ſubtrahenda, ſi aſcenſio recta poli ſit in ſigno quarto incluſive uſque ad nonum: ſicque habebitur longitudo ſtellæ per deviationem correcta.

Etenim deviatio in longitudine, exprimitur hic per A *a*, vel D *d*, vel *p* E D. Si itaque e puncto *p* demittatur perpendiculum *p x*, habetur $R : ſpu = Pp$ (ſive 9″) $: px = 9'' \times ſpu$; deinde eſt $ſEx$ (ſeu $ſEP$) $: px$ (ſeu $9'' \times ſpu$) $= r : Dd = \frac{9'' \times ſpu}{ſEP}$.

779. *Pro obliquitate eclipticæ.* Fiat: *ut radius ad ſinum aſcenſionis rectæ poli; ita ſunt* 9″ *ad variationem obliquitatis eclipticæ.* Hæc variatio eſt additiva in primis ſex ſignis aſcenſionis rectæ poli; & ſubtractiva in ſex poſterioribus.

780.

780. *Pro deviatione in aſcenſione recta.* Fiat primo : *ut tangens obliquitatis eclipticæ ad coſinum aſcenſionis rectæ poli ; ita ſunt* 9″ *ad æquationem primam*, quæ eſt additiva in tribus poſtremis, & tribus primis ſignis aſcenſionis rectæ poli ; in reliquis ſubtractiva. *Secundo* ſubtrahatur aſcenſio recta poli ab aſcenſione recta ſtellæ, ut habeatur argumentum ſecundæ æquationis ; & fiat : *ut cotangens declinationis ſtellæ eſt ad ſinum hujus argumenti inventi ; ita ſunt* 9″ *ad æquationem ſecundam*, quæ eſt { additiva / ſubtractiva } in ſtellis { borealibus / auſtralibus } in ſex primis ſignis argumenti ; & { ſubtractiva / additiva } in ſex poſterioribus ſignis argumenti, ut habeatur aſcenſio recta ſtellæ per deviationem correcta.

Deviatio enim in aſcenſione recta eſt differentia inter angulos EPS, & EpS ; producatur Pp in G, & in triangulo EPG habetur (Trig. 178) dPG (ſeu Pp) : dEPG = t EP : $ſ$GPE. Similiter in triangulo GPS habetur dPG (ſive Pp) : dSPG = t PS : $ſ$SPG.

781. *Pro deviatione in declinatione.* Aſcenſio recta poli ſubtrahatur ab aſcenſione recta ſtellæ, ut habeatur argumentum deviationis. Tum fiat : *ut radius eſt ad coſinum hujus argumenti ; ita ſunt* 9″ *ad deviationem in declinatione*, quæ eſt { additiva / ſubtractiva } in ſtellis { borealibus / auſtralibus } in tribus ultimis & tribus primis ſignis argumenti ; & { ſubtractiva / additiva } in ſex aliis ſignis, ut obtineatur declinatio ſtellæ per deviationem correcta.

Quippe in triangulo SPG habetur (Trig. 177) dPG : dPS = R : $coſ$ SPG.

782. Obſerva. Cum Bradleyus ſuas obſervationes examinaret, animadvertit, loco circuli prt poſſe adhiberi ellipſin, in qua pu = 18″ ſit axis major : & D. d'Alembert viribus nutationem axis terræ efficientibus ad calculum revocatis invenit, axem minorem hujus ellipſis debere eſſe = 13″.4, quod cum calculis D. Euleri conſentit. Ut itaque æquationes accurratiores fiant, concipienda eſt ellipſis, quæ ſit projectio orthographica epicycli prt : punctum p accipiendum eſt in epicyclo, prout ratio aſcenſionis rectæ poli exigit, & quærendum punctum (359) correſpondens ellipſeos, ejusque diſtantia a centro ellipſeos. Utrumque e ſequentibus analogiis reperiri poteſt : *ut* 134 *ad* 180 ; *ita eſt tangens aſcenſionis rectæ poli ſuperius inventæ ad tangentem aſcenſionis rectæ reductæ, quæ prioris loco in calculo præcedentium regularum adhiberi debet.* Item *ut ſinus aſcenſionis rectæ jam reductæ*

ductæ est ad sinum ascensionis rectæ, quæ prius adhibebatur; ita sunt 9″ ad quantitatem adhibendam in omnibus regulis præcedentibus loco 9″.

Calculus aberrationis.

783. Brevitatis gratia demonstrationes regularum, quas adferimus, non dabimus, utpote intricatiores, cum jam alias earum principia N. 391 stabiliverimus. Porro regulæ, quas pro ascensione recta, & declinatione damus, nulla ratione a longitudine & latitudine stellæ dependent; id quod a nemine adhuc factum est.

784. *Pro aberratione in longitudine & latitudine.* Longitudo solis subtrahatur a longitudine stellæ, habebitur *argumentum annuum*, & aberratio in longitudine erit $= \frac{20'' \times \text{cos. Arg. ann.}}{\text{cos. lat. stell.}}$, quæ est subtractiva in tribus primis, & tribus posterioribus signis argumenti annui; & additiva in sex reliquis. Aberratio vero in latitudine erit $= 20'' \times$ *sin. latit. stell.* $\times$ *sin. arg. ann.*, estque additiva in sex primis signis argumenti annui, in sex posterioribus subtractiva, ut obtineatur longitudo & latitudo per aberrationem correcta.

785. *Pro aberratione in ascensione recta.* Ex tabulis astronomicis, vel calendario, quod exhibet longitudinem, ascensionem rectam, & declinationem solis, quæratur longitudo & declinatio puncti eclipticæ respondentis puncto æquatoris, quod designat ascensionem rectam stellæ: a longitudine inventa subtrahatur longitudo solis pro die dato; habebitur argumentum annuum aberrationis in ascensione recta, ipsaque aberratio quæsita erit =
$\frac{20'' \times \text{cos. arg. ann.} \times \text{cos. obliquit. eclipt.}}{\text{cos. declin. stell.} \times \text{cos. declin. punct. eclipt.}}$, quæ est subtractiva in tribus primis, & tribus ultimis signis argumenti annui, & additiva in sex reliquis, ut habeatur ascensio recta per aberrationem correcta.

786. *Pro aberratione in declinatione.* In tabulis astronomicis, vel calendario, quæratur declinatio puncti eclipticæ, quod respondet puncto æquatoris designanti ascensionem rectam stellæ: summa vel differentia (prout vel diversæ, vel ejusdem denominationis sunt) hujus, & declinationis stellæ, dicatur X, & fiat: *ut cosinus declinationis inventæ est ad cosinum obliquitatis eclipticæ; ita sinus summæ vel differentiæ* X, *est ad cosinum arcus, qui dicatur* Y. Tum fiat iterum: *ut sinus arcus* Y *est ad cosinum ascensionis rectæ stellæ; ita est sinus declinationis stellæ ad sinum arcus, qui vocetur* Z.

Jam vero Z erit semper minor 90 gradibus, si stella fuerit intra tropicos, & si ascensio recta stellæ $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{australis} \end{array} \right\}$ fuerit intra $\left\{ \begin{array}{l} 180^\circ \ \& \ 360^\circ \\ 0^\circ \ \& \ 180^\circ \end{array} \right\}$. In aliis casibus fiat: *ut radius ad tangentem obliquitatis*

tis eclipticæ ; ita eſt cotangens declinationis ſtellæ ad ſinum arcus, qui dicatur A; & arcus Z erit major 90 gradibus, quando aſcenſio recta ſtellæ $\left\{\begin{matrix}\text{borealis}\\ \text{auſtralis}\end{matrix}\right\}$ eſt intra $\left\{\begin{matrix}0^\circ + A \;\&\; 180^\circ - A\\ 180^\circ + A \;\&\; 360^\circ - A\end{matrix}\right\}$. Arcus Z $\left\{\begin{matrix}\text{addatur ad } 0^s\\ \text{ſubtrahatur a } 6^s\end{matrix}\right\}$ pro ſtellis $\left\{\begin{matrix}\text{borealibus}\\ \text{auſtralibus}\end{matrix}\right\}$, quando earum aſcenſio recta eſt in primo vel ultimo quadrante æquatoris; idem vero $\left\{\begin{matrix}\text{ſubtrahatur a } 12^s\\ \text{addatur ad } 6^s\end{matrix}\right\}$, quando aſcenſio recta eſt in ſecundo & tertio quadrante æquatoris. Summa vel differentia ſic inventa eſt punctum eclipticæ, a quo ſubtrahenda eſt longitudo ſolis pro die dato, ut obtineatur argumentum annuum aberrationis in declinatione; eritque aberratio $= 20'' \times$ *ſin.* Y $\times$ *coſ. arg. ann.*, quæ ſubtrahenda eſt in tribus primis & tribus ultimis ſignis argumenti annui; addenda in ſex reliquis, ut habeatur declinatio ſtellæ per aberrationem correcta.

Applicatio horum calculorum ad Planetas.

787. Quoniam (506) motus planetarum computantur a puncto interſectionis Arietis, præceſſio media hoc ipſo in omnibus planetarum calculis jam adhibetur. Supereſt igitur, ut etiam ad eos applicetur deviatio ſervatis iiſdem regulis, quæ pro fixis ſunt traditæ. Jam vero in praxi Aſtronomica, dum hi calculi inſtituuntur pro ſtellis fixis, id fere ſemper fit ideo, ut obtineatur earum ſitus apparens, hoc eſt, mutatus per omnes hos exiguos motus: at quando iidem calculi pro planetis inſtituuntur, fere ſemper finis eſt, ut ſitus obſervatus eorum ab effectu horum exiguorum motuum expurgetur. Itaque ſi quis regulis præcedentibus uti velit, ut locum obſervatum reducat, is ſigna deviationis mutare debebit, & ſubtractivam facere, quando additiva ponitur, ac viciſſim.

788. Quod ad aberrationem, regulæ pro planetis admodum diſcrepant ab iis, quæ pro fixis ſunt præſcriptæ. En autem generalem pro repurgando ſitu quovis obſervato ab effectu aberrationis, quam regulam D. Clairaut dedit (Monum. Acad. Reg. Scient. Pariſ. ad An. 1746 pag. 565): *ut motus horarius medius ſolis* 2′, 28″ *ductus in diſtantiam ejus mediam a terra, ad motum horarium ſyderis e terra viſum (ſcilicet ad motum in longitudine, in latitudine, in aſcenſione recta, in declinatione) ductum in diſtantiam actualem hujus ſyderis a terra acceptam in iiſdem partibus, in quibus habetur diſtantia media ſolis a terra ; ita ſunt* 20″ *ad quantitatem, qua longitudo, latitudo, aſcenſio recta, vel declinatio geocentrica hujus ſyderis minuenda eſt, quando creſcit; vel augenda, quando decreſcit.*

 Idem

Idem applicari poteſt cometis, modo cognoſcantur circiter elementa eorum theoriæ, ut motus eorum horarius geocentricus, & diſtantia a terra calculentur.

CAPUT II.

De calculo eclipſium ſatellitum e ſuperficie planetæ primarii viſarum.

ARTICULUS I.

De determinatione phaſium eclipſium lunæ & ſolis.

789. Juxta theoriam de eclipſibus ſatellitum ſuperius expoſitam (N. 645 & ſeqq.) eclipſis ſolis incipit, & finitur, quando arcus diſtantiæ apparentis centrorum ſolis & ſatellitis eſt æqualis ſumæ eorum ſemidiametrorum; unde infertur, quod *ſi ex tabulis loco & momento conjunctionis veræ ſatellitis cum ſole calculatis, latitudo apparens ſatellitis ſit minor quam ea ſumma, certo futura ſit eclipſis ſolis*, quoniam tunc hæc latitudo exprimit arcum diſtantiæ centrorum ſolis & ſatellitis e ſuperficie planetæ primarii viſorum.

790. Similiter, eclipſis ſatellitis, vel lunæ incipit, vel finitur, quando ejus centrum videtur diſtare a puncto eclipticæ planetæ primarii directe oppoſito centro ſolis (dicitur hoc punctum *centrum umbræ*) ſumma ſemidiametrorum ſatellitis e primario viſi, & umbræ in ea diſtantia, in qua umbram ſatelles ingreditur: item eclipſis ſatellitis incipit, vel deſinit eſſe totalis, quando centrum ſatellitis diſtat a centro umbræ exceſſu ſemidiametri umbræ ſupra ſemidiametrum ſatellitis; tunc enim intelligitur limbus diſci ſatellitis interne tangere limbum umbræ. *Tempus immerſionis* dicitur illud, quo indiget ſatelles, ut totus in umbram ingrediatur; & *tempus emerſionis* eſt, quo incipit emergere ex umbra, usque dum totus ſit egreſſus.

791. Hinc ſequitur, *quod calculato ex tabulis Aſtronomicis loco & momento oppoſitionis ſatellitis, certi ſimus de futura eclipſi, ſi ejus latitudo momento oppoſitionis minor ſit ſumma ſemidiametrorum umbræ & ſatellitis e primario viſi; & quod eclipſis ſit totalis, quando latitudo minor eſt exceſſu ſemidiametri umbræ ſupra ſemidiametrum ſatellitis.*

792. Ut habeatur magnitudo ſemidiametri umbræ in diſtantia, in qua eam ſatelles ingreditur, *addendæ ſunt parallaxes horizontales ſolis & ſatellitis reſpectu planetæ primarii; & a ſumma ſubtrahenda ſemidiameter ſolis e primario viſa.*

Sit

Sit enim S A (fig. 96) ſemidiameter ſolis S e planeta primario T ſub angulo S T A viſa; ſit C I arcus orbitæ ſatellitis L immergendi in umbram B E G primarii T. Centrum umbræ eſt in L, & arcus C L, ad ſenſum nil differens a recta, eſt ſemidiameter umbræ. Angulus B A T æqualis eſt (415) parallaxi horizontali ſolis; angulus B C T æquatur parallaxi horizontali ſatellitis; & angulus C T D æqualis eſt (Elem. 492) ſummæ harum duarum parallaxeon: ſi itaque ſubtrahatur angulus L T D vel A T S æqualis ſemidiametro ſolis e primario viſæ, remanebit angulus C T L, ſive arcus C L, qui eſt ſemidiameter umbræ primarii in ea diſtantia, in qua ſatelles immergitur.

793. Obſerva I. Quamvis punctum C ſit limes umbræ primarii, nihilominus ſplendor ſatellitis vehementer hebetatur, antequam ad illud perveniat. Nam ut a puncto H, in quod incidit tangens H B M, verſus C progreditur, ita ei magis ſemper & magis aſpectus diſci ſolaris eripitur, qui ei ſub primario T occultatur, & hinc lumen ſatellitis magis ſemper debilitatur, donec in puncto C & lumen omne, & aſpectum ſolis ex integro amittat. Spatium H C, cum ratione expoſita tam parum a ſole illuſtretur, *Penumbra* dicitur. Idem eſt de ſpatio K I, in quo ſatelles ſemper magis lucem ſolis recuperat.

794. Obſerva II. Accidit quandoque, ut ſatelles adeo vicinus fiat umbræ, ut in penumbram ingrediatur. Tum ea parte, qua umbræ propior eſt, obſcurior fit, poſtea priorem ſplendorem recuperat.

795. Obſerva III. Cum atmoſphæra aerea tellurem ambiens ſit admodum denſa, præprimis circa ſuperficiem terræ, magnitudinem umbræ, quam terra projicit, auget; atque hinc aliquot minuta ſecunda parallaxi horizontali lunæ addi ſolent, plura ab aliis, ab aliis pauciora, prout extenſio atmoſphæræ major minorve ſtatuitur.

796. Obſerva IV. Alter effectus atmoſphæræ eſt, quod radios ſolares directione tangentium planetam primarium incidentes refringat, ac intra umbram verſus L dirigat, quo obſcuritas minuitur. Atque hoc præcipue in eclipſibus totalibus lunæ advertitur, quibus durantibus luna manet conſpicua, & magis quidem circa medium, dum eſt verſus L, quam dum limitibus umbræ C & K eſt propior.

797. Problema I. *Omnia phænomena eclipſis ſatellitis graphice determinare.*

Reſolutio. Calculetur e tabulis aſtronomicis locus ſatellitis ad eclipticam reductus, ejus latitudo, motus horarius, parallaxis horizontalis, & ſemidiameter; tum etiam locus ſolis, motus horarius,

 paral-

parallaxis horizontalis, & semidiameter: & hæc quidem omnia pro tempore quovis a momento oppositionis satellitis parum distante. Sumatur pro exemplo eclipsis lunæ die 30 Augusti Anno 1746. Ex tabulis Cassinianis reperitur, quod oppositio debeat contingere circa mediam noctem: unde quærantur omnia elementa superius indicata pro 11 h. 30′ tempore vero. Erit locus lunæ 7°, 4′, 33″ ♓: ejus latitudo 41′, 50″ australis; motus horarius 31′, 28″; parallaxis horizontalis 56′, 15″; semidiameter 15′, 13″. Item locus solis 7°, 18′, 36″ ♍, ejus motus horarius 2′, 25″; semidiameter 15′, 55″, parallaxis horizontalis 10″; ex quibus colligitur semidiameter umbræ terræ (792) 40′, 29″, seu (additis propter atmosphæram 49″) 41′, 18″: inclinatio orbitæ lunæ cum suo circulo latitudinis, est 84°, 45′ versus orientem; ex quo apparet, quod luna tendat versus suum nodum ascendentem.

798. In charta majore construatur scala A B (fig. 97) in sexaginta minuta gradus divisa, ita ut singula minuta saltem sint duarum linearum pedis Regii Parisini. Ad sinistram adscribatur *oriens*, ad dextram *occidens*, superne *septentrio*, inferius *meridies*. Ducatur recta indefinita O C, quæ designet eclipticam, in qua puncto D ad libitum sumpto constituatur locus lunæ pro 11 h. 30′. Ducatur ex D deorsum perpendicularis ad O C, linea D L æqualis 41′, 50″ in scala acceptis: erit in L locus verus lunæ pro 11 h. 30′. Construatur ad L angulus D L P 84°, 45′ versus orientem, exhibebit P L orbitam lunæ. Supponitur enim, ob motum regularem lunæ in syzygiis, & exiguum spatium, quod durante eclipsi conficit, quod arcus orbitæ a recta non differat, & motu æquabili describatur. E puncto D versus ortum transferantur in Z ex scala 31′, 28″, motus horarius lunæ ad eclipticam reductus; & ducatur Z F ad O C normalis, erit F locus verus lunæ in sua orbita pro 12 h. 30′.

799. Accipiatur distantia lunæ a puncto directe opposito loco solis, hoc est, differentia inter 7°, 18′, 36″, & 7°, 4′, 33″, quæ est 14′ 3″, quæ luna adhuc conficere debet, seu quibus adhuc occidentalior est, quam punctum loco solis directe oppositum, in quo simul est centrum umbræ telluris. Eadem 14′, 3″ in scala A B accepta transferantur e puncto D in G versus orientem, erit G locus centri umbræ pro 11 h. 30′. Fiat G M = 2′, 25″ scalæ, qui est motus horarius solis, seu umbræ; erit centrum umbræ 12 h. 30′ in M; & quia observator e superficie telluris non nisi motum relativum lunæ videt, jungatur M F, eique ducatur ex G parallela & æqualis G K, erit in K (347) locus apparens lunæ respectu umbræ, quæ in G immobilis supponitur. Per puncta L & K ducatur

tur N L K I, quæ erit orbita optica, five apparens, lunæ. Spatium L K dividatur in minuta temporis, v. g. in terna, in quaterna, vel quina &c. adfcripto ad L tempore 11 h. 30′, & ad K 12 h. 30′. Eadem divifio continuetur per orbitam apparentem N I, ut fciatur locus apparens centri lunæ pro quovis tempore, tam ante 12 h. 30′, (pro quo calculus factus eft), quam poftea.

800. Ex puncto G demittatur in orbitam apparentem lunæ perpendiculum G E, quod cum fit linea breviffima, quæ ex puncto G, in quo umbræ centrum fupponitur immobile, duci poteft, determinat locum apparentem centri lunæ E pro eo momento, quo minimam a centro umbræ diftantiam habet, confequenter pro momento eclipfis mediæ. Ex divifionibus lineæ N I apparebit, punctum E incidere in 12 h. 7′, ex quo colligitur hoc eodem tempore effe medium eclipfeos.

801. Ut habeatur initium & finis, accipiantur in fcala 56′, 31″, five fumma femidiametrorum umbræ & lunæ, eoque intervallo ex puncto G tanquam centro interfecetur orbita apparens lunæ in N & I, quæ interfectionum puncta incident in 10 h. 44′ ½, & 13 h. 29′ ½. Quare initium eclipfeos erit 10 h. 44′ ½, finis die 31 Augufti, 1 h. 29′ ½ mane.

802. Denique ut fciatur quantitas eclipfis, centro E, radio æquali femidiametro lunæ, five 15′, 13″ in fcala acceptis, defcribatur circulus V F H, qui defignet lunam in eclipfi media: diameter V H dividatur in partes 12 æquales, quæ *digiti ecliptici* dicuntur: centro G, radio æquali femidiametro umbræ, five 41′, 18″ fcalæ, defcribatur femicirculus S X T, qui limites umbræ determinat: numerus divifionum in diametro V H hoc femicirculo abfciffus exprimit quantitatem eclipfis, hic 6 ⅖; unde apparet, obfcurari 6 dig. 24′ in parte boreali difci lunæ.

803. Obferva. Ex conftructione hujus fchematis manifeftum eft, quod orbita vera lunæ L F ad apparentem L K reducta, angulus inclinationis orbitæ lunæ cum circulo latitudinis exigua quadam quantitate K L F, quæ a ratione motuum horariorum folis & lunæ dependet, minuatur; & quod fimul arcus L K orbitæ apparentis, reddatur minor arcu horario orbitæ veræ L F, quantitate ad fenfum æquali motui horario folis K F, feu G M. Atque hinc eft, quod in praxi compendii caufa ab angulo inclinationis orbitæ lunæ fubducatur *angulus reductionis* K L F, qui in tabulis modernis aftronomicis jam habetur: quo facto ftatim ab initio ducitur orbita apparens L I, in qua accipitur portio L K æqualis exceffui motus horarii lunæ in fua orbita fupra motum horarium folis (dicitur

 citur

citur autem hic exceſſus *motus horarius compoſitus*), atque ut vidimus, in tempus dividitur.

804. Sit alterum exemplum pro eclipſi totali, quæ contigit die 8 Auguſti A. 1729. Ex tabulis Caſſinianis reperitur oppoſitio lunæ cum ſole 13 h. 17′, 30″ tempore vero, in 16°, 16′, 57″ ♒. Latitudo lunæ borealis 7′, 18″; ejus motus horarius 34′, 48″, & in ſua orbita 34′ 56″: ſemidiameter 16′, 0″; parallaxis horizontalis 59′, 10″; inclinatio orbitæ vera cum circulo latitudinis 84°, 59′ verſus occidentem. Motus horarius ſolis 2′, 24″, ejus ſemidiameter 15′, 51″, conſequenter vera ſemidiameter umbræ terræ 44′, 18″; motus horarius compoſitus 32′, 32″, & inclinatio apparens 84°, 35′.

Conſtructa ſcala A B (fig. 100), ſit ecliptica O C, in qua conſtituatur locus verus lunæ ad eclipticam reductus in G, & L ſit ejus verus locus in orbita, ita ut G L erigatur ſurſum perpendiculariter ad O C, ſitque æqualis 7′ 18″ in ſcala acceptis, ob lunæ latitudinem borealem. Conſtruatur angulus G L N 84°, 35′ verſus occaſum, & ducatur orbita apparens lunæ P L N. Fiat L K æqualis motui horario compoſito lunæ & ſolis 32′, 32″, & dividatur in partes temporis ita, ut puncto L reſpondeat 13 h. 17′ $\frac{1}{2}$, & puncto K 14 h. 17′ $\frac{1}{2}$. Ex G ducatur perpendicularis in orbitam apparentem G E, quæ determinabit medium eclipſis in E 13 h. 16′. E centro G, intervallo ſummæ ſemidiametrorum umbræ & lunæ, ſive 60′, 18″ ſcalæ, ſecetur ad ortum & occaſum orbita apparens in N & I, habebitur initium eclipſis 11 h. 24′, & finis 15 h. 7′. Eodem centro G intervallo 28′, 18″ ſcalæ (quæ eſt differentia ſemidiametrorum umbræ & lunæ) fiant etiam interſectiones Q & P in orbita apparente, quæ determinant momentum immerſionis totalis 12 h. 25′, & initium emerſionis 14 h. 6′. Denique centro E, radio æquali ſemidiametro lunæ 16′, 0″, deſcribatur circulus exhibens lunam in medio eclipſeos: per E ducatur indefinita G X, & dividatur diameter H V in duodecim digitos, eaque diviſio transferatur in H X, donec excurrat extra circulum O X C, centro G radio æquali ſemidiametro umbræ 44′, 18″ deſcriptum, qui ſectionem umbræ telluris exprimit: portio V X deſignat quantitatem eclipſis, circiter 20 digitorum.

805. Huic conſtructioni facile applicatur calculus trigonometricus, qui phaſes indicatas longe accuratius determinabit. Etenim in triangulo G L E ad E rectangulo habetur GL = 7′, 18″, & GLE = 84°, 35′, hinc G E = 7′, 16″; & E L = 41″. In triangulis G E N, G E Q, ad E rectangulis, nota ſunt G E = 7′, 16″, GN = 60′, 18″, & G Q = 28′, 18″; igitur reperitur E N = 59′, 52″,

52″, & EQ = 27′, 21″. Subtractis 2′, 24″ seu motu horario solis, a 34′, 48″, sive motu horario lunæ in ecliptica, & E L, EN, EQ in tempus conversis, (horæ uni tributa differentia 32′, 24″), habetur E L = 1′, 17″, & inde punctum E, sive medium eclipseos, 13 h. 16′, 13″; E N = 1 h. 50′, 51″, & initium eclipseos 11 h. 25′, 22″, finis 15 h. 7′, 4″; denique E Q = 50′, 39″, consequenter immersio 12 h. 25′, 34″, & emersio 14 h. 6′, 52″. Denique si fiat: *ut semidiameter lunæ* 16′, 0″ *ad 6 digitos; ita* 53′, 2″ (*seu differentia inter* G E 7′, 16″, *&* *summam semidiametrorum umbræ & lunæ* = 60′, 18″) *sunt ad* 19 *dig*. 53′, habetur quantitas eclipsis.

806. Problema II. *Determinare graphice phases eclipseos solis pro loco in superficie planetæ primarii, v. g. Telluris, dato.*

Resolutio. Ut construatur schema eclipsis solaris, observator in ipso sole collocandus est, e quo spectet tellurem circa axem suum conversum, loca in ejus superficie soli exposita ellipses describentia &c. ut Sect. IV explicatum est. Quod si jam contingat, us dum observator considerationi alicujus ex istis locis, v. g. Urbis Parisinæ, intentus est, luna inter hanc urbem, & observatoris oculum interponatur, & ipsius aspectui hæc urbs eripitur, & simul Parisiorum incolæ locum solis, in quo observator est positus, videre desinunt.

807. Illud igitur agendum est, ut exhibeatur via, quam punctum quodpiam superficiei telluris e sole visum motu rotationis videtur describere, & simul lunæ semita, ut appareat, quando & quommodo hoc punctum luna soli subducat.

Sint exempli causa determinandæ phases eclipsis solis, quæ 26 Octobris 1753 contigit. Conjunctio vera solis & lunæ secundum tabulas D. Halley fuit 10 h. 57′ tempore vero mane, in 3°, 10′, 16″ ♏; solis declinatio australis 12°, 35′½; motus horarius 2′, 30″, semidiameter 16′, 11″. Latitudo vera lunæ borealis 34′, 58″; ejus motus horarius in ecliptica 35′, 26″, & in sua orbita 35′, 34″; semidiameter horizontalis 16′, 8″; parallaxis horizontalis 58′, 49″; inclinatio orbitæ apparentis 84°, 21′; & motus horarius compositus lunæ ac solis 33′, 4″.

808. Habitis hisce elementis construatur scala G A, 60 minutorum, quæ singula saltem duarum linearum sint (Fig. 101); & accepta ex ea parallaxi horizontali lunæ tanquam radio describatur semicirculus O X C, qui hemisphærium boreale telluris e sole visæ exhibet, ejusque diameter O C sectionem illius cum plano eclipticæ. E centro G erigatur perpendicularis G L, latitudini lunæ boreali 34′, 58″ æqualis. Versus occidentem fiat angulus G L Q 84°, 21′, & habetur orbita apparens lunæ, quæ in tempus dividatur, ita, ut ad

ad punctum L fint 10 h. 57′; & ad K, quod ab L 33′, 4″ diftat, 11 h. 57′. Ex declinatione auftrali folis 12°, 35′ ½, determinetur (607) locus poli borealis telluris P, qui ob declinationem folis auftralem erit in parte difci averfa; & defcribatur (626) portio ellipfeos, quæ fit projectio orthographica arcus diurni paralleli urbis Parifinæ pro die eclipfeos, in cujus arcu fuperiore notentur horæ diurnæ, cum elevatio poli, & declinatio folis fint diverfi nominis.

809. Accipiantur ex fcala circino 32′, 19″ (quæ eft fumma femidiametrorum folis ac lunæ) & pofito crure uno circini in orbita lunæ, altero in ellipfi, quærantur tum ad orientem, cum ad occidentem, duo puncta in utriusque divifione idem momentum temporis notantia, eoque a fefe intervallo remota, fcilicet Q, R, & E, F: priora determinabunt initium eclipfeos 8 h. 39′; pofteriora finem 11 h. 8′. Patet enim ex ipfa conftructione, urbem Parifinam 8 h. 39′ e fole debere videri in R, & centrum lunæ in Q: & quia linea QR defignat fummam femidiametrorum folis & lunæ in iisdem partibus, in quibus GC exprimit parallaxin horizontalem lunæ; manifeftum eft, quod eadem linea æquetur diftantiæ centrorum folis & lunæ e tellure vifæ eo momento, quo utriusque limbi fefe contingere videntur.

810. Ut obtineatur medium, & quantitas eclipfis, quærantur duo puncta I & D, in ellipfi & orbita lunæ idem tempus notantia, & quæ fimul minimam habeant diftantiam: reperientur circa 9 h. 50′. Centro I, radio æquali femidiametro folis 16′, 21″ fcalæ, defcriptus circulus folem exhibet, cujus diameter per D tranfiens dividatur in 12 digitos eclipticos. Centro D, radio æquali femidiametro lunæ defcriptus alter circulus lunam exprimit in medio eclipfis, & numerus digitorum in diametro prioris abfciffus, hic 8½, eclipfeos quantitatem.

811. Obferva. In hac conftructione fupponitur fol in diftantia fere infinita a terra & luna; rectæ, per quas fit projectio diametri lunæ in plano figuræ, parallelæ; via, quam urbs Parifina e fole vifa, defcribit, arcus ellipfeos veræ; diameter lunæ e terra vifa conftans; ejus motus rectilineus & æquabilis &c. Nulla ex his hypothefibus exacte congruit iis, quæ reipfa in cælo contingunt. Atque hinc manifeftum eft, quod fuppofitis elementis e tabulis defumptis accuratis, phafes eclipfeos non nifi prope veræ deduci poffint. Et quamvis contingat, ut errores inde enati fæpe alter alterum emendent; attamen recte exiftimari poteft, tempus omne ejusmodi operationibus utcunque follicite inftitutis graphice determinatum, duobus, tribusve minutis incertum reddi. Interim hæc accu-

accuratio abunde ſufficit, ſi in eum ſolummodo finem tempus quæratur, ut quis obſervationi ſatis mature ſe accingat. Unde Problema, quod huic ſubjungimus, tunc ſolum uſum habet, quando quis exacte ſcire cupit, quid ex elementis tabularum elici poſſit, ut ſeu comprobentur, ſeu emendentur.

812. PROBLEMA III. *Determinare per calculum phænomena eclipſis ſolaris.*

Reſolutio. I. Quæratur graphice, vel calculo rudius inſtituto, initium & finis eclipſeos ſolis, & tempus durationis in ſex, ſeptem, aut 8 partes æquales dividatur. (ſi duratio ſit horaria circiter, ſufficit eam in quinque partes tribuere). Exemplum ſit in eclipſi diei 26 Octob. 1753, cujus initium cum ſit circa $8\frac{1}{2}$ h., & finis 11 h. tempore medio mane, tota duratio dividatur in tricena minuta, & ſingula intervalla ſcribantur ad initium totidem columnarum, quemadmodum videri poteſt in tabula huic problemati ſubjecta, quæ diſpoſitionem calculi exhibet.

813. II. Calculetur ex tabulis aſtronomicis pro temporibus in columnis notatis locus verus ſolis, locus verus lunæ, ejusque latitudo, indeque pro ſingulis inveniantur diſtantiæ lunæ a polo eclipticæ ſupra horizontem, & parallaxis horizontalis, a qua, ut parallaxis ſolis compenſetur, 10″ ſubtrahantur. ſumtis dein partibus proportionalibus, eadem in reliquis columnis notentur.

814. III. Tempus medium ab initio cujusvis columnæ notatum convertatur in gradus, & eidem addatur locus medius ſolis: ſumma eſt (337) punctum æquatoris, quod tempore cuivis columnæ adſcripto per meridianum tranſit. Quæratur ex tabulis aſtronomicis *primo* punctum eclipticæ reſpondens puncto invento æquatoris (dicitur hoc punctum eclipticæ *punctum culminans*, cum ſimul cum priore ad meridianum veniat). *Secundo* angulus meridiani cum ecliptica ad punctum culminans. *Tertio* declinatio puncti culminantis; qua habita, quæratur ejusdem puncti altitudo (279). Tum inferatur: *ut radius eſt ad coſinum altitudinis puncti culminantis; ita eſt ſinus anguli eclipticæ cum meridiano ad coſinum altitudinis Nonageſimi.* Et rurſus: *ut radius ad cotangentem altitudinis puncti culminantis; ita eſt coſinus anguli eclipticæ cum meridiano ad tangentem arcus, qui* (in hemiſphærio terræ boreali) *addendus eſt longitudini puncti culminantis, quando punctum culminans eſt in primo vel ultimo quadrante eclipticæ; & ſubtrahendus in ſecundo & tertio* (oppoſitum faciendum eſt in hemiſphærio auſtrali), *ut habeatur Nonageſimus.* Totus hic calculus neglectis ſecundis tantum inſtituitur in gradibus, & minutis primis. Pro demonſtratione, ſit HER meridianus (fig. 106), HTR horizon, QT æquator, E punctum culminans. Si per E ducatur arcus EIP ita, ut angulus HEP ſit æqualis angulo eclipticæ cum

 meri-

meridiano, erit arcus E I P portio eclipticæ inter meridianum, & horizontem intercepta; & si sit minor 90 gradibus, erit complementum Nonagesimi, a puncto P semper 90° distantis. Jam in triangulo sphærico HEP ad H rectangulo, habetur angulus HEP, & latus HE; unde per primam analogiam reperitur angulus HPE, inclinationis eclipticæ ad horizontem, quæ æquatur (Trig. 12) altitudini Nonagesimi: deinde per secundam analogiam invenitur complementum arcus E I P, quod semper est minus 90 gradibus, quando HE & HEP sunt ejusdem speciei.

815. IV. Accipiatur in singulis columnis differentia inter locum verum lunæ, & Nonagesimum, ut habeatur distantia *vera* lunæ a Nonagesimo. Postea fiat: *ut quadratum radii est ad factum ex sinu altitudinis Nonagesimi in sinum distantiæ* apparentis *lunæ a Nonagesimo; ita est parallaxis horizontalis correcta ad parallaxin lunæ in longitudine.* Quoniam autem in hoc calculo adhibenda est distantia apparens a Nonagesimo (quæ semper est æqualis summæ ex distantia vera, & parallaxi in longitudine), ne duplex calculus ex integro faciendus sit, is tantum instituatur accurate pro prima & secunda columna, adhibitis ab initio distantiis veris, ut reperiantur parallaxes circiter, dein calculus resumatur, additis ad distantias veras parallaxibus inventis; sicque obtinebuntur parallaxes veræ primæ & secundæ columnæ, e quarum comparatione facile constabit, quid addi debeat distantiæ veræ columnæ tertiæ, ut ejusdem calculi subsidio parallaxis vera in longitudine habeatur. Atque ita per reliquas columnas progrediendum usque ad ultimam.

816. V. Inferatur: *ut radius est ad cosinum altitudinis Nonagesimi; ita est parallaxis horizontalis correcta lunæ ad parallaxin approximatam in latitudine.* Deinde: *ut tangens distantiæ apparentis lunæ a nonagesimo, ad cosinum summæ ex distantia vera lunæ a polo eclipticæ supra horizontem, & parallaxi approximata in latitudine; ita est parallaxis in longitudine ad quantitatem semper subtrahendam a parallaxi approximata in latitudine, ut habeatur vera,* saltem si distantia apparens lunæ a Nonagesimo, & ejus distantia apparens a polo eclipticæ non sit altera minor, altera major 90 gradibus, quo casu correctio est additiva.

817. Observa. Analogiæ præcedentium duorum numerorum deductæ sunt ex formulis N. 434 relatis, omisso solummodo cosinu latitudinis lunæ, qui ad sensum æqualis radio in eclipsibus solaribus. Analogia, qua reperitur correctio, est pars secunda formulæ secundæ, in qua compendii causa parallaxi horizontali substituta est parallaxis in longitudine.

818. VI. Singulis longitudinibus veris lunæ addantur singulæ parallaxes in longitudine, si luna in ordine signorum jam ultra

Nona-

Nonagesimum progressa est; subtrahantur vero, si longitudo lunæ minor est: hac ratione habebitur pro singulis columnis longitudo lunæ apparens. Addantur etiam parallaxes in latitudine distantiis veris lunæ a polo eclipticæ supra horizontem, ut obtineantur distantiæ apparentes; ex quibus habebuntur etiam latitudines lunæ apparentes.

819. VII. Accipiatur quævis latitudo apparens lunæ pro una catheto trianguli rectanguli rectilinei, & differentia inter locum verum solis, & longitudinem apparentem lunæ pro altera catheto, & quæratur hypotenusa, quæ est distantia apparens centrorum lunæ & solis.

820. VIII. Fiat pro prima & ultima columna: *ut radius est ad cosinum distantiæ apparentis lunæ a nonagesimo; ita est sinus altitudinis Nonagesimi ad sinum altitudinis lunæ prope veræ*, quæ si ad duos, tresve circiter gradus cognoscatur, satis est, ut possit correctio semidiametri horizontalis lunæ in tabulis astronomicis reperiri.

821. IX. Accipiatur summa semidiametrorum lunæ & solis hac ratione correctarum; & interpolentur tres distantiæ apparentes centrorum ex primis tribus columnis; item tres ex reliquis tribus columnis, ut inveniantur duo momenta, quibus distantia centrorum æquatur summæ semidiametrorum repertæ: erit primum initium eclipseos, alterum finis ejusdem. Interpolentur etiam distantiæ centrorum e quatuor columnis medio propioribus; & ope formulæ *Maximi* (97) inveniatur momentum, quo distantia centrorum est minima ipsaque distantia: hæc subtrahatur a summa semidiametrorum apparentium, & inferatur *ut semidiameter solis est ad residuum; ita sunt 6 digiti ad numerum digitorum, qui indicat quantitatem eclipsis* versus eam partem, in quam cadit latitudo lunæ eo momento, quod est medium eclipseos.

822. Eædem phases reperiri possunt, si calculentur parallaxes in ascensione recta & declinatione, & applicentur ad ascensiones rectas & declinationes veras lunæ; vel si calculentur Azimutha solis & lunæ cum parallaxibus in altitudine lunæ: sed hæc in præsens non discutimus; juverit tamen in his se exercuisse, ut in calculis astronomicis promptiores reddamur.

Dispositio Calculi Eclipsis Solis.

Exemplum pro die 25. Octobris A. 1753.

Tempus medium	20 h. 20′	20 h. 50′	21 h. 20′	21 h. 50′	22 h. 20′	22 h. 50′
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Locus verus ☉	213 4 32	213 5 47	213 7 2	213 8 17	213 9 32	213 10 48
Locus verus ☾	211 47 0	212 4 42	212 22 25	212 40 8	212 57 51	214 15 35
Distant. ☾ a polo B . .	89 42 43	89 31 5	89 29 27	89 27 49	89 26 11	89 24 33
Parall. correct. ☾ . . .	58 31	58 31	58 30	58 30	58 29	58 29
Tempus med. in grad.	305 0	312 30	320 0	327 30	335 0	342 30
Long. med. ☉	214 50	214 51	214 52	214 53	214 54	214 56
Punct. æqua. in merid.	159 50	167 21	174 52	182 23	189 54	197 26
Punctum culminans .	158 11	166 15	174 24	182 36	190 47	198 54
Ang. eclipt. cum meri.	68 2	67 7	66 37	66 32	66 53	67 39
Declin. punct. culmin.	8 32 B.	5 26 B.	2 14 B.	1 2 A.	4 17 A.	7 25 A.
Altit. punct. culmin.	49 41	46 35	43 23	40 7	36 52	33 34
Altitudo Nonagesimi	53 7	50 43	48 9	45 27	42 38	39 43
Nonagesimus	140 34	146 3	151 38	157 18	163 9	169 14
Distant. ☾ a Nonages.	71 13	66 2	60 44	55 22	49 49	45 2
Parall. in longit. . .	44 31	41 36	38 15	34 33	30 29	26 38
Parall. in latit. . . .	35 9	37 6	39 5	41 6	43 6	45 3
Longit. appar. ☾ . .	212 31 31	212 46 18	213 0 40	213 14 41	213 28 20	213 42 13
Dist. appar. a Polo B	90 7 52	90 8 11	90 8 32	90 8 55	90 9 17	90 9 36
Differ. long. ☉ & ☾.	+ 33 1	+ 19 29	+ 6 22	− 6 24	− 18 48	− 31 25
Distant. centrorum. .	33 57	21 8	10 39	10 59	20 58	32 51
Altit. ☾.	14 20					26 38
Semidiam. horiz. ☾.	16 8					16 8
Semidiamet. appar. ☾.	16 12		16 14			16 16
Semidiam. ☉.	16 11		16 11			16 11
Summa Semidiam.	32 23		32 25			32 27

Igitur	*Temp. med.*	*Temp. vero & civili*
Initium	20 h. 23′, 24″	die 26, 8 h. 39′ 8″ mane
Medium	21 34, 46	9 50 30
Finis	22 49, 4	11 4 46

Quantitas 8 dig. 29 minut. ex parte australi solis.

ARTICULUS II.

De usu observationum eclipsium solis & lunæ.

823. Observationes eclipsium summam habent utilitatem, maxime si accuratæ sint. Inprimis enim indicant, an elementa theoriæ solis & lunæ, quæ in tabulis astronomicis jam extant, recte constituta sint, an secus; ut inde seu emendentur, seu majorem firmitatem accipiant.

Dein præcipuus earum usus est in determinandis longitudinibus locorum, in quibus institutæ sunt, seu saltem in differentia eorum meridianorum invenienda, in quo versatur pars Geographiæ uti difficilior, ita ceteris majoris momenti. Verum quoniam in his eruendis aliter tractandæ sunt eclipses solares, aliter lunares, distinctis de utrisque titulis agemus.

Usus observationum eclipsium lunæ in inveniendis longitudinibus geographicis.

824. Cum phases eclipsium lunæ universales sint (651), manifestum est, quod (616) si duo observatores in diversis locis positi eandem phasin eodem temporis momento habeant, uterque locus sit in eodem meridiano terrestri, adeoque cognita longitudine loci alterius, certum fiat, alterius eandem esse omnino longitudinem. At si uterque observator eandem phasin diverso spectet tempore, evidens est, eos sub diversis meridianis esse collocatos, quorum differentia sit differentia temporis observati in gradus conversa, horæ uni 15° tribuendo. Patet denique locum, in quo phasis tardius est observata, esse orientaliorem altero, quippe qui prior ad meridianum venerit, ac altero citius habuerit meridiem.

825. Exemplum sit eclipsis diei 8 Augusti A. 1729. Immersio lunæ in umbram observata fuit Parisiis a D. Cassini 12 h. 19′, 13″: & emersio 13 h. 59′, 0″ (Monum. Acad. 1729, pag. 345). In insula Barbados (Antillarum una) immersio 8 h. 11′, & emersio 9 h. 51′ fuit observata a D. Stevenson (Transact. Philos. N. 416, pag. 441). Differentiæ sunt 4 h. 8′, 13″, & 4 h. 8′, 0″. Si accipiatur medium 4 h. 8′ 6″, & convertatur in gradus, liquet, insulam Barbados (ubi minus temporis numeratum fuit) esse Parisiis occidentaliorem 62°, 1′$\frac{1}{2}$; & hinc posita longitudine Parisiorum 19°, 53′$\frac{1}{2}$ ab insula Ferri, est longitudo insulæ Barbados 317°, 52′.

826. Quia penumbra phases initii & finis eclipseos valde incertas reddit, Astronomi diligenter annotant momenta temporis, quibus diversæ lunæ maculæ in umbram ingrediuntur, & egrediuntur, id, quod facile observatur ope chartæ lunaris, & bonæ notæ telescopii, 4,

vel 5 pedes longi. Hac ratione obſervationum numerus augetur, & pluribus differentiis inter ſe collatis differentia meridianorum certius eruitur.

827. In eundem finem adhibentur quoque obſervationes eclipſium ſatellitum Jovis (quorum calculus nihil differt ab eo, qui pro lunaribus inſtituitur). Obſervandæ autem ſunt hæ eclipſes tubis 12 vel 15 pedum; & ſi tempora phaſium earundem inter ſe conferantur, differentia meridianorum accurratius obtinetur, quam per eclipſes lunares.

Uſus obſervationum eclipſium ſolis in determinandis longitudinibus.

828. Quoniam ſolis eclipſes univerſales non ſunt, earum obſervationes non ſine reductionibus, quas jam indicabimus, ad inveniendam meridianorum differentiam adhiberi poſſunt.

829. Supponamus, Pariſiis initium eclipſis die 26 Octobris A. 1753 obſervatum eſſe 8 h. 41′, & finem 11 h. 11′; Bononiæ in Italia (cujus latitudo Geographica eſt 44°, 30′) initium fuiſſe 9 h. 27′, finem 11 h. 59′. Quærantur primo ex tabulis aſtronomicis omnia elementa neceſſaria pro calculo, & determinatione graphica phaſium hujus eclipſis. Conſtruatur inde figura, ut ſupra (806), & fiat projectio paralleli Bononienſis (vid. fig. 102). Accipiatur in ſcala ſumma ſemidiametrorum ſolis & lunæ (deducta ſi fieri poteſt, ex ipſa obſervatione Bononiæ facta; ſin autem, ex Tabulis); crus circini alterum collocetur ad 8 h. 41′ paralleli Pariſini; altero deſcribatur verſus occidentem arcus B H, ſecans orbitam apparentem K Q. Poſtea crus prius ponatur ad 11 h. 11′ paralleli Pariſini, & altero deſcribatur ad orientem arcus M N, qui eandem orbitam K Q ſecet.

Secundum obſervationem Pariſinam, duratio eclipſis fuit 2 h. 30′. Accipiatur circino intervallum 2 h. 30′ in orbita apparente Q K in tempus diviſa, & manente hac circini apertura, collocetur crus unum in T arcus B H, alterum in S arcus M N, ita ut recta jungens puncta T & S, ſit parallela ad K Q. Erit recta T S verus ſitus orbitæ apparentis lunæ ex obſervationibus; quam *orbitam correctam* vocabimus. Diviſiones orbitæ K Q transferantur in T S, ita, ut ad punctum T accurate veniat 8 h. 41′, & ad punctum S 11 h. 11′.

Circino ad intervallum ſummæ ſemidiametrorum ſolis & lunæ aperto, ponatur alterum crus in parallelo Bononienſi ad punctum C, in quo 9 h. 27′ notantur; incidet crus alterum verſus partem occidentalem orbitæ correctæ in D, cui adſcripta ſunt 8 h. 51′. Ex hoc intelligitur, quod tempore vero, quo Bononiæ initium eclipſis obſervatum eſt, Pariſiis fuerit 8 h. 51′: aut (quod eodem reci-

recidit) quod eo momento, quo centrum lunæ fuit in D, Bononiæ fuerit 9 h. 27′, Parisiis vero 8 h. 51′. Igitur ex hac observatione Bononia orientalior est Parisiis 36′ in tempore. Similiter collocetur crus unum circini ad punctum E paralleli Bononiensis, ubi notantur 11 h. 59′: cadet alterum versus orientem in orbita correcta in punctum F notatum 11 h. 22′. Inde infertur differentia meridianorum 37′; & accepto inter utramque medio, reperitur Bononia orientalior Parisiis 36′½ in tempore, seu 9°, 7′½; & hinc ejus longitudo est 29°, 1′.

830. Observa I. Ex comparato situ & divisione orbitæ correctæ cum situ & divisione orbitæ KQ constructæ ex tabulis, deteguntur errores tabularum tam in longitudine, quam in latitudine. Differentia enim temporum punctis intersectionum utriusque orbitæ cum GL adscriptorum, ostendit, quantum tabulæ tempus veræ conjunctionis solis ac lunæ vel prævertant, vel sequantur. In præsenti exemplo patet, tabulas veram conjunctionem 2′ tempoporis prævertere. Intervallum autem utriusque orbitæ indicat errorem tabularum in latitudine; hic quidem latitudo ☾ e tabulis 2′′ circiter vera major eruitur.

831. Observa II. Quamvis per operationes ejusmodi graphicas nemo sibi blandiri audeat, differentiam meridianorum accuratiorem se reperisse, quam quæ 2′ temporis a vera diffidere possit; quoniam tamen notitia longitudinum Geographicarum permagni momenti est, comparatio observationum eclipsium solarium negligenda non est, quia accepto medio inter differentias meridianorum hac methodo inventas, vera ea accuratione, quæ necessaria est, determinatur. Sed enim majore cum certitudine habebitur ex calculo parallaxeon, præcipue si ad meridianum exacte cognitum simul observata debita accuratione sit longitudo & latitudo lunæ, ut elementa e tabulis desumpta corrigi possint. Calculus nihil diversi habet ab illo, quem superius docuimus, ut adeo sola præcedentis exempli applicatio satis futura sit, ut plene comprehendatur.

832. Sit igitur initium eclipsis solis diei 25 Octobris 1753 Bononiæ observatum 21 h. 27′, 0′′ tempore vero, seu 21 h. 11′, 16′′ tempore medio. Cum constet, differentiam meridianorum quæsitam esse intra 30′ & 40′ temporis, fiat duplex hypothesis; in altera ea ponatur 40′; 30′ in altera. En rei totius ordinem:

Tempus

	I. Suppositio			II. Suppositio		
Tempus medium observat. reductum ad Merid. Parif.	20 h.	31′	16″	20 h.	41′	16″
Tempus medium observat. Bonon. in grad. conversum	317°	49′	″	317°	49′	″
Longitud. med. ☉ ad Merid. Parif. - - - -	214	50		214	50	
Punctum æquatoris in Merid. assumpto Bonon. -	172	39		172	39	
Punctum culminans eclipt. - - - - - - - -	172	0		172	0	
Angulus eclipticæ cum Merid. - - - - - - -	66	43		66	43	
Declinatio puncti culminantis - - - - - - -	3	11 B		3	11 B	
Altitudo puncti culminantis Bononiæ - - - -	48	31		48	31	
Altitudo Nonagesimi - - - - - - - - - -	52	31		52	31	
Nonagesimus eclipticæ - - - - - - - - -	152	42		152	42	
Longit. vera ☾ correcta ad Merid. Parif. - - -	211	51	39	211	57	32
Distant. correcta a polo boreali eclipticæ - - -	89	33	7	89	32	34
Distant. vera ☾ a nonagesimo - - - - - - -	59	12		59	18	
Parallaxis in longitudine - - - - - - - - -		40	16		40	14
Parallaxis in latitudine - - - - - - - - -		35	44		35	44
Longit. apparens ☾ - - - - - - - - - - -	212	31	55	212	37	56
Distant. apparens ☾ a polo boreali eclipticæ - -	90	8	51	90	8	16
Latitudo apparens ☾ - - - - - - - - - - -		8	51		8	18
Longitudo vera ☉ - - - - - - - - - - - -	213	5	0	213	5	25
Different. Longit. apparent. ☉ & ☾ - - - -		33	5		27	29
Distant. apparens centrorum ☾ & ☉ - - - - -		34	15		28	43

Ex his calculis liquet, quod tempore 10′, 0″ sol & luna, visi Bononiæ, ad se invicem accesserint 5′ 32″; sed tempore observationis Bononiæ factæ distantia apparens centrorum erat 32′, 25″; quæ est summa semidiametrorum solis & lunæ: unde fiat: ut 5′, 32″ sunt ad 10′, 0″; ita 1′, 50″ (differentia inter 34′, 15″ & 32′, 25″) sunt ad 3′, 28″, quibus Bononia est minus orientalis Parisiis, quam in prima hypothesi fuit assumptum. Igitur vera differentia Meridianorum est 36′, 32″.

Si ejusmodi calculus instituatur etiam pro fine eclipseos, vel immersione, aut emersione alicujus maculæ solaris, cujus positio in disco accurate fuit determinata, plures obtinebuntur Meridianorum differentiæ, quæ sese mutuo comprobent, vel inter quas accipiendum est medium, ut differentia vera quæsita habeatur.

833. Observationes occultationum stellarum fixarum a luna, habent eundem usum, quem eclipses solares. Calculus idem instituitur, nisi quod ad inveniendas parallaxes sufficiat intervallum inter initium & finem in quatuor partes æquales dividere. Constructio graphica, tam ut prædici possint, quam ut eruatur differentia medianorum, eadem omnino est, ac pro sole. Quod ut ostendatur, unum exemplum satis erit.

Articulus III.

Determinatio graphica occultationum ſtellarum per lunam.

834. Accidit non raro, ut luna quasdam ſtellas fixas noſtris oculis eripiat, infra quas ſcilicet ejus orbita immediate tranſit. Hoc eclipſium genus parallaxi æque, ac ſolares, obnoxium eſt, neque eſt univerſale. Europæ incolis luna non occultat, niſi eas ſtellas, quarum latitudo borealis in earum conjunctione cum luna aliquot minutis minor, & latitudo auſtralis aliquot minutis major eſt latitudine lunæ ejusdem nominis, cum parallaxis (408) locum apparentem lunæ verſus horizontem deprimat, adeoque minuat latitudinem borealem, & auſtralem augeat.

835. Proponatur exempli cauſa determinanda eclipſis ſtellæ, quam *Aldebaran* dicunt, ſeu α ♉, quæ contigit die 2. Auguſti A. 1736. Ex Tabulis juxta theoriam Newtonianam conſtructis, conjunctio lunæ cum hac ſtella contigit Pariſiis 4 h. 56′ tempore vero mane, in 6°, 6′, 26″ ♊, latitudine ſtellæ exiſtente 5°, 29′, 2″ auſtrali, declinatione vero boreali 15°, 56′$\frac{1}{2}$; per meridianum eadem tranſiit 7 h. 30′, 36″ mane. Luna habuit latitudinem auſtralem 4°, 44′, 21″, motus ejus horarius in longitudinem erat 32′, 52″; in latitudinem vero creſcentem 1′, 7″. Ejus ſemidiameter apparens horizontalis 15′, 40″, parallaxis horizontalis 57′, 12″.

836. Conſtructa ſcala A G (fig. 103), deſcribatur radio æquali parallaxi horizontali 57′, 12″, ſemicirculus O X C, qui exhibet hemiſphærium boreale telluris e ſtella viſum. Conſideretur ſtella, ut ipſe ſol; ejus tranſitus per meridianum, ut ipſum momentum meridiei; ejus declinatio eodem modo adhibeatur, ac declinatio ſolis in eclipſibus ſolaribus; atque hac ratione determinetur (607) in hoc hemiſphærio locus poli Borealis P, qui eſt in ipſo terræ diſco, cum declinatio ſit borealis. Fiat dein projectio elliptica paralleli Pariſiorum, quatenus e ſtella viſibilis eſt, pro declinatione 15°, 56′$\frac{1}{2}$. Diviſiones horariæ in arcu inferiore ellipſeos faciendæ ſunt ob declinationem borealem (626). Primæ in linea G P, quæ meridianum deſignat, adſcribatur 7 h. 30′$\frac{1}{2}$, reliquis verſus occidentem horæ priores.

Accipiantur in ſcala 44′, 41″, quæ eſt differentia inter latitudinem lunæ 4°, 44′, 21″, & latitudinem ſtellæ 5°, 29′, 2″. Ex G. erigatur ad O C perpendicularis G L, æqualis huic differentiæ. Motus horarius lunæ 32′, 52″ transferatur ex G in B verſus orientem, & erigatur ex B perpendicularis B D æqualis 43′, 34″, quæ eſt differentia inter latitudinem ſtellæ, & latitudinem lunæ 5 h. 56′, una hora poſt conjunctionem. Per puncta L & D ducatur orbita lunæ D L Q, quæ in

 par-

partes temporis dividatur ita, ut punctum L respondeat 4 h. 56′, & punctum D 5 h. 56′.

Accipiatur in scala semidiameter lunæ 15′, 40″, & crure uno circini in ellipsi, altero in orbita lunæ posito, quærantur duo puncta versus occidentem R & Q, idem tempus notantia: reperientur ad 3 h. 41′. Atque hoc est tempus occultationis stellæ per discum lunæ. Quærantur similiter alia duo E & F versus orientem ejusdem conditionis: invenientur ad 4 h. 47′, quod est tempus, quo stella e disco lunari iterum emergit.

Denique si ope scalæ mensuretur distantia punctorum, quibus in utraque orbita adscriptum est 4 h. 14′, invenietur, centrum lunæ ad partem borealem stellæ transivisse, & ab ea habuisse distantiam 6 minutorum circiter.

Articulus IV.

Methodus construendi schema universale phasium eclipseos solaris.

837. Nihil visu dignius, quam omnes diversæ phases eclipseos solaris in charta Geographica designatæ ea ratione, ut in diversis regionibus in eadem exhibitis evenire debent. Hunc in finem paucis describam methodum facilem sine demonstrationibus constructionis. Qui rite animo comprehenderunt, quæ Sectione IV, & tribus præcedentibus Articulis dicta sunt, rationes citra difficultatem assequentur. Sumam autem exempli loco eclipsin diei 26 Octobris 1753.

838. Calculatis omnibus elementis necessariis pro constructione projectionis orthographicæ hujus eclipseos, tempus verum conjunctionis reducatur ad primum meridianum chartæ, qua quis uti vult, v. g. ad meridianum insulæ *Ferri.* Itaque cum conjunctio Parisiis fiat 10 h. 57′, ea in meridiano primo fiet 9 h. 37′½, seu 2 h. 22′½ ante meridiem, quæ in arcum æquatoris conversæ dant 35° 37′.

839. In circulo OXC (fig. 104), cujus radius circiter unius pedis Reg. Paris. & æqualis parallaxi horizontali lunæ 58′, 30″ in scala AB acceptæ, describatur orbita apparens centri lunæ KL, ut in præcedentibus Articulis factum, nisi quod LK (æqualis motui horario composito lunæ & solis) non in partes horæ, sed in quindecim gradus dividi debeat ita, ut punctum L respondeat 35°, 37′, & punctum K 20°, 37′. Hæc divisio per totam orbitam continuetur.

840. E puncto G ducatur GE, ad eandem orbitam in I perpendicularis, & in ea utrinque accipiatur ID, IE, æqualis sum-

mæ

mæ ſemidiametrorum ſolis & lunæ $32'$, $19''$. Diameter ſolis $32'$, $22''$ dividatur in tot partes æquales, quot digiti in ſchemate exprimi debent: v. g. ſi terni ſolummodo digiti exhibendi, ut in noſtra figura, adeoque quatuor intervalla facienda ſunt, dividantur $32'$, $22''$ per 4; erit una pars $8'$, $5''\frac{1}{2}$. Accipiatur hæc quantitas in ſcala, & transferatur ex D & E verſus I, punctis intermediis $8'$, $5''\frac{1}{2}$ diſtantibus notatis, per quæ tot parallelæ ad orbitam apparentem KL ducantur, quot circulus OXC capit. Ad ſingulas adſcribatur phaſis, quam exhibere debent, & dividantur omnes eadem ratione, qua orbita KL, quamvis hic in figura tam exigua, vitandæ confuſionis cauſa, non niſi unica ſit diviſa, pro norma ceterarum.

841. Si acceptis his intervallis crus circini cadit in punctum I, ut hic contingit, eclipſis erit totalis ſine mora. Si ultimum intervallum non attingit punctum I, ſed utrinque aliquod exiguum relinquit ſpatium, eclipſis eſt totalis cum mora. Intervallum inter duas parallelas utrinque vicinas puncto I, determinat omnia loca, in quibus eclipſis totalis eſt. Denique ſi ultima puncta cadant ex utraque parte paullum ultra punctum I, erit omnibus locis inter parallelas puncto I utrinque proximas comprehenſis eclipſis annularis.

842. Determinetur (607) locus poli æquatoris, & ducatur GX, quæ exhibet Meridianum fixum, per quem omnes meridiani terreſtres ſucceſſive tranſeunt, & ſub quo eſt meridianus primus, dum in Inſula Ferri eſt meridies. Fiant dein (624) projectiones arcuum diurnorum parallelorum terreſtrium, ut vitetur confuſio, denis gradibus diſtantium, qui (gradus) in Meridiano GX notentur. Inutile foret, ſi id fieret pro pluribus, quam capiat ſpatium inter parallelas per D & E ductas. Per puncta horaria, quæ reperiuntur, dum ellipſes deſcribuntur, ducantur aliæ curvæ itidem ellipticæ, quæ circulos horarios deſignant, ſeu ſitus ſucceſſivos meridiani primi (pro ſingulis horis, quæ in Inſula *Ferri* numerantur) reſpectu meridiani fixi GX. Atque hinc in ellipſi æquatorem exhibente utrinque a GX, ſcribantur infra diviſionum puncta 15°, 30°, 45° &c, & ſuperne horæ, matutinæ verſus occidentem, veſpertinæ verſus orientem, cum hemiſphærium telluris e ſole viſum ab occaſu in ortum rotetur.

843. His ita præparatis, conſtruantur tabulæ, quæ exhibeant longitudines & latitudines omnium locorum, in quibus eclipſis eſt centralis; item illorum, in quibus eſt novem digitorum, ſex digitorum &c, denique illorum, in quibus ſolummodo videntur limbi ſolis & lunæ ſe contingere. Ut itaque hæ tabulæ conficiantur, v. g. prima, patet, in omnibus locis ſub orbita centri lunæ KL

ſitis eclipſin eſſe centralem. Jam vero hæc orbita occurrit imprimis (circa medium projectionum parallelorum 40° & 50°) primo meridiano in circulo horario horæ 8, qui a meridiano fixo G X 60° diſtat; & punctum diviſionis orbitæ eſt illic 58°$\frac{1}{2}$: igitur eclipſis videtur centralis mane hora 8 ſub parallelo 45° in loco, qui primo meridiano eſt 1°$\frac{1}{2}$ occidentalior, ſive cujus longitudo eſt 358°$\frac{1}{2}$. Similiter punctum diviſionis orbitæ K L 56$\frac{1}{2}$ occurrit primo meridiano in circulo horæ 9, ſive ad diſtantiam 45° a meridiano fixo G X, eaque interſectio incidit in projectionem paralleli 40° : ergo eclipſis eſt centralis hora 9 ſub parallelo 40° in loco orientaliore 11°$\frac{1}{2}$, quam primus meridianus; hoc eſt in loco, cujus longitudo eſt 11°$\frac{1}{2}$. Simili ratione inveniuntur loca, in quibus obſcuratio maxima eſt 9, 6, 3 digitorum &c, uti etiam illa, in quibus limbi ſolis & lunæ ſe tantum contingunt. En tabulas

Horæ	Centralis		Phaſes maximæ Auſtrales.							
			9. digit.		6. digit.		3. digit.		Contact. limb.	
	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.
7	*	*	346°$\frac{1}{2}$	38° B	348°	30° B.	348°$\frac{1}{2}$	22°$\frac{1}{2}$ B.	348°$\frac{2}{3}$	14° B.
8	358°$\frac{1}{2}$	45° B.	359$\frac{1}{2}$	35	1$\frac{1}{2}$	26	1$\frac{1}{2}$	17$\frac{1}{2}$	1$\frac{1}{2}$	9$\frac{1}{2}$
9	11$\frac{1}{2}$	40	12$\frac{1}{2}$	30	13	21	12$\frac{1}{3}$	13	12$\frac{1}{2}$	4
10	23	34$\frac{1}{2}$	23	25	23	16	22	7$\frac{1}{2}$	21$\frac{1}{2}$	1 A.
11	32$\frac{1}{2}$	29$\frac{1}{2}$	32	19$\frac{1}{2}$	31$\frac{1}{2}$	11	30$\frac{3}{4}$	2$\frac{1}{2}$	30	6
Merid.	41$\frac{1}{4}$	24	40	15	39$\frac{1}{3}$	6	37$\frac{3}{4}$	2$\frac{1}{2}$ A.	37$\frac{1}{2}$	10$\frac{1}{2}$
1	49$\frac{1}{2}$	20$\frac{1}{2}$	48	11$\frac{1}{2}$	47	3	46	6	45$\frac{1}{3}$	13$\frac{1}{1}$
2	58	18	56$\frac{1}{2}$	9	55$\frac{1}{4}$	0	54$\frac{1}{2}$	8	54	15
3	67$\frac{1}{4}$	17	65$\frac{1}{2}$	8	64$\frac{1}{3}$	1$\frac{1}{4}$ A	64	9	63$\frac{1}{2}$	16
4	78	18	76	8$\frac{1}{2}$	75	1 A	74	9	74	16
5	90$\frac{1}{2}$	20	88$\frac{1}{2}$	9	87$\frac{1}{2}$	0$\frac{3}{4}$ B.	86$\frac{1}{3}$	7$\frac{1}{2}$	86	15
6	*	*	*	*	101	3 B.	100$\frac{1}{3}$	5	100	12$\frac{1}{2}$

Horæ	Phaſes Maximæ Boreales.					
	9. digit.		6. digit.		3. digit.	
	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.
8	355°$\frac{1}{2}$	55° B.	*	* B.	*	* B.
9	8	52	6°	67°	*	*
10	22	47	20	61	*	*
11	32$\frac{1}{2}$	41	32	56	*	*
Merid.	42	35	43	49$\frac{1}{2}$	*	*
1	51	31$\frac{1}{2}$	52$\frac{3}{4}$	45	*	*
2	60	28	62$\frac{1}{2}$	42	68$\frac{1}{2}$	70
3	69$\frac{1}{2}$	26$\frac{3}{4}$	73	40	*	*
4	80$\frac{1}{2}$	27	84$\frac{1}{2}$	40	*	*
5	93$\frac{1}{2}$	28	*	*	*	*

Poſtquam hæc omnia puncta ita determinata ſunt, facile in charta vel globo terreſtri ducuntur curvæ, ut fig. 105 exhibet.

844. Ut inveniantur loca, in quibus eſt medium eclipſis, dum ſol oritur, vel occidit, attendatur, cujus paralleli projectio, ſeu ellipſis terminetur in circuli OXC circumferentia, ubi hæc a lineis phaſium ad orientem, & occidentem ſecatur. Calculetur (291) arcus ſemidiurnus ſolis competens ejus declinationi auſtrali 12°, 35′, & latitudini paralleli; & ex comparatione hujus arcus cum gradu notato in linea phaſium ad punctum interſectionis peripheriæ OXC invenietur longitudo loci quæſiti.

In exemplo; punctum 59° $\frac{1}{3}$ orbitæ lunæ KL ſecat ad occidentem peripheriam OXC in extremitate projectionis paralleli 50°. Arcus ſemidiurnus hujus paralleli eſt 74° $\frac{2}{3}$: igitur locus, ubi ſole oriente eſt eclipſis centralis, eſt in latitudine boreali 50°, & longitudine 15° $\frac{1}{3}$. Ad orientem punctum 15° orbitæ KL ſecat peripheriam OXC in extremitate projectionis paralleli 21°, cujus arcus diurnus eſt 85°; ergo locus, in quo occidente ſole eclipſis eſt centralis, habet latitudinem borealem 21°, longitudinem 100°. Atque hunc in modum ſequens tabula fuit conſtructa.

Phaſes.	Medium Eclipſis.			
	Sole Oriente.		Sole Occident.	
	Longit.	Latit.	Longit	Latit.
Contactus limborum.	337° $\frac{1}{3}$	17° $\frac{1}{2}$ B.	102° $\frac{3}{4}$	12° $\frac{1}{2}$ A.
3. digit. Auſtral.	339 $\frac{1}{2}$	25	101 $\frac{1}{2}$	5
6. digit. Auſtral.	341	32 $\frac{1}{2}$	101	3 B.
9. digit. Auſtral.	342 $\frac{1}{4}$	41	100	12
Centralis.	344 $\frac{2}{3}$	50	100	21
9. digit. Boreal.	349	61	100	31 $\frac{1}{2}$
6. digit. Boreal.	7	73	100 $\frac{1}{2}$	44
3. digit. Boreal.	*	*	88	68

Ex hac tabula habetur ductus curvæ eas omnes terminantis, quæ phaſes maximas deſignant.

845. Ut habeantur loca, quibus oriente aut occidente ſole initium vel finis eclipſeos obtingit, accipiatur in ſcala AB ſumma ſemidiametrorum ſolis & lunæ 32′, 19″, & crure uno circini in circulo OXC ad extremitates projectionum parallelorum ſucceſſive poſito, collocetur alterum tum ad orientem, tum ad occidentem in orbita KL; & comparato arcu ſemidiurno cujusvis paralleli cum gradu orbitæ, in quem crus circini incidit, invenientur locorum longitudines. Sic ut ſciatur initium ac finis ſole oriente vel occidente ſub parallelo 40°, crus unum circini collocetur in

in extremo punĉto ellipſeos paralleli 40° ad partem occidentalem circuli O X C; incidet crus alterum verſus occidentem in punĉtum orbitæ K L 76°; verſus orientem vero in 47°. Arcus ſemidiurnus paralleli 40° eſt 79°; itaque ſub hoc parallelo initium eclipſis ſole oriente eſt loco 3° occidentaliori inſula Ferri, cujus conſequenter longitudo eſt 357°; finis autem eclipſeos ſole oriente eſt ſub eodem parallelo loco 32° occidentalioi inſula Ferri, cujus longitudo eſt adeo 328°. Quod ſi ad extremum alterum ejusdem ellipſis ex parte orientali circuli O X C ponatur crus circini, crus alterum incidet ex una parte in 9°, ex altera in 35° orbitæ K L. Hinc finis eclipſis ſole occidente contingit ſub parallelo 40° loco, cujus longitudo eſt 88°; & initium illi, cujus longitudo 114°. Hac methodo faĉta eſt ſequens tabula

Sub parall.	Sole Oriente.		Sole Occident.	
	Initium. Longit.	Finis. Longit.	Initium. Longit.	Finis. Longit.
70° Bor.	12°	346°	97° ½	77°
60	2 ½	334	108	88
50	359	329	113	90
40	357	328	114	88
30	353	328	115	86
20	346	332	115	85
17½	338 ½	338 ½		
10			113½	86
0			112½	89½
10 Auſt.			108	96
12½			100	100

Si hæc omnia punĉta in chartam vel globum translata conjungantur, habebitur curva in ſe ſe rediens, ac ſeipſam ſecans in punĉto, ubi ſol non niſi unico momento in meridie eſt viſibilis, quod contingit ſub parallelo 77°, 25′ (quod eſt complementum declinationis ſolis) in longitudine 37°, in quam nempe punĉtum I orbitæ K L cadit.

846. Omnes hæ curvæ pro diverſis caſibus diverſæ ſunt; attamen ſatis accurate deſcribentur, ſi punĉta vicina ſemper conneĉtantur.

CONCLUSIO.

Animadverſiones in Syſtema Phyſicum Aſtronomiæ.

847. Arĉti limites his leĉtionibus poſiti non admiſerunt, ut omnia referremus, quæ ſingillatim excutienda erant, ut explicatæ theoriæ partes omnes obſervationibus aſtronomicis jam a viginti ſæculis, & quod excurrit, inſtitutis exaĉte conformes demon-

monſtrarentur. Erat ſcilicet illud nobis magis cordi, ut claram ſimplicemque expoſitionem, atque ideo etiam ſat productam, eorum omnium daremus, quæ aſtronomia ſeu theoretica, ſeu practica ſibi vendicat, quam ut ſingularum veritatum evidentiam demonſtrationum rigore evinceremus.

Atque hinc factum, ut nihil afferremus de diverſis ſyſtematis mundi, quæ vel *Ptolomæi*, vel *Tychonis* nomine celebrata ſunt, quæ noſtris temporibus vix alibi locum merentur, quam ut in hiſtoria de diverſis hominum opinionibus referantur; hinc hypotheſes omnes phyſicas a Philoſophis excogitatas, ut cæleſtium corporum motus ad Mechanicæ leges exponerent, intactas reliquimus, illudque unum hac in re præſtitimus, ut vim centralem in ratione reciproca quadratorum diſtantiæ a puncto, in quod tendit, variabilem cum vi conſtante projectionis primitus impreſſa combinaremus. Eſt autem adeo liquidum, utramque hanc vim exiſtere, tamque evidentibus inductionibus oſtenditur, ut ſi quod ſyſtema phyſicum inquirendum eſt, combinatio harum duarum virium principii, cui ſuperſtruetur, ſequela immediata eſſe debeat. Quare ſyſtema tale vel originem legis, quam ſubjicimus, vel ei prorſus analogæ, detegat, eſt neceſſe.

848. Omnia phænomena motus corporum vel invitos cogunt, ut agnoſcamus, *omne corpus, vel potius omnem materiæ moleculam eſſe velut centrum ſphæræ cujusdam in infinitum extenſæ, cujus quivis radius ſit directio vis conſtantis & uniformis per totam radii longitudinem, quæ ſeu impellat ſeu trahat verſus centrum omnem materiæ in hoc radio exiſtentis moleculam: & actionem hujus vis eſſe ſemper in ratione reciproca duplicata diſtantiæ moleculæ illius a centro.*

849. Hinc intelligitur, cum hæc lex ſit univerſalis pro quavis materiæ creatæ molecula, quod duæ quævis moleculæ in ſe ſe mutuo agant intra ſphæram activitatis ſuæ: ita, ut ſi ſint æquales, earum niſus ad conjunctionem ſit æqualis & reciprocus utrinque. At ſi quod corpus componatur e duabus, tribus, quatuor &c. æqualibus maſſæ corporis alterius diſtantis, niſus reciprocus inter hoc, & quamvis maleculam prioris manebit quidem æqualis; verum quod in priore corpore plures ſint unitæ, niſus ſecundi in primum corpus erit duplus, triplus quadruplus &c. illius, quo primum in ſecundum tendit. &c.

850. Ex hoc deducitur, *quod ut ſtabiliatur ſyſtema aſtronomiæ phyſicæ neceſſe ſit, ut e principio pro fundamento aſſumpto, deducatur lex generalis, ſecundum quam duæ quævis moleculæ materiæ nitantur ſe ea vi conjungere, quæ ſit ſemper in ratione directa ſimplici maſſarum, & reciproca duplicata diſtantiarum;* ita ut hujus vis tot ſint modi, conditionesque agendi, quot moleculæ, & ſitus earum reſpectivi.

851.

851. Consensus admirandus inter omnia phænomena cælestia, & calculos ex hac lege deductos, astronomos impulit, ut eam tanquam fundamentum reciperent. Ex hac enim lege infertur, corpora omnia nos ambientia debere motu accelarato directione ad telluris superficiem perpendiculari descendere; ex hac discimus, cur luna circa terram volvatur (705): e combinatis diversis variationibus, quas mutuæ solis, terræ, ac lunæ actiones pro diverso situ efficiunt, eo tandem pertigimus, ut lunæ inæqualitates omnes certis calculi legibus sint adstrictæ. Nulla hypothesis, quæcunque adhuc ab astronomis excogitata fuit, motus lunares certis regulis subjicere potuit. Ex hac eadem lege Saturnus & Jupiter, aliorum planetarum comparatione corpora ingentia, suis inæqualitatibus sunt obnoxii, lunaribus analogis, tum pro diverso situ inter se, tum solis respectu. Denique huic legi debetur non modo summa accuratio in calculo motus planetarum, verum etiam vera cometarum theoria, ad quam ante Newtonum astronomorum nemo ne quidam prope accessit, ita, ut perfectioni astronomiæ jam vix aliud optari queat, quam observationes a veteribus nobis relictis accuratiores, quibus regulæ ex hac lege deductæ secure applicari possint, indeque elementa vera astronomica theoriæ cujusvis corporis cælestis constitui.

852. Quoniam itaque omnia corpora cælestia huic legi subjecta sunt, manifestum est, ea debere esse in perpetuo quodam motu & agitatione, ut ei, quantum possunt, obsequantur. Sol ipse locum quovis momento mutare cogitur, ut tali consistat semper, quo planetis in orbitis eccentricis circa eum gyrantibus sit, quam fieri potest, maxime propinquus. Verum ingens ejus moles & distantia saltem nobis hunc motum reddunt imperceptibilem.

853. Eadem conformitas inter hanc legem & cælestia phænomena ad hanc nos deducit veritatem, cui in systemate physico non minus locus dandus est; *nempe medium, in quo corpora cœlestia moventur, nihil eis resistere, quod sentiri possit.*

854. Difficultas in assignando hujus legis principio vere physico, quin in ea concilianda cum idea, quam velut natura duce habemus, ut existimemus, omnem motum fieri per impulsionem, Philosophos inter se se scidit. Alii eam tanquam absolute cum impulsu pugnantem rejiciunt; alii velut a Deo materiæ authore primitus constitutam admittunt, & attractionem appellant. Rectius quis fecerit, si ut innumeris commodis, quæ hæc lex adfert, fruatur, eam ex inductione omnium phænomenorum cælestium, nullo prorsus contrario, amplectatur interea, dum seu causa physica, seu lex vera, cui hæc adeo congruit, detegatur.

INDEX



INDEX
RERUM PRÆCIPUARUM.
OBSERVANDUM, NUMERIS NON PAGINAS, SED PARAGRAPHOS DESIGNARI.

§

Aberratio fixarum - 383
Methodus eam calculandi - - 786
Æquatio centri - - - 13
ejus calculus - - - 138
calculus æquationis maximæ - 142
quomodo ex obſervationibus deducatur - - - 143
Æquatio temporis, ſeu horologiorum 321
Æquatio altitudinum correſpondentium 326
Æquator terreſtris - - 231, 595
cæleſtis - - - 232
ejus axis videtur ſingulis annis circa axem eclipticæ revolvi - 603
ſub æquatore terreſtri dies & noctes ſemper ſunt æquales 259, 595
Æquinoctia, & puncta æquinoctialia - - - - 248, 593
Altitudo ſyderum - - 220, 621
meridiana - - - 268
ejus calculus - - 279, 622
calculus altitudinis cujusvis 290, 621
Altitudo poli - - - 261
ejus calculus - - - 290
quomodo obſervetur - 277
Altitudines correſpondentes - 326
Apſides - - - 38
linea apſidum ad ſenſum immobilis 38
videtur tamen habere motum directum valde lentum - 516
linea apſidum in luna jam eſt retrograda, jam directa - - 740
methodus inveniendi poſitionem lineæ apſidum in planetis - 109, 150
cauſa phyſica variationum - - 174
Almucantarath - - - - 326
Amplitudo ortiva & occidua - 283
ejus calculus - - - 291
Annus tropicus, ſydereus &c. - 490
Anomalia media - - - 129
vera - - - - 127

§

veræ calculus in ellipſi - 138
veræ calculus in parabola - - 203
vera quomodo in mediam convertatur - - - 139
Aphelium - - - - - 38
Apogæum ſolis - - - 484
Arcus diurni & nocturni - 265
eorum calculus - - 291
quomodo convertantur in tempus 292
Argumentum latitudinis - - 458
Aſtra ſunt in perpetua agitatione - 852
Aſcenſio recta ſyderum - - 301
ejus calculus - - 306, 312
uſus - - - 331, & ſeqq.
quomodo obſervetur - 327, & ſeqq.
Atmoſphæra cauſa refractionis - 436
cauſa crepuſculi - - 450
auget umbram telluris - 795
Azimuthum - - - - 282
ejus affectiones - 284, & ſeqq.
calculus - - - 290
Cæli rotunditas eſt ſolum apparens - 3
Celeritas, vide *velocitas*
Coluri - - - - 251
Cometæ - - - - - 16
eorum phænomena generalia e ſole - 177, & ſeqq.
reguntur iisdem legibus, quibus planetæ - - - - 198
eorum orbita eſt ad ſenſum parabolica - - - - 186
tempus eorum revolutionis nondum cognitum, & cur - - - 187
e quibus indiciis eorum reditus cognoſcatur - - - - 199
elementa neceſſaria pro eorum theoria - - - - 529
difficultas theoriam directe determinandi - - - - 541

methodus generalis eam determinandi ex obſervationibus 542 & ſeqq.
præcepta & exempla calculi cometarum in parabola 530 & ſeqq.
calculus eorum in ellipſi - - 572
eorum cauda - - - - - - 527
theoriæ præcipuorum cometarum tabula - - - - - 571
Conjunctio, ſuperior, inferior 379, & 635
Conſtellatio - - - - - 7
recenſentur conſtellationes - 9
Crepuſculum, ejus calculus - 450, & 451
Declinatio ſyderum - - 234, 302
ſolis - - - - - 608
quomodo obſervetur - 279
ejus calculus - 290, 312
circulus declinationis - 303
Deviatio - - - - - 773
Dies aſtronomicus eſt inæqualis 314, 317
- - - - - - - 614
civilis breviſſimus & longiſſimus 274
- - - - - - - 595
Digiti ecliptici - - - - 241
Diſtantia curtata - - - 457
Eccentricitas orbitæ ellipticæ - - 125
quomodo reperiatur - - 145, 150
lunæ variabilis - - - - - 746
Ecliptica eſt terminus comparationis motus annui planetarum, & cometarum - - - 243, 452
ejus obliquitas, vide *obliquitas*
Eclipſes lunæ vel ſatellitis, partiales, totales - - - - - 649
quando contingant 645, 646, 789, - - - - - 791
ſunt univerſales - - - - - 651
habent uſum in determinanda differentia meridianorum - - 655, 824
conſtructio graphica phaſium futurarum - - 797, & ſeqq.
calculus trigonometricus - 805
Eclipſes ſolis totales, annulares - 652
quando contingant - - 645
non ſunt univerſales - 651
quando videatur initium, & finis 653, - - - - - - - 789
conſtructio graphica phaſium - 806, - - - - - & ſeqq.
calculus - - - - 812
quomodo ex iis reperiatur differentia meridianorum - - 828
conſtructio ſchematis univerſalis 837
Elementa aſtronomica - - 481
Ellipſis eſt trajectoria planetarum - 124
in planetis non impedit calculum, velut moverentur in circulis maximis ſphæræ - - 241
eſt projectio orthographica circuli 356
quomodo dividatur in gradus - 359, - - - - - - - 361
calculus diſtantiæ foci a puncto quovis - - - - 140
calculus dimenſionum - 145
circuli, qui in planetarum ſuperficie deſcripti concipiuntur, fere omnes ſunt ellipſes - - 522
objecta immobilia in cælo videntur ſingulis annis ellipſin deſcribere 363
Emerſio - - - - - 790
Epicyclus - - - - - - 354
Epicycloides, earum ſpecies, & affectiones - - - - - 369, & ſeqq.
corpora cæleſtia motu proprio prædita videntur epicicloydes deſcribere - - - 573
planetæ videntur deſcribere epicycloides contractas - - 393
Geocentrica longitudo, latitudo - - 459
Heliocentrica longitudo, latitudo - 459
Horizon ſenſibilis, & rationalis - - 217
habet polum in zenith - 218
eſt terminus commodiſſimus, ad quem motus diurni phænomena referantur - - 313
Illuſiones opticæ motus cæleſtes afficiunt - - - - - 225
Immerſio - - - - - - 790
Inclinatio axis rotationis planetarum quomodo menſuretur - - 605
Inſtrumenta aſtronomiæ neceſſaria - - 22
Interpolatio, formulæ, & uſus 95, & ſeqq.
Keplerus, ejus prima lex - - 84
Latitudo ſyderis - - - 300
calculus - - - - - 306
circulus latitudinis - - 303
Libratio lunæ - - 704, 755, 756
Limites planetæ - - - 458
ecliptici - - - - - 649
Lex generalis in aſtronomia phyſica admittenda - - - - - 850
Longitudo ſyderis - - - 299

cal-

§§

calculus - - - - - 306
Geographica - - - 619
Lumen, ejus propagatio non eft inftantanea - - - 385, 656
Luna, ejus phafes - 679, & feqq.
ejus theoriæ elementa aftronomica 694
e fole vifa nunquam eft retrograda 658
ejus vis centralis eft gravitas in terram - - - - 705
caufæ inæqualitatum - 711 & feqq.
ejus variatio - - - 733
ejus revolutiones periodicæ funt longiores, dum terra eft in perihelio - - - - - 737
lex motus apfidum - - 740
variatio eccentricitatis - 746
motus nodorum - - 747
variatio inclinationis - - 748
libratio - - - 704, 755
eclipfes, vide *eclipfis*
Maculæ planetarum - - - 17
oftendunt rotationem circa axem 17
& planetas effe globos habitabiles 19
earum femitæ apparentes in fuperficie planetarum funt ellipfes diverfis variationibus periodicis obnoxiæ - - 581, & feqq.
Mars, ejus retrogradatio major in aphelio, quam in perihelio. - 397
Mercurius habet phafes lunaribus analogas - - - - - 518
Meridianus cæleftis, & terreftris - - 270
differentia meridianorum - - 616
quomodo determinetur per obfervationes - 824, 829, 832
calculus tranfitus fyderis per meridianum - - 333
calculus diftantiæ fyderis a meridiano tempore dato - - 336
Methodi generales
calculandi longitudinem & latitudinem planetæ e fole & terra vifam - - - 463, & feqq.
inveniendi dimenfiones, & pofitionem ellipfeos ex calculo trium obfervationum planetæ - 150
inveniendi omnia elementa theoriæ planetarum e terra viforum 506 - - - & feqq.
reducendi obfervationes in terra inftitutas ad eas, quæ eodem tempore in fole fierent - - 502
calculandi omnes exiguos motus aftrorum, pendentes ab inæquali præceffione æquinoctiorum, & aberratione - - 769, & feqq.
Motus diurnus, ejus phænomena e fole fpectati - - 580, & feqq.
Motus acceleratus - - - 50
ejus affectiones - - 57, & feqq.
formulæ - - - - 61
Motus compofitus, ejus proprietates 64, & - - - - - - feqq.
Motus æquabilis - - - 49
ejus proprietates & formulæ 51, 52, - - - - - - 53, 55
Motus æquabilis in curva - - 87
Nodus afcendens, defcendens - 454
linea nodorum planetarum ad fenfum fixa, valde parum retrograda - - - - - 51
methodus determinandi pofitionem lineæ nodorum - 510, & feqq.
linea nodorum lunæ mobilis - 747
Nonagefimus - - - 409
Nutatio - - - - 770
Obliquitas eclipticæ - - 252, 604
quomodo obfervetur - - 309
eft obnoxia variationi 310, 311
cur - - - 768
Occafus, verum occafus punctum 287
Occultatio fixarum a luna, quomodo graphice determinetur - 834
habet ufum in determinatione differentiæ meridianorum - 833
Oculi locus verus, locus putatitius 343
orbita - - 344
Orbita optica objecti - - 344
ejus determinatio geometrica 347
Ortus, ejus verum punctum 287
Parabola, leges motus in trajectoria parabolica - 189, & feqq.
calculus anomaliæ veræ in parabola 203
eft trajectoria cometarum - 186
Parallaxis orbis annui - - 382
fyderis - - - - 402
horizontalis - - - 411
fit femper in verticali - 406
duplex methodus determinandi parallaxin fyderum - 423, & feqq.

§§

solis est 10'' aut 11'' - - 429
calculus - - - - 432
Paralleli cæleſtes & terreſtres - 236
solis ſunt ſpecies ſpiralium - 246
Penumbra - - - - - 793
Perigæum ſolis - - - 484
Perihelium - - - - 38
Phaſes lunæ - - 679 & ſeqq.
Planum comparationis - - 346
Planetæ, characteres, quibus deſignantur - - - - - - 14
ſuperiores, inferiores - - 392
non ſunt corpora de ſe luminoſa 518
ſunt aliquantum compreſſi ad polos rotationis - - - 519
ſunt in plano circuli maximi ſphæræ, in cujus centro eſt ſol 24
ſinguli ſunt in planis ſingulis 25
eorum orbitæ ſunt ellipſes, quarum focum ſol occupat - 124
eorum inæqualitates ſunt partim phyſicæ, partim opticæ - 35
Dimenſiones, & elementa eorum theoriæ relate ad ſolem - 170
eorum motus verus e terra viſus, & ad planum eclipticæ relatus 453 & ſeqq.
videntur deſcribere epicycloides contractas - - - 393
ſunt quandoque directi, ſtationarii, retrogradi - 394, & ſeqq.
calculus eorum longitudinis & latitudinis heliocentricæ & geocentricæ - - - - 463
Methodus determinandi elementa eorum theoriæ - 506 & ſeqq.
Polares circuli - - - - 598
Poli æquatoris - - - - 233
ſub polis annus conſtat die, & nocte unica - - - 255, 598
Præceſſio æquinoctiorum - 28, 491, 630
ejus cauſa phyſica - - 764
ejus inæqualitas - - - 767
efficit motum apparentem & inæqualem fixarum - - 769 & ſeqq.
Projectio orthographica - 345
circuli in plano inclinato eſt ellipſis - - - - 356
determinatio geometrica poſitionis poli æquatoris in projectione orthographica globi planetarii e ſole viſi - - 607
Quadratura planetarum - 379
Radius vector - - - 83
ejus calculus in ellipſi - 140
in parabola - - 209
Refractio, ejus affectiones - 435, & ſeqq.
Reſolutio virium - - - 69
habet locum, dum directio eſt obliqua - - - 71
Revolutio - - 17
revolutiones planetarum fiunt ad ſenſum tempore æquali - 23
anomaliſtica, ſynodica, periodica - - - 490, 694
Retrogradationes, earum inæqualitates 394, & ſeqq.
Rotatio Planetarum - - - 17
tempus - - - - 18
cauſa & proprietates - - 216
in eam vis centralis planetarum non influit - - 229
Satellites, planetæ ſecundarii 15
eorum tempus revolutionis 631
habent eandem motus directionem 634
eorum orbitæ ſunt ad ſenſum circuli, in quorum centro eſt primarius 676
eorum orbitarum plana inclinantur ad planum orbitæ primarii 643
patiuntur eclipſes, & efficiunt eclipſes ſolis - - - - 636
in revolutione circa primarios, ſequuntur eandem legem, quam primarii in revolutione circa ſolem 677
elementa eorum theoriæ 631, 673
Saturnus, cingitur annulo diverſis variationibus periodicis obnoxio 525
& Jupiter in ſe mutuas inæqualitates efficiunt - - - 851
Signa cæleſtia - - - - 27
differunt a conſtellationibus, etſi idem habeant nomen - - 28
characteres, quibus deſignantur 29
Sol, duplicis ejus motus apparentis expoſitio - - - - 240
ratio ejus dimenſionum ad dimenſiones terræ - - - 429
quare ad horizontem videatur ovalis figuræ - - - - 448

Me-

§§

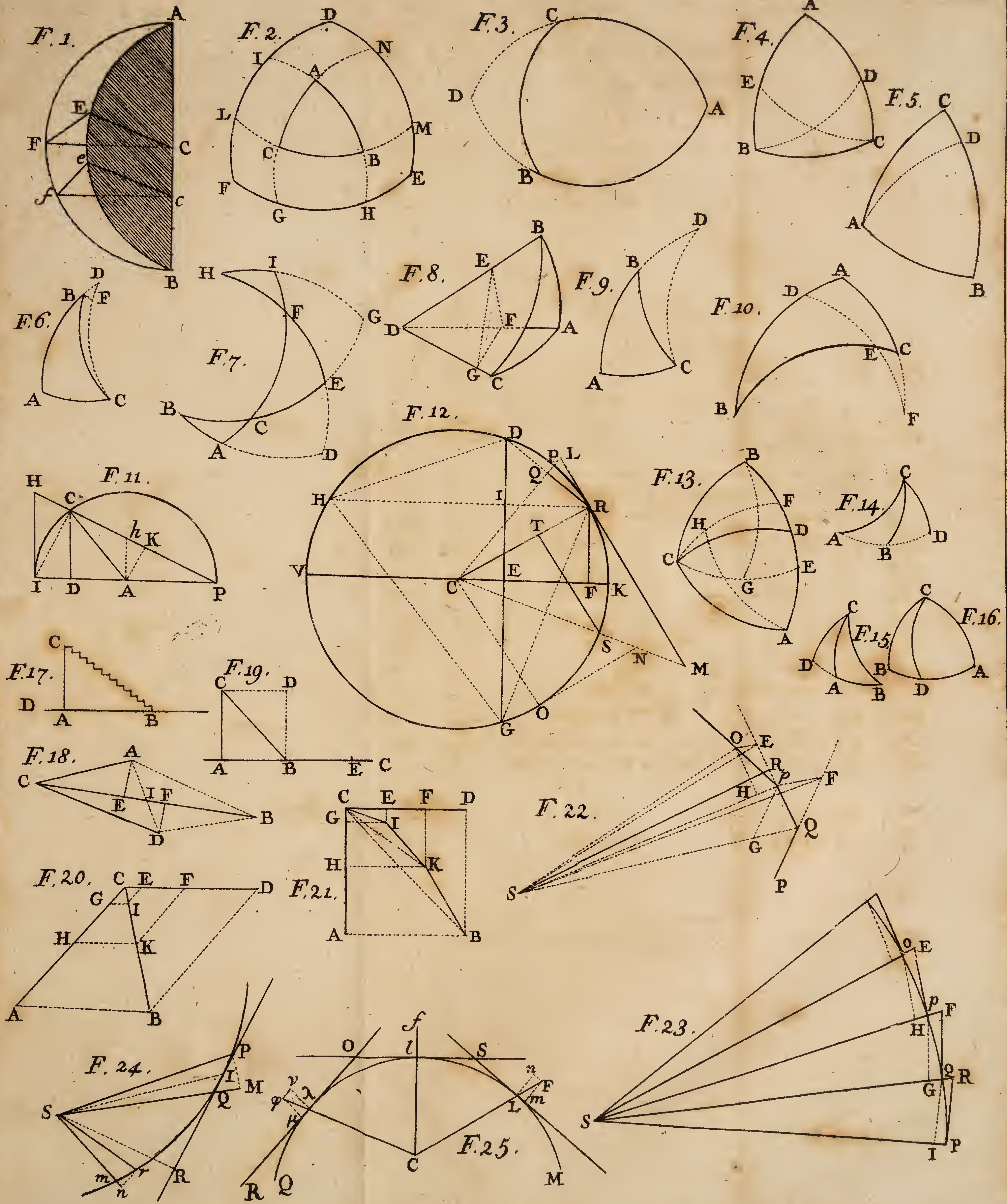
Methodus determinandi elementa ejus theoriæ - - 484
Solſtitia æſtivum, hybernum 250, 596
Sphæra, figura apparens cæli - 215
recta - - - - 257
parallela - - - - 254
obliqua - - - - 262
Stellæ - - - - - 4
earum uſus - - - 5
magnitudo - - - 6
denominationes a Bayero iis datæ 11
methodus eas noſcendi - - 12
de earum natura conjecturæ - 13
a terra immenſum fere diſtant 384
videntur ſingulis annis ellipſin in cælo deſcribere - - - 380
earum aberratio - - 384, 783
Syſtemata mundi, non amplius locum in Aſtronomia merentur - 847
Lex generalis ſyſtematis phyſici e phænomenis deducta, - 849
Syzygiæ - - - - - 379
Tempeſtatum anni viciſſitudines - 275
Tempus verum ſeu apparens, medium 318
utriusque diverſitas, & calculus 321
quomodo verum obſervetur 325, 338
Terra, quare appareat immota - 224
eſt depreſſa verſus polos - 519
ejus motus verus exhibetur per motum apparentem ſolis - 240
Trajectoria, quomodo diverſæ earum ſpecies diſcernantur - - 191
Tropici - - - - - 247
Venus habet ſuas phaſes - - 518
Velocitas angularis media - - 90
punctum trajectoriæ, in quo æquatur veræ - - - - 107
Velocitas angularis vera - - 89
ejus proprietates - - 92
Verticalis - - - - 281
verticalis primarius - - 281
proprietates verticalium 284, & ſeqq.
Vis acceleratrix - - - 60
centralis - - - - 77
centralis variabilis tempuſculo admodum parvo eſt cenſenda conſtans - - - - - 156
formulæ generales vis centralis 158, & ſeqq.
ejus proprietates in ſectione conica - - - 163, & ſeqq.
Vis centralis lunæ eſt idem cum gravitate in terram - - 705
Vis inertiæ - - - - - 48
perturbatrix lunæ - - 712
Umbra terræ, ejus magnitudo - 782
Zenith - - - - - 218
ejus uſus - - 219, & ſeqq.
Locus terreſtris in cælo diſtinguitur per ſuum zenith - - 238
Zodiacus - - - - - 27
Cometarum nullus eſt - 183



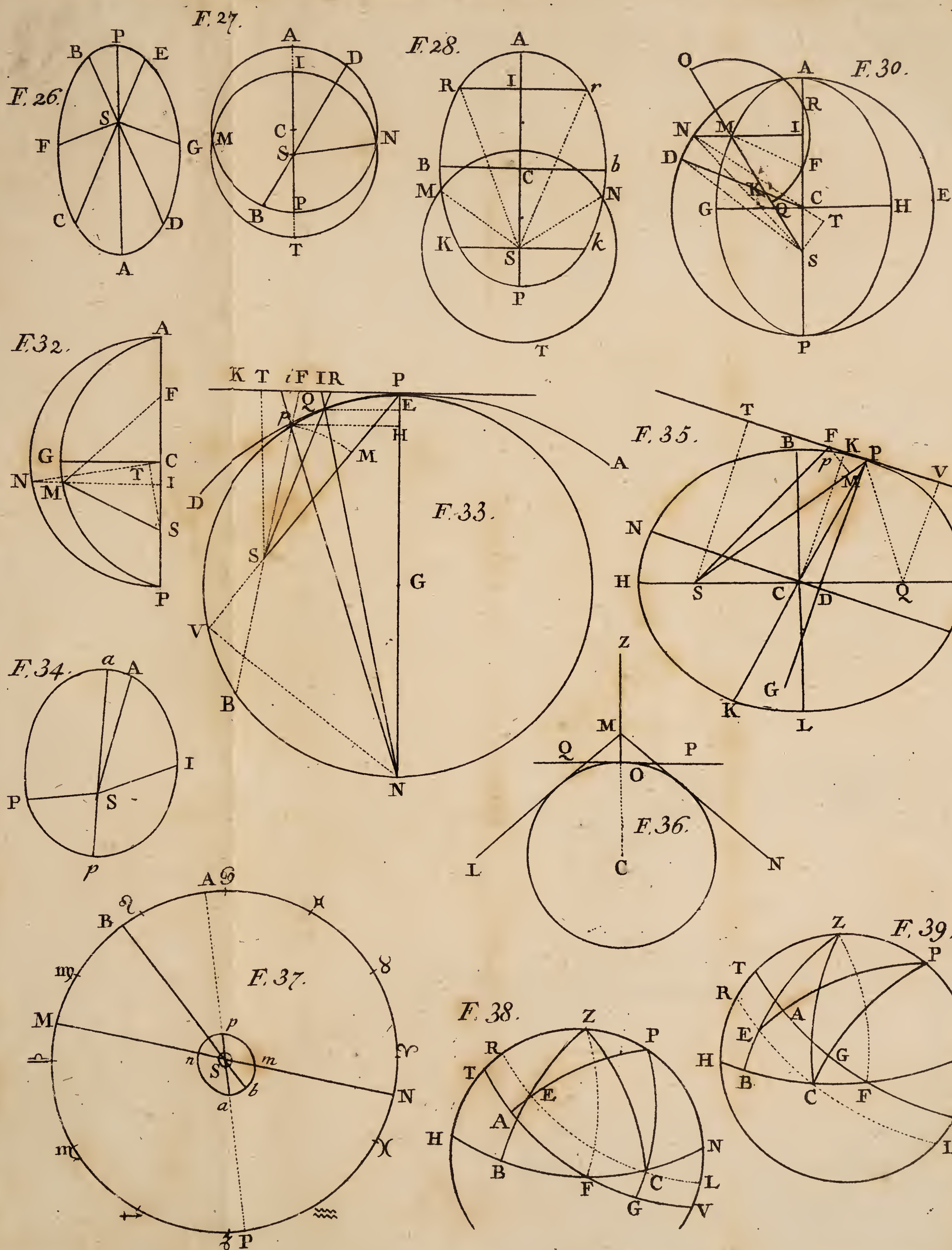
Errata

ERRATA.

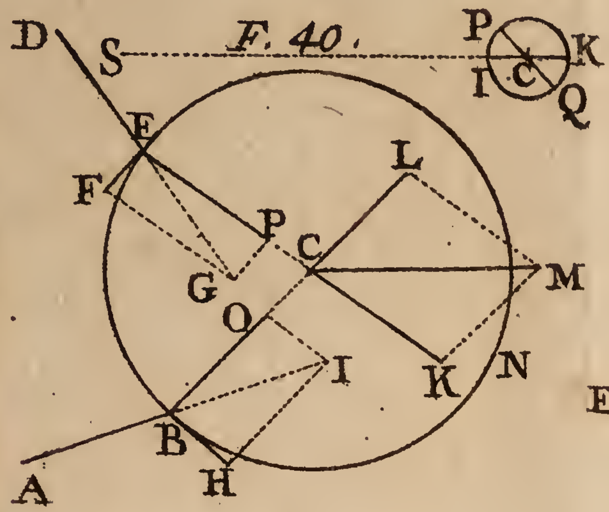
Pag.	*Lin.*	*Errata*	*Corrige.*
5	12	BL	BI
ibid.	35	BD	BC
8	17	$\frac{\text{ſ}A}{\text{coſ}A+\text{ſ}A}$	$\frac{\text{ſ}A}{R+\text{coſ}A}$
9	1	$-\frac{1}{2}A$	$-\frac{1}{2}B$
ibid.	21	$\text{coſ}(A\mp B)$	$cos^2(A\pm B)$
10	7	VGR	VGK
14	9	GDE	ſGDE
16	7	AC	AD
20	12	AD	AF
ibid.	20	BD	BE
60	9	$-lnm$	$-lnn$
ibid.	14	$-\frac{3}{4}c$	$-\frac{3}{2}c$
64	15	26 ad 27	9 ad 10 Auguſti
ibid.	16	a 9 Aug. uſque ad 10	a 26 Jun. uſque ad 27
67	28	die 11	die 12
79	6	0.28847	0.208847
81	10	$\frac{SP}{SP^3.2PG}$	$\frac{SP}{ST^3.2PG}$
83	10	$u=\frac{a}{s}$	$t=\frac{a}{s}$
91	ult.	43	34
141	18	in primo & ſecundo	in ſecundo & tertio
160	5	ad D	DMP
165	ult.	*curvata*	*curtata*
177	16	T	T (fig. 64)
196	9	comprehendit	comprehenſus
217	12	affectione motu diurni geographlice	affectiones motus diurni graphice
249	ult.	duplæ diſtantiæ	diſtantiæ
265	17	columnis	tribus columnis
275	24	$49\frac{1}{2}$	$49\frac{1}{3}$
ibid.		$45\frac{1}{3}$ $13\frac{1}{3}$	$45\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$



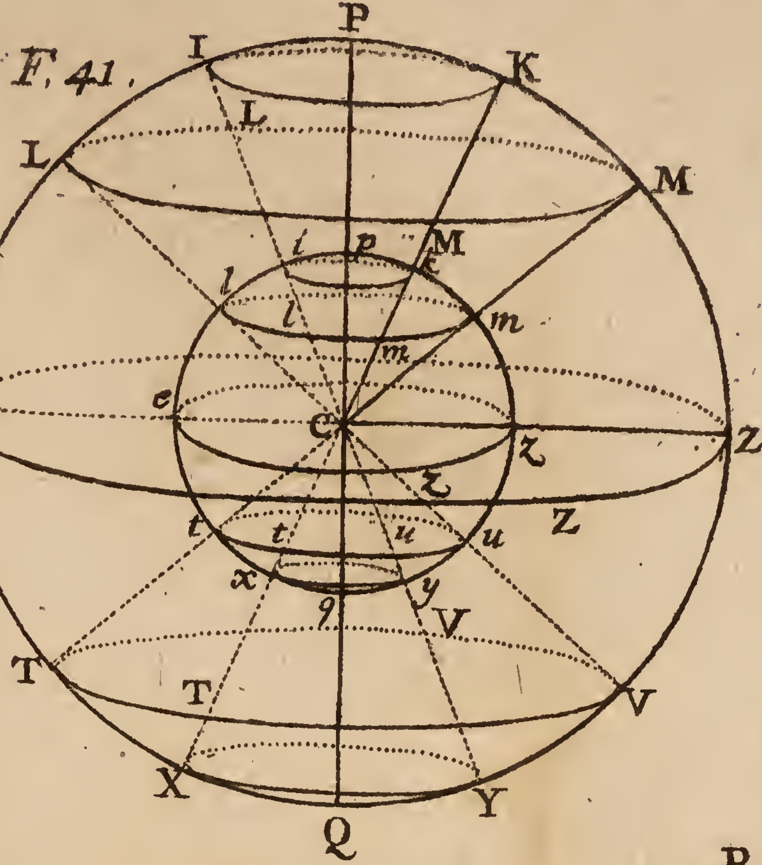
I. Mansfeld Sc:


Tab. II.
F. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 30.
F. 32.
F. 33.
F. 34.
F. 35.
F. 36.
F. 37.
F. 38.
F. 39.

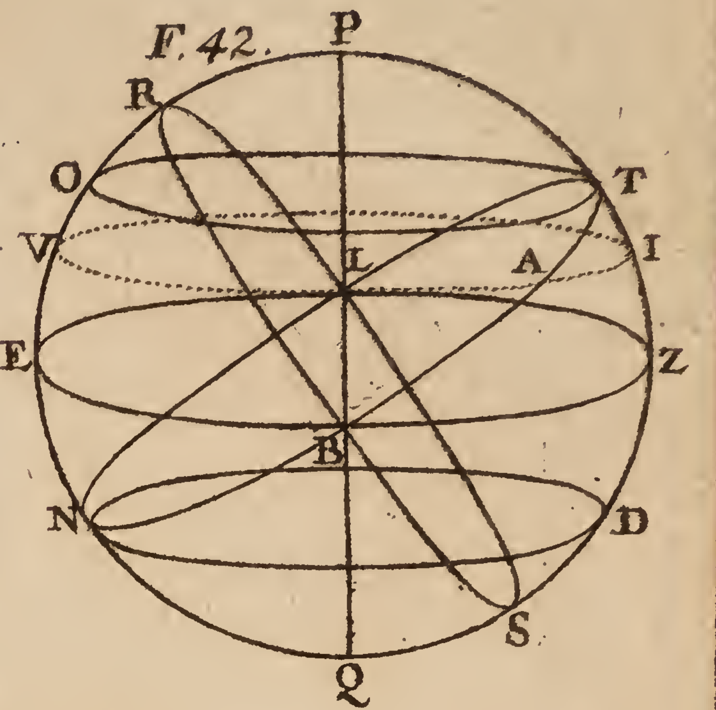
Tab. III.



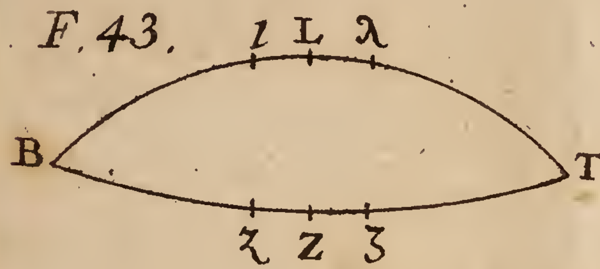
F. 40.
D S P K C I Q E F L P C M G O I K N B H A



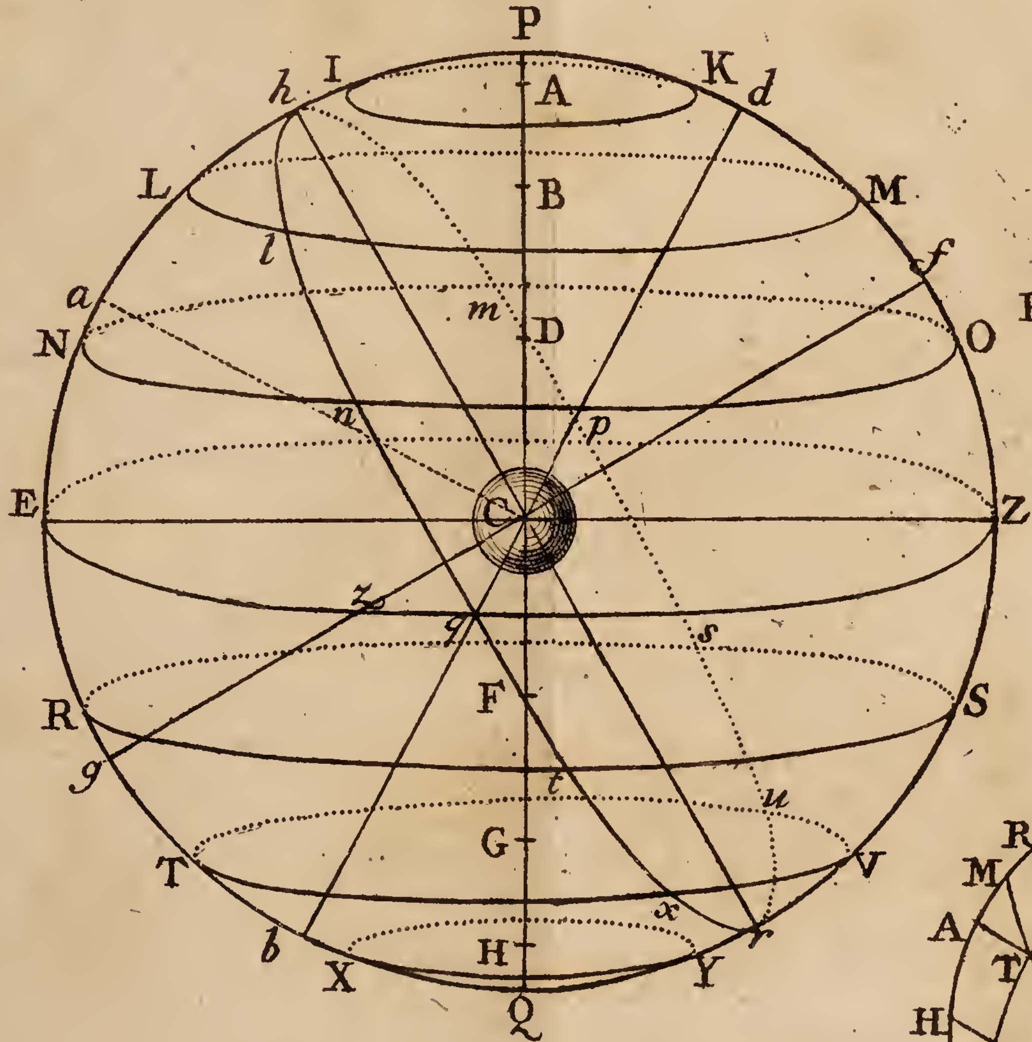
F. 41.
P I K L M E Z C Q T V X Y



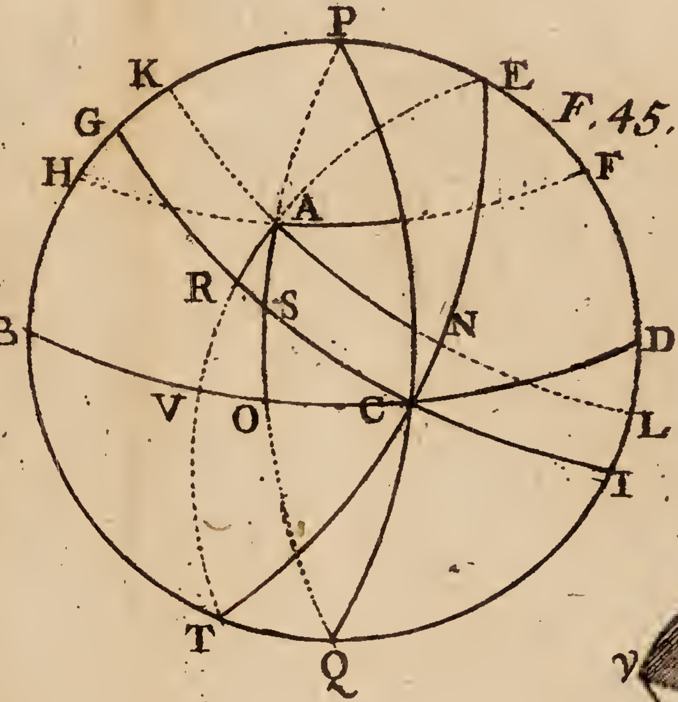
F. 42.
P R O T V I L A E Z B N D S Q



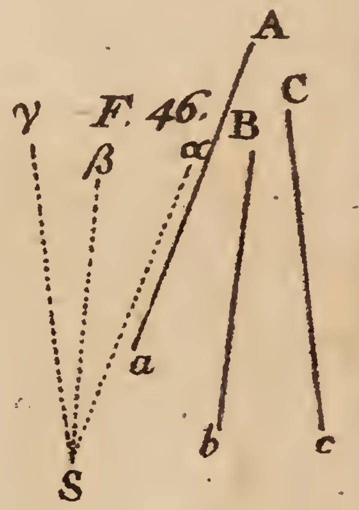
F. 43.
l L λ B T ζ Z ʒ



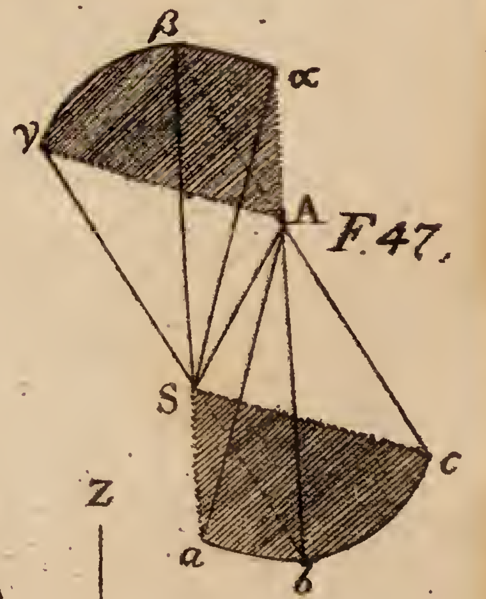
F. 44.
P I A K h d L B M f a N D O E C Z R S F G T V b X H Y Q



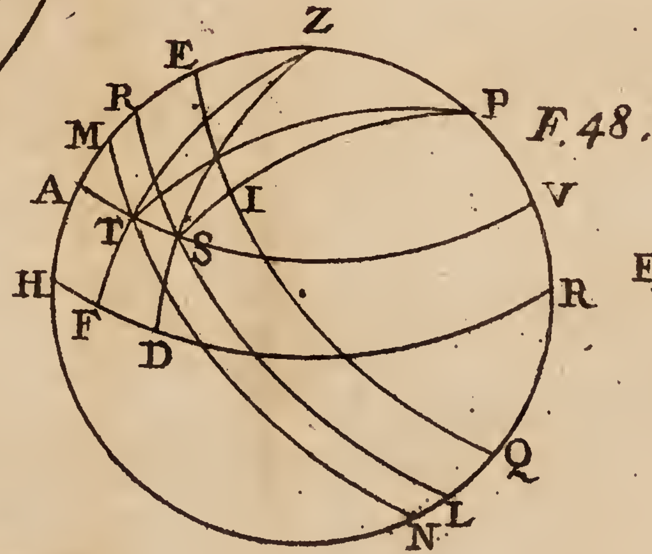
F. 45.
P K E G H F A R S N B D V O C L I T Q



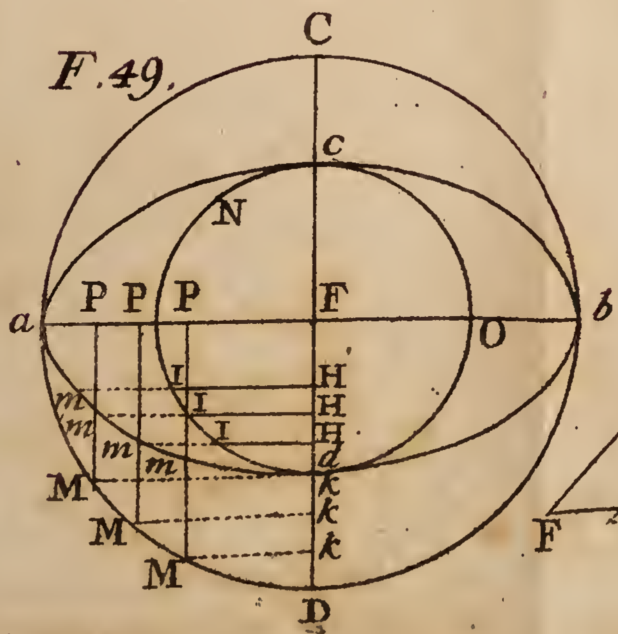
F. 46.
A γ β α B C a b c S



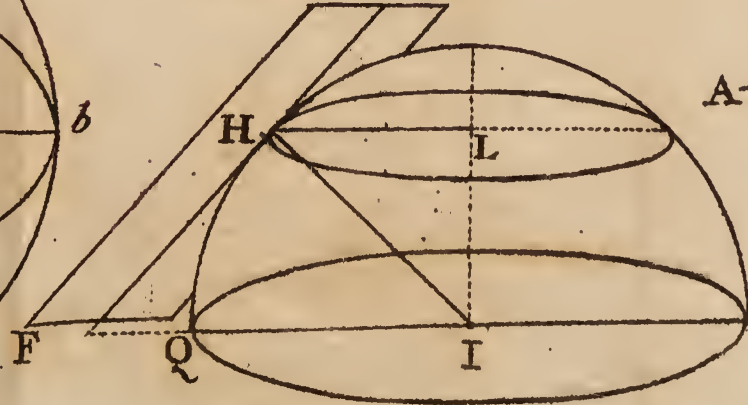
β α γ A F. 47. S c a b



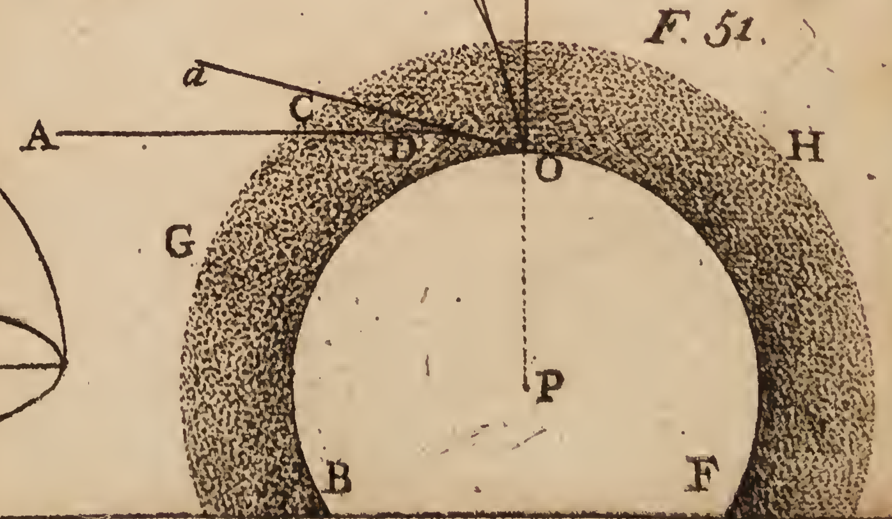
F. 48.
Z E P R M A V T S I H R F D Q N L



F. 49.
C c N a P P P F O b H H H d M M M D

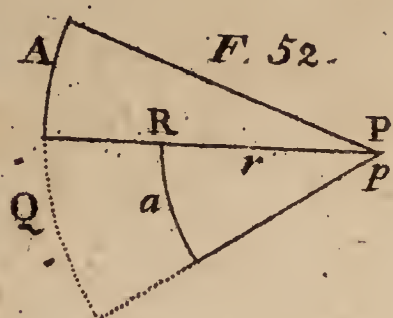


F. 50.
M G H L F Q I

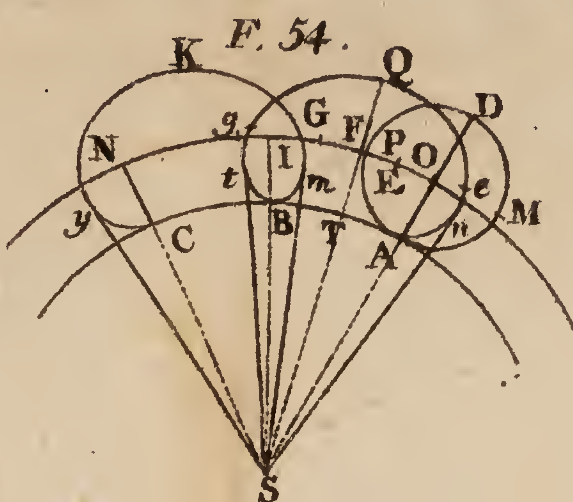


E e Z F. 51.
d A C D O H G P B F

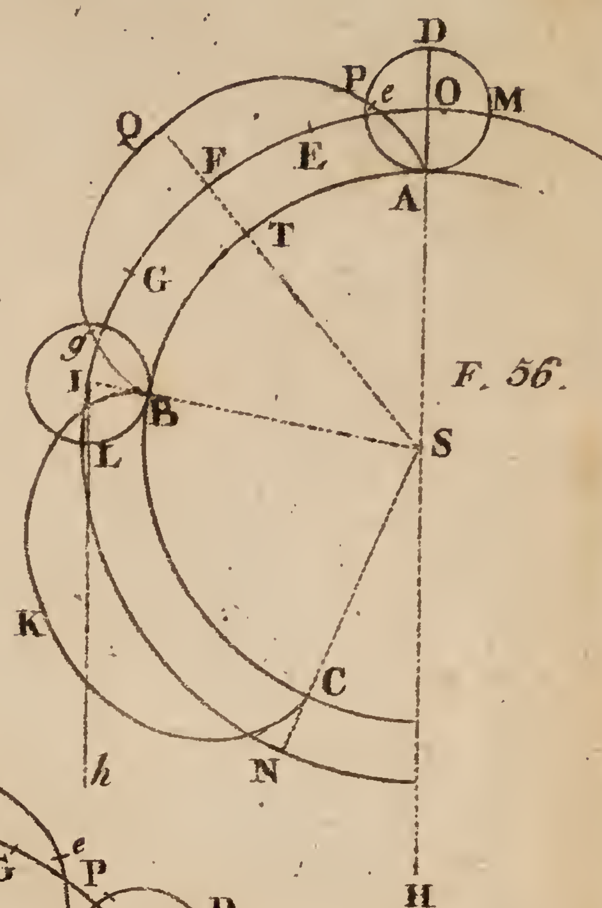
Tab. IV.



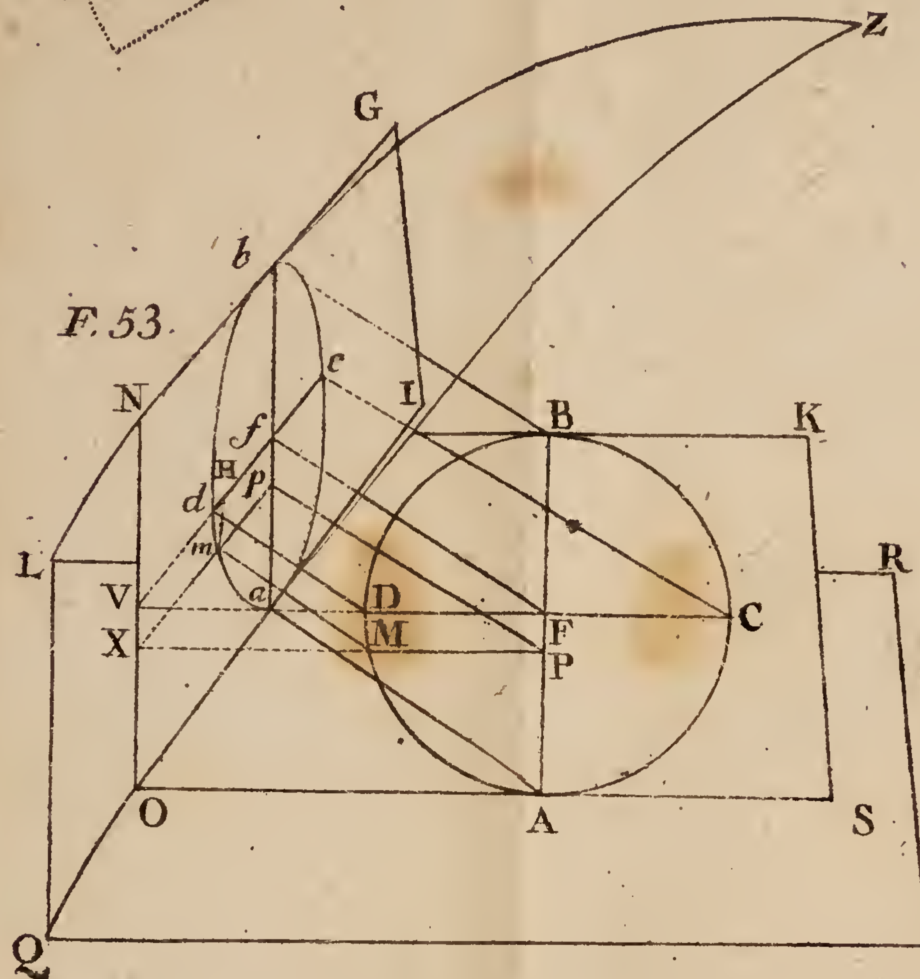
F. 52.
A
R
P
p
r
Q
a



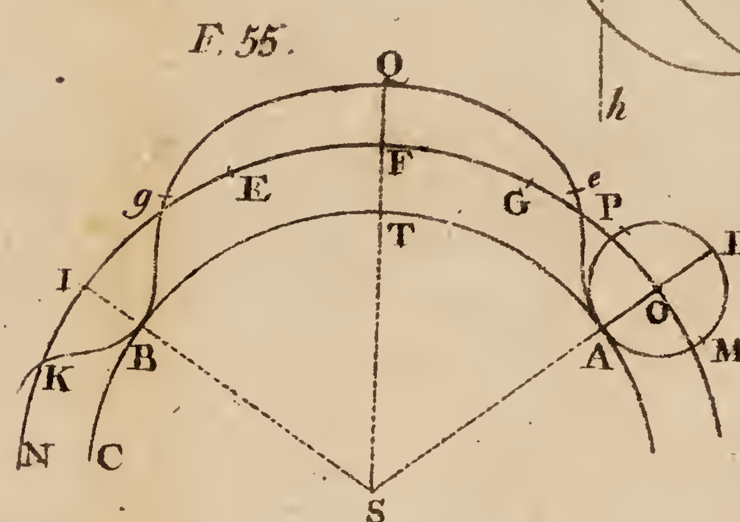
F. 54.
K
Q
D
N
g
G
F
P
O
I
t
m
E
e
M
y
C
B
T
A
n
S



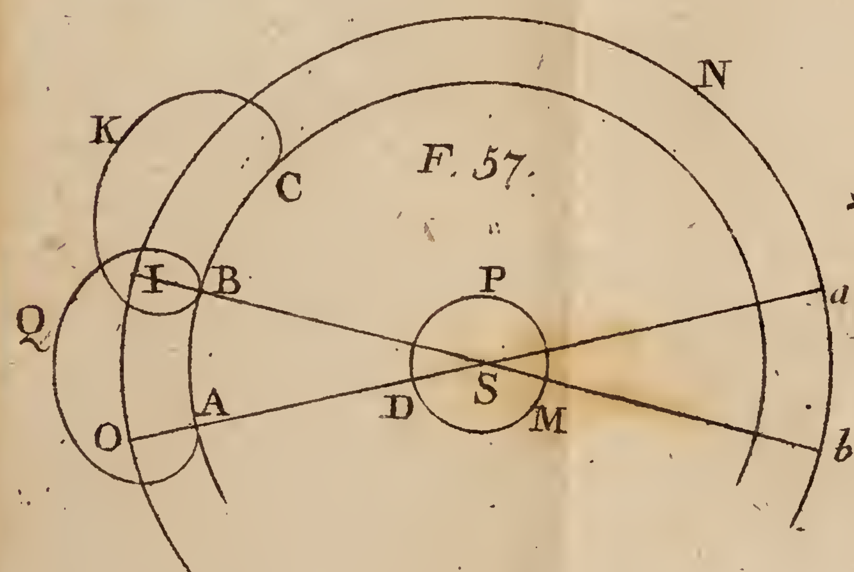
D
P
e
O
M
Q
F
E
A
T
G
g
I
B
L
F. 56.
S
K
C
h
N
H



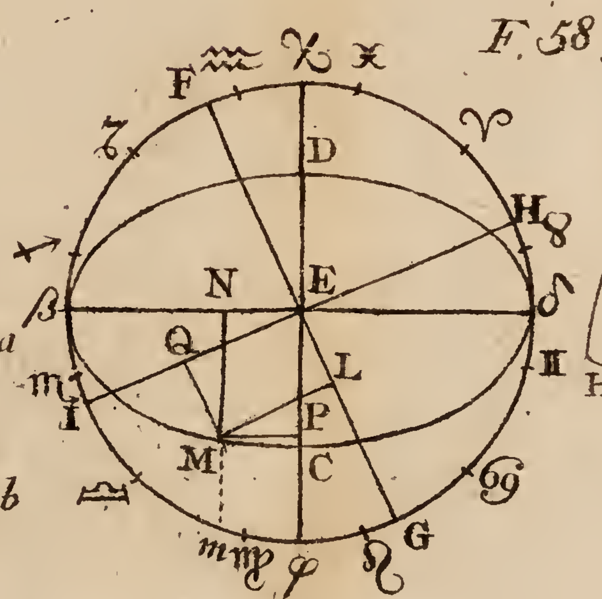
Z
G
b
F. 53.
N
c
I
B
K
f
H
p
d
m
a
L
V
X
D
M
F
P
C
R
O
A
S
Q



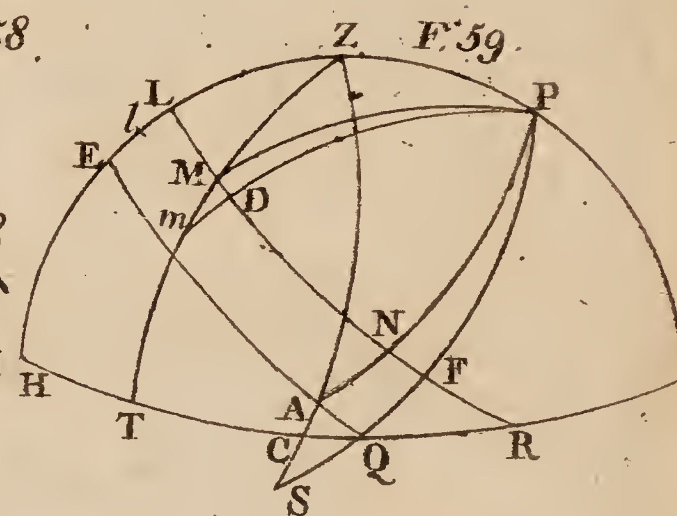
F. 55.
O
F
g
E
G
e
P
T
I
D
B
A
O
K
M
N
C
S



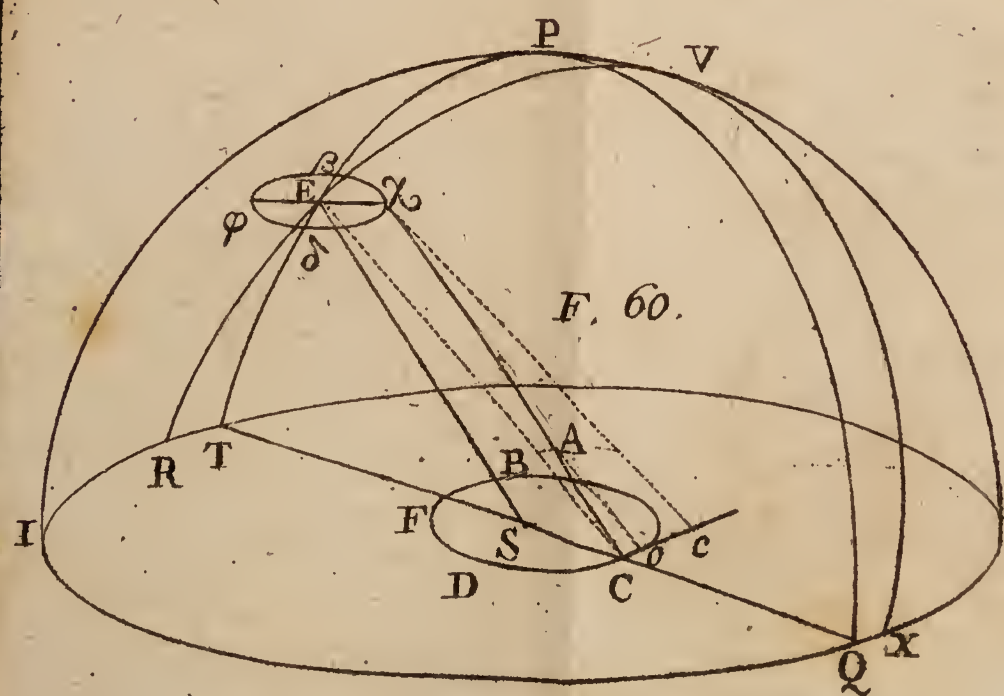
N
K
C
F. 57.
P
I
B
Q
a
S
A
D
M
O
b



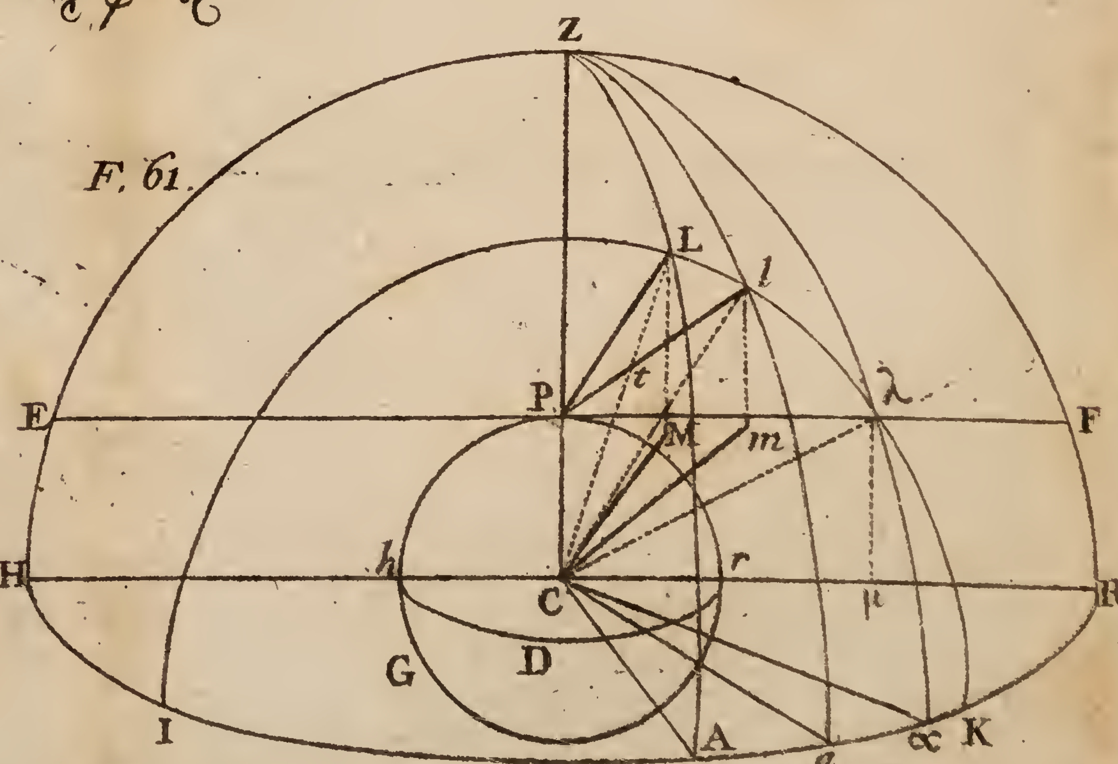
F. 58.
F
D
H
N
E
Q
L
P
M
C
G



Z
F. 59.
L
l
P
E
M
D
m
N
F
H
T
A
C
Q
R
S

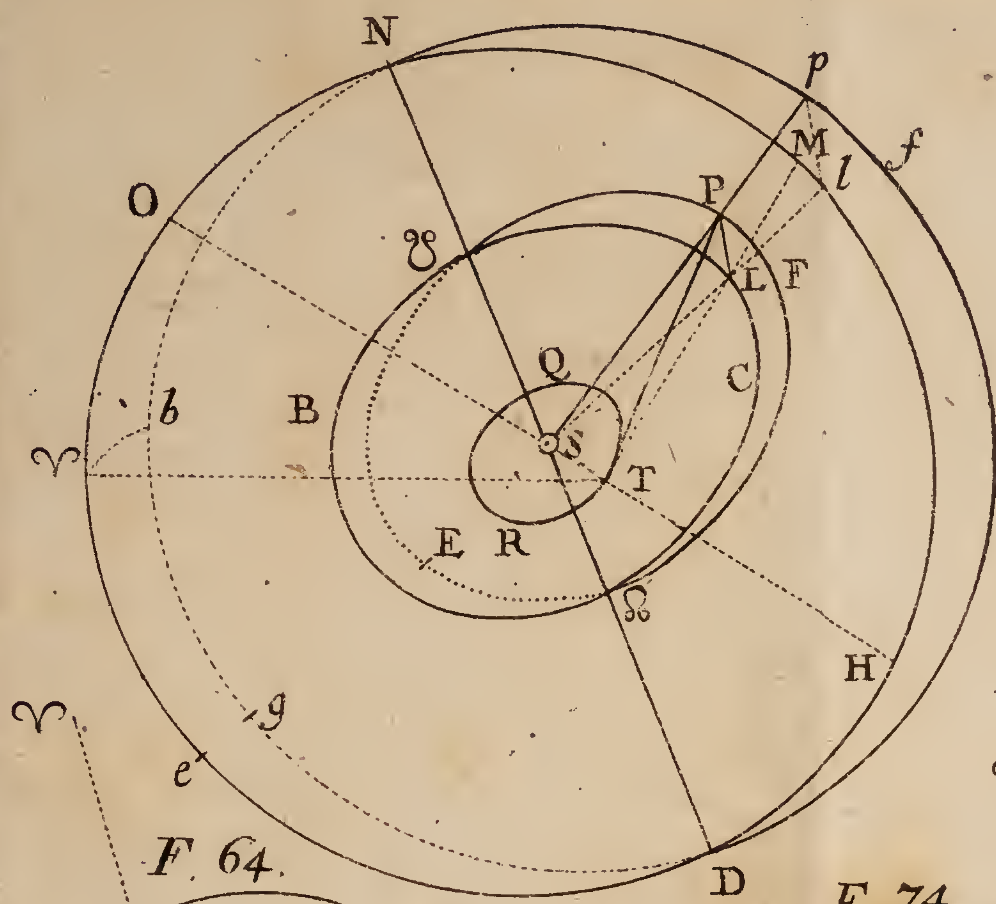


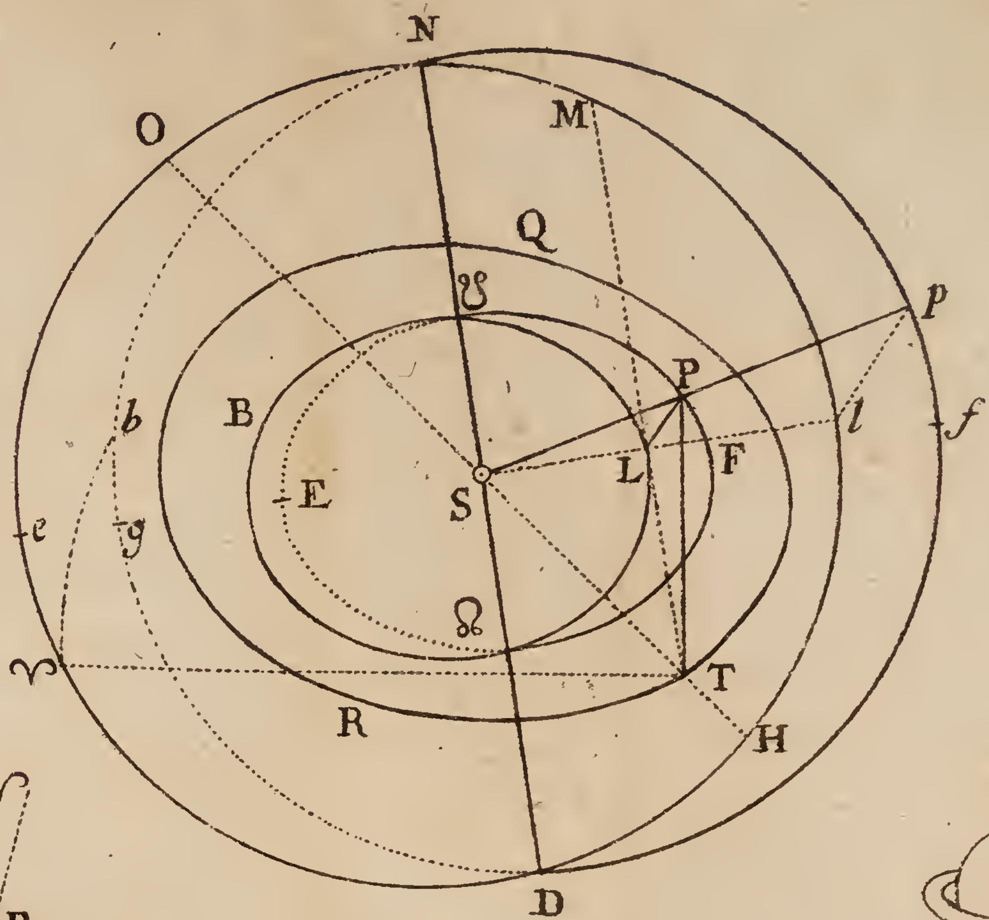
P
V
E
F. 60.
R
T
A
B
F
S
L
I
D
C
c
Q
X

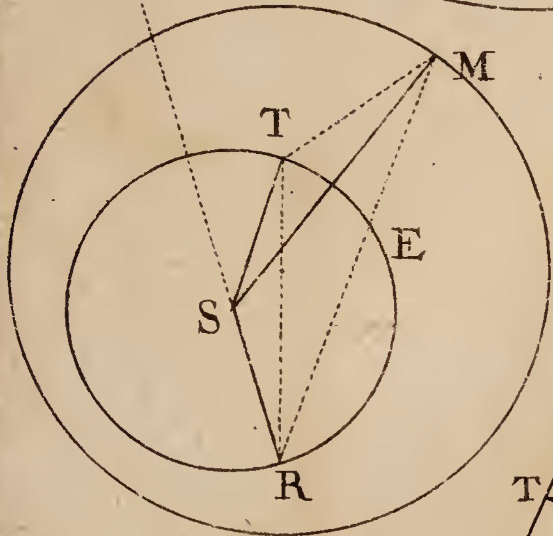


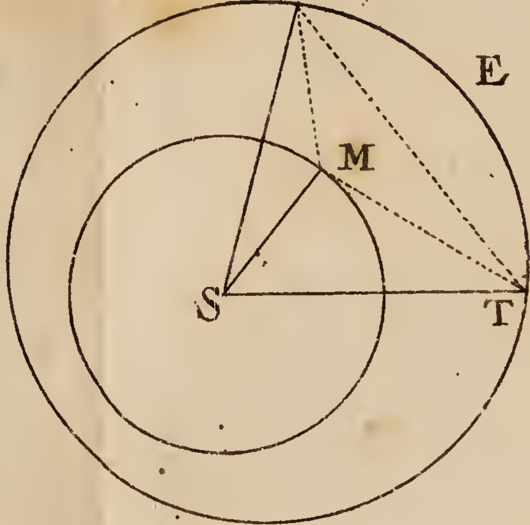
Z
F. 61.
L
l
t
P
M
m
E
F
h
r
C
H
R
D
G
I
A
a
K

Tab. V.


F. 62.
N
p
M
f
l
O
P
L
F
Q
C
b
B
S
T
E
R
H
g
e
D


F. 63.
N
M
O
Q
p
P
b
B
l
f
L
F
E
S
e
g
T
R
H
D


F. 64.
M
T
E
S
R

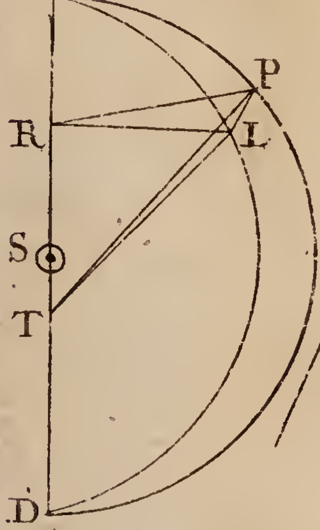

F. 74.
R
E
M
S
T

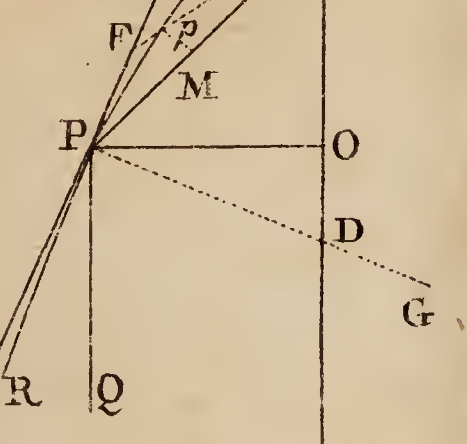

F. 65.

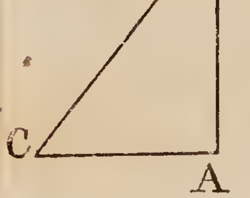

F. 66.

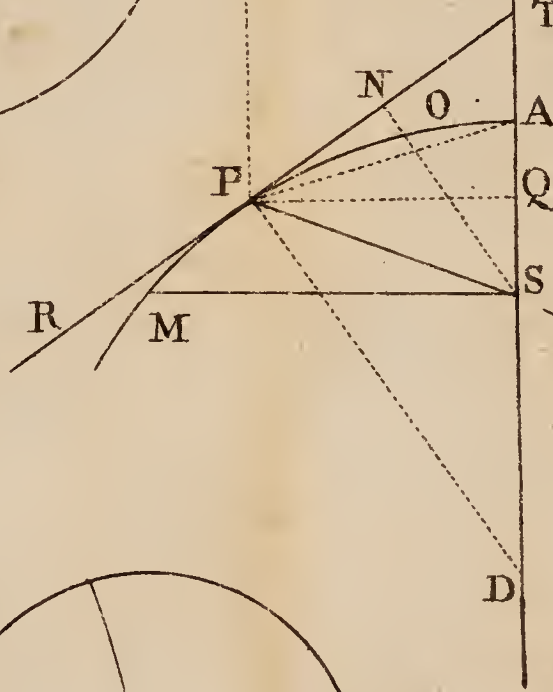

F. 67.

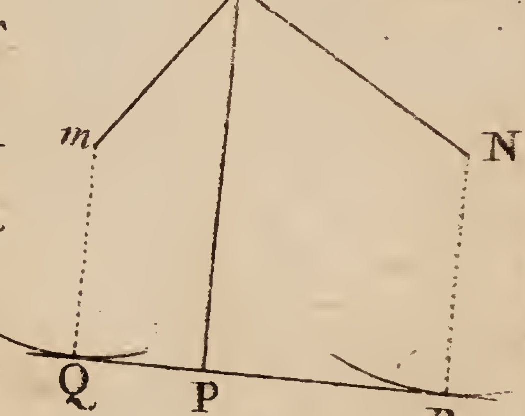

F. 68.

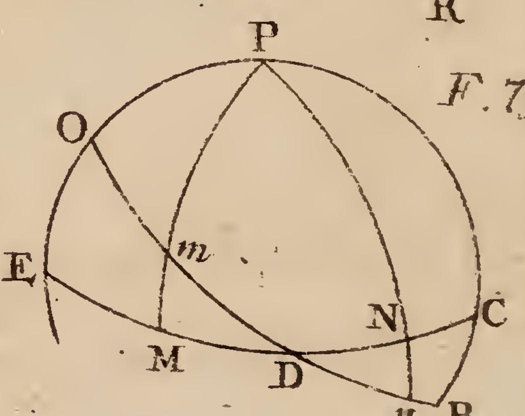

N
F. 70.
P
R
L
S ☉
T
D


H
T
A
S
F. 71.
F
p
M
P
O
D
G
R
Q

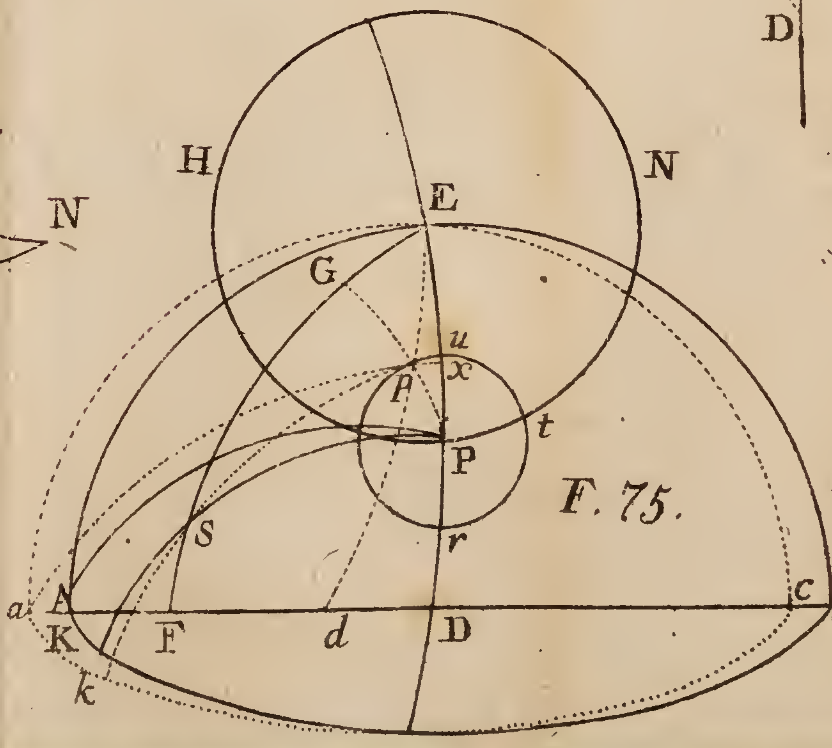

F. 72.
B
C
A

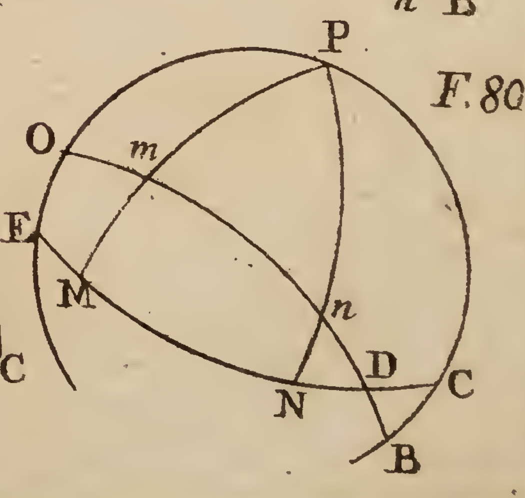

C
B
F. 73.
T
N
O
A
P
Q
S
R
M
D

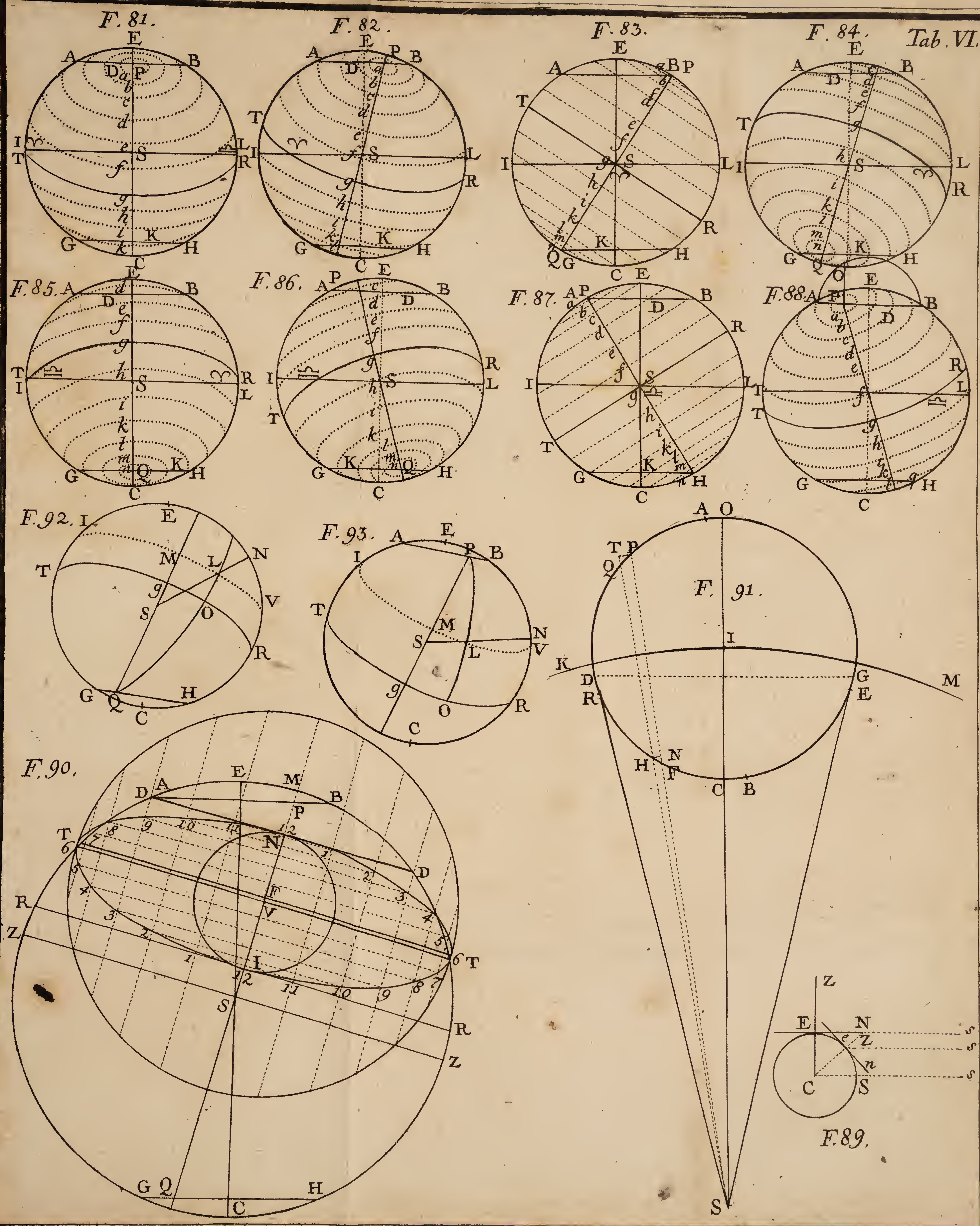

S
F. 78.
m
N
Q
P
R


P
F. 79.
O
m
E
N
C
M
D
n
B

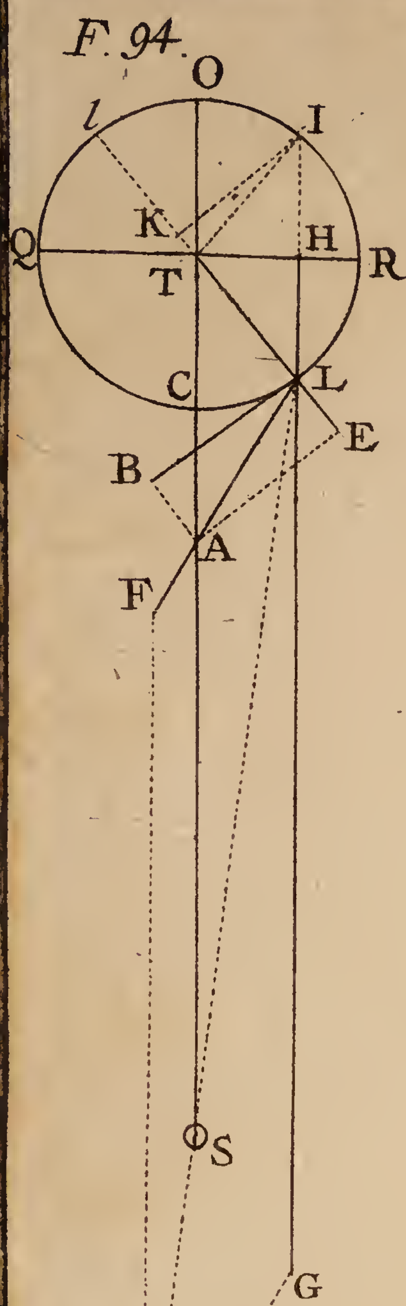

m
F. 77.
M
N
M
S
F. 76.
N
Oriens
K
Occidens
L

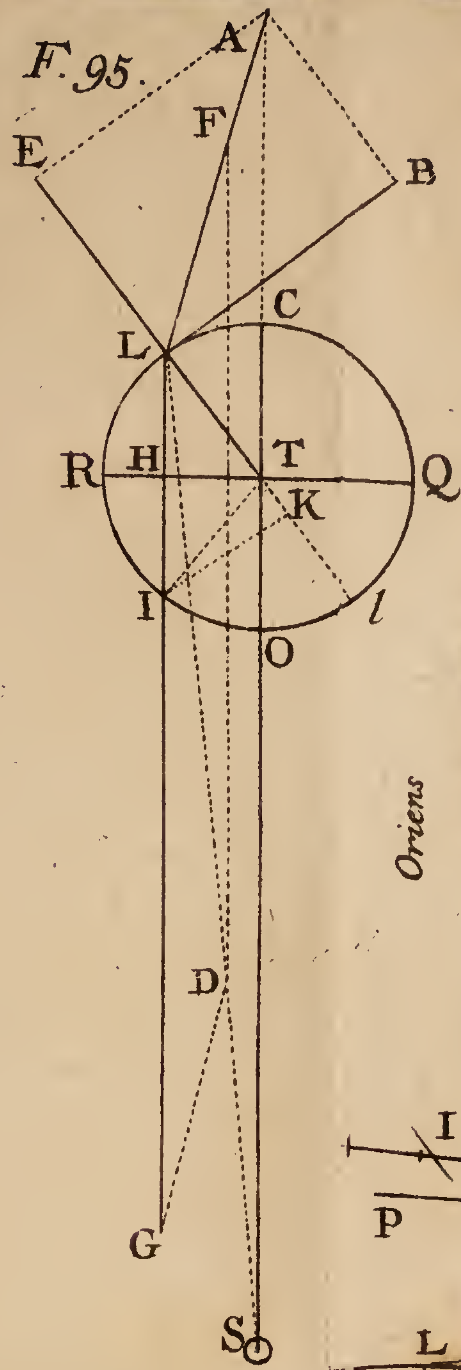

H
N
E
G
u
x
p
t
P
F. 75.
s
r
a
A
K
F
d
D
c
C
k

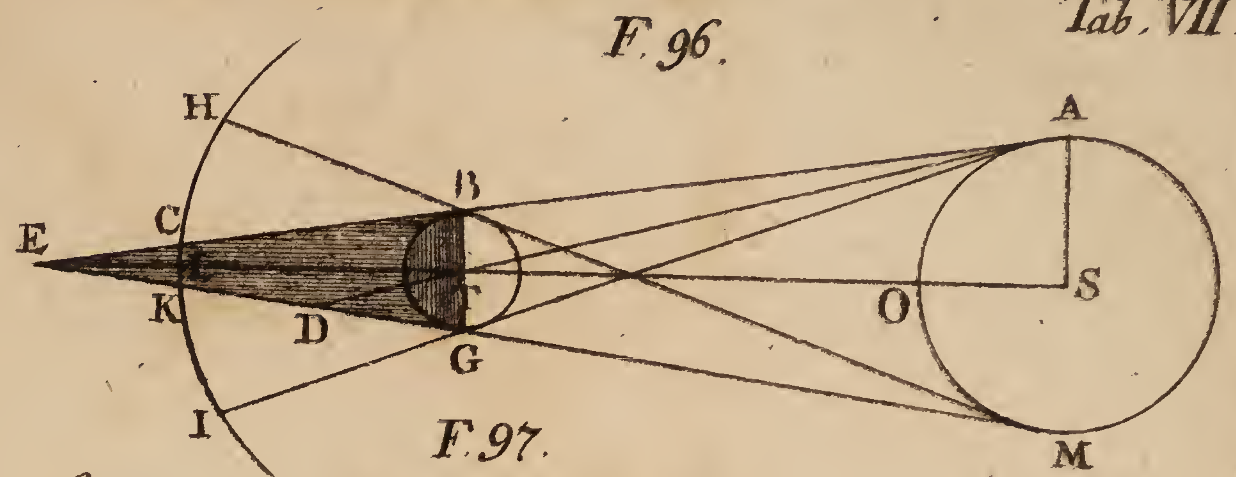

P
F. 80.
O
m
E
M
n
D
C
N
B

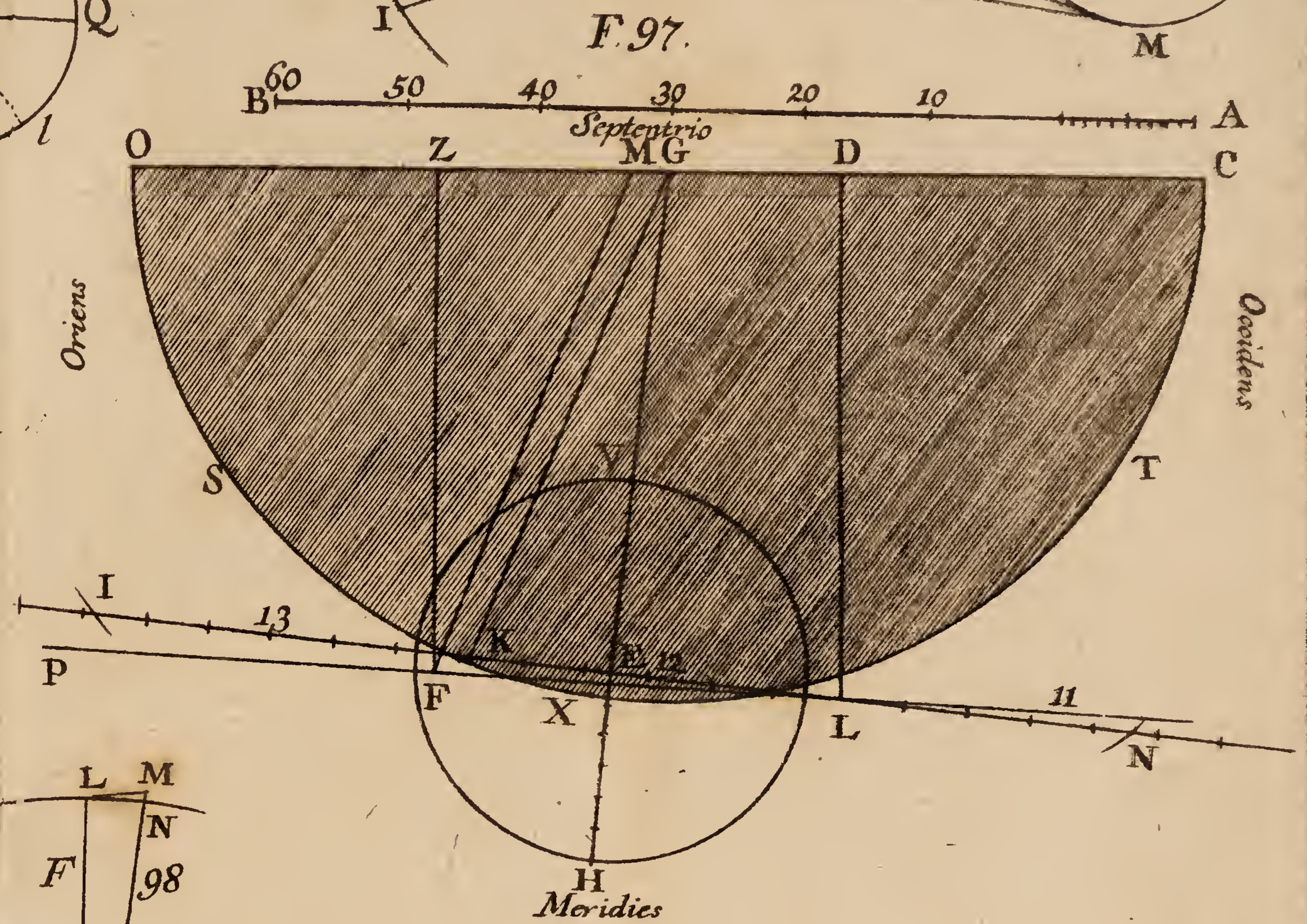

Tab. VI.
F. 81.
F. 82.
F. 83.
F. 84.
F. 85.
F. 86.
F. 87.
F. 88.
F. 92.
F. 93.
F. 91.
F. 90.
F. 89.

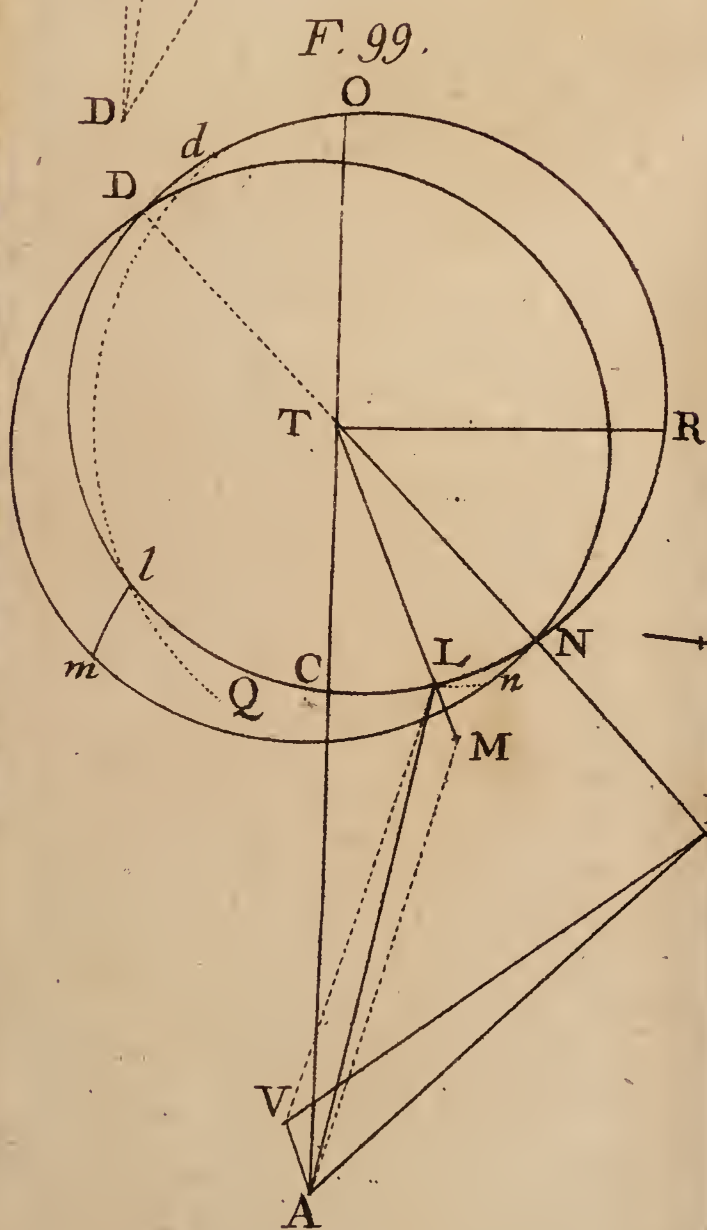
Tab. VII.

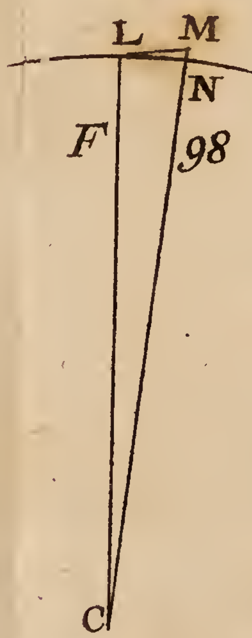

F. 94.
O
l
I
Q
K
H
R
T
C
L
B
E
A
F
S
G
D

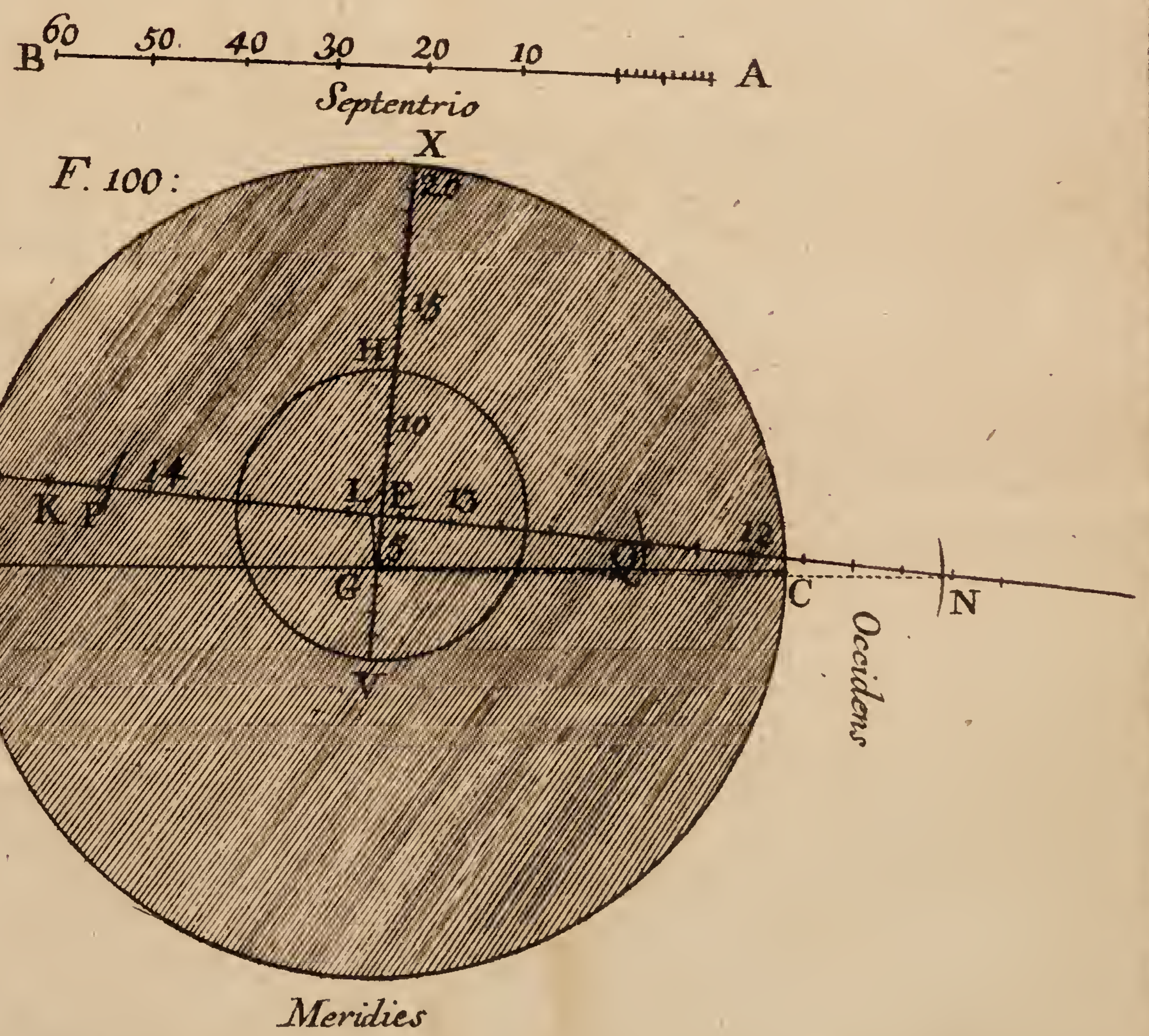

F. 95.
A
E
F
B
C
L
R
H
T
Q
K
I
O
l
D
G
S

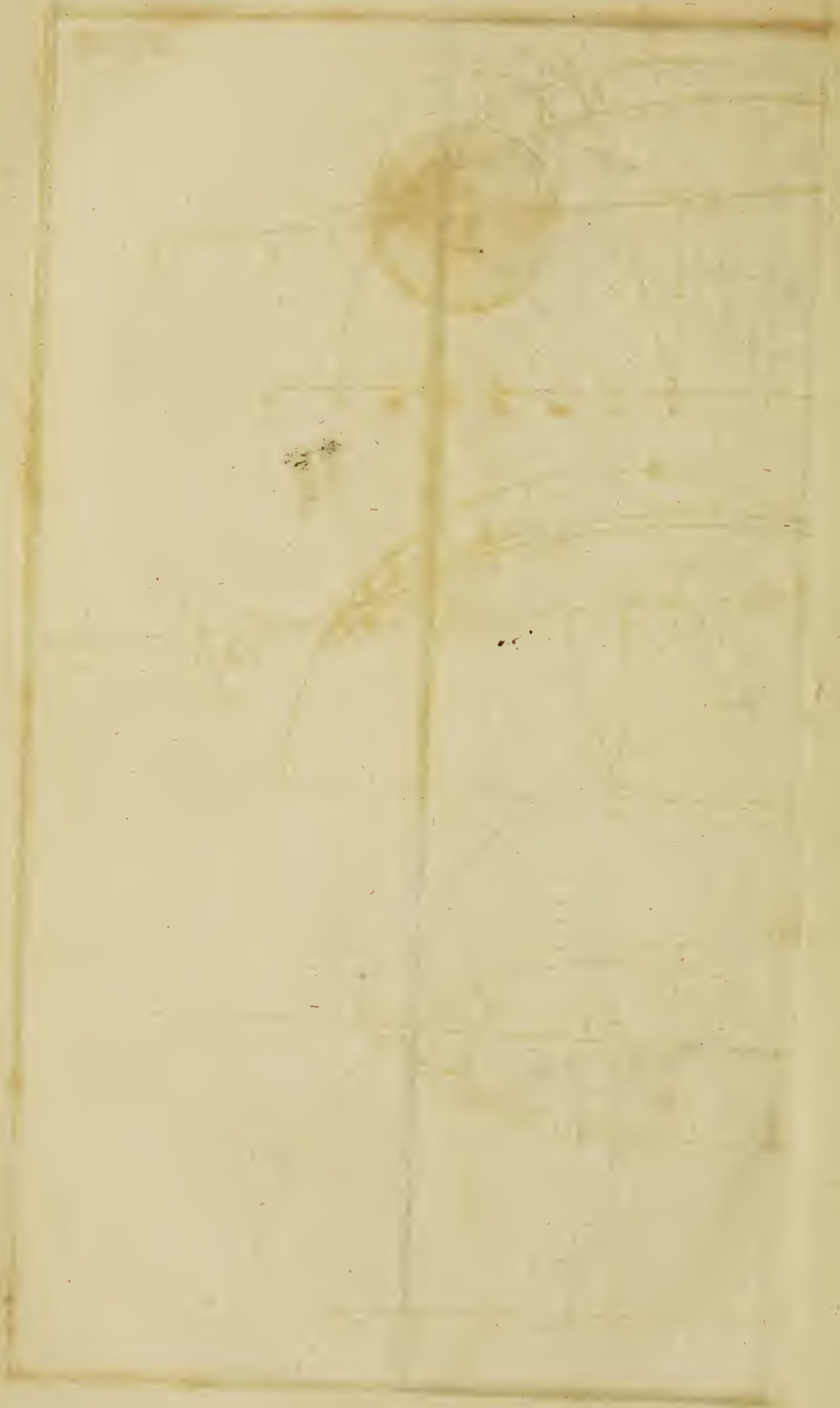

F. 96.
H
A
B
E
C
K
D
G
O
S
I
M

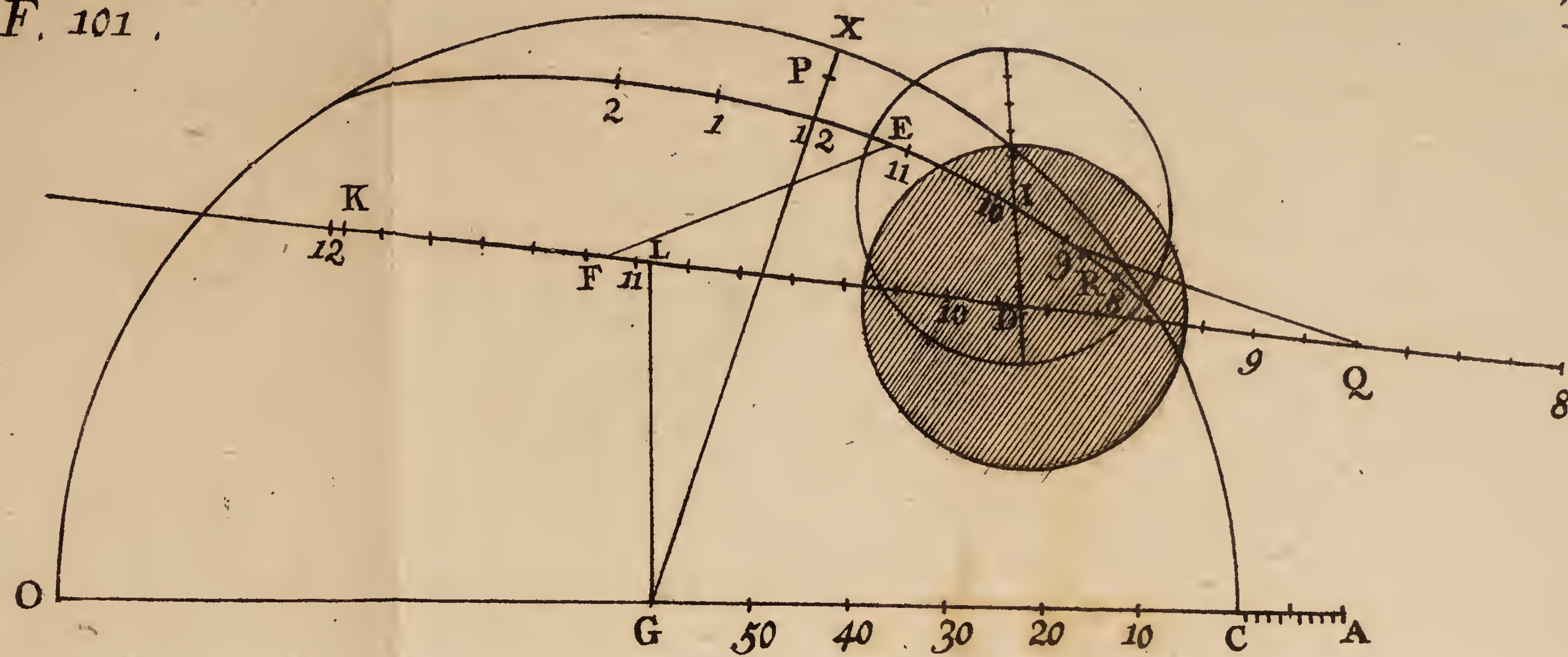

F. 97.
B
60
50
40
30
20
10
A
Septentrio
O
Z
M
G
D
C
Oriens
Occidens
S
V
T
I
13
K
E
12
P
F
X
L
11
N
H
Meridies

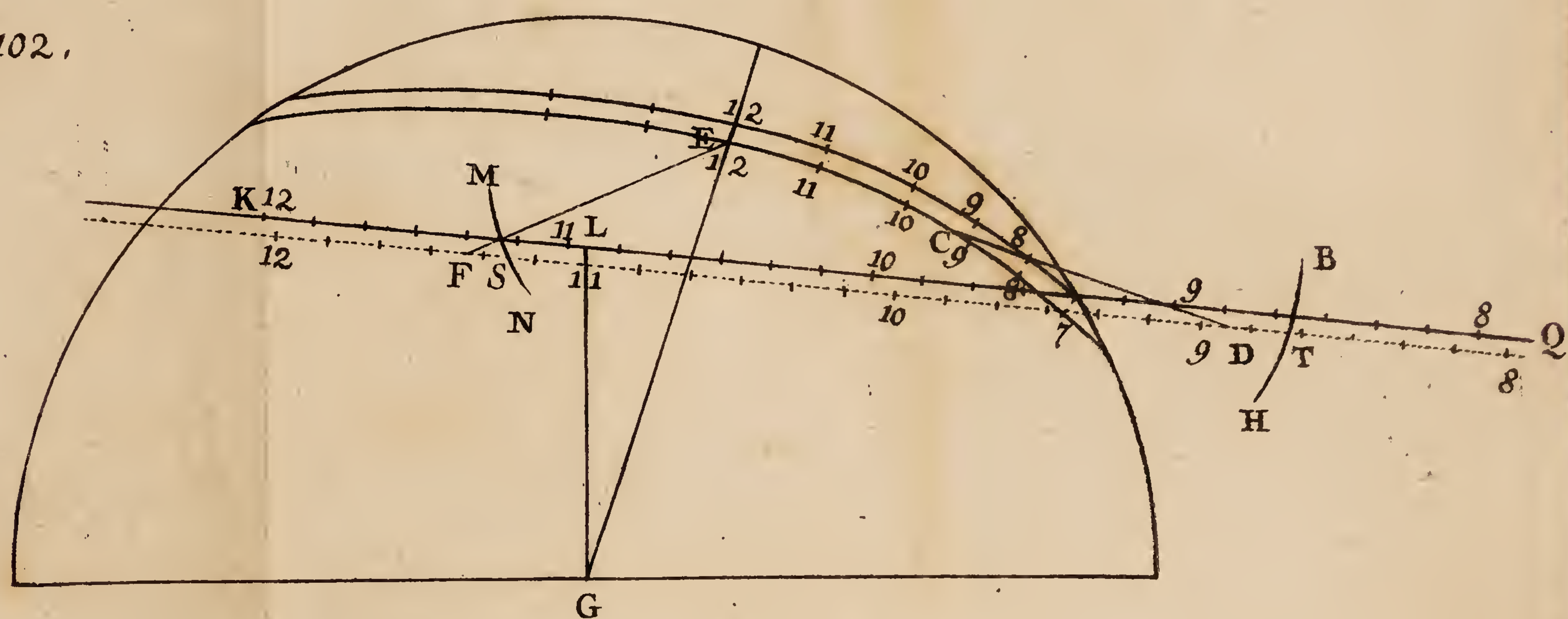

F. 99.
O
d
D
T
R
l
m
C
Q
L
n
N
M
P
V
A

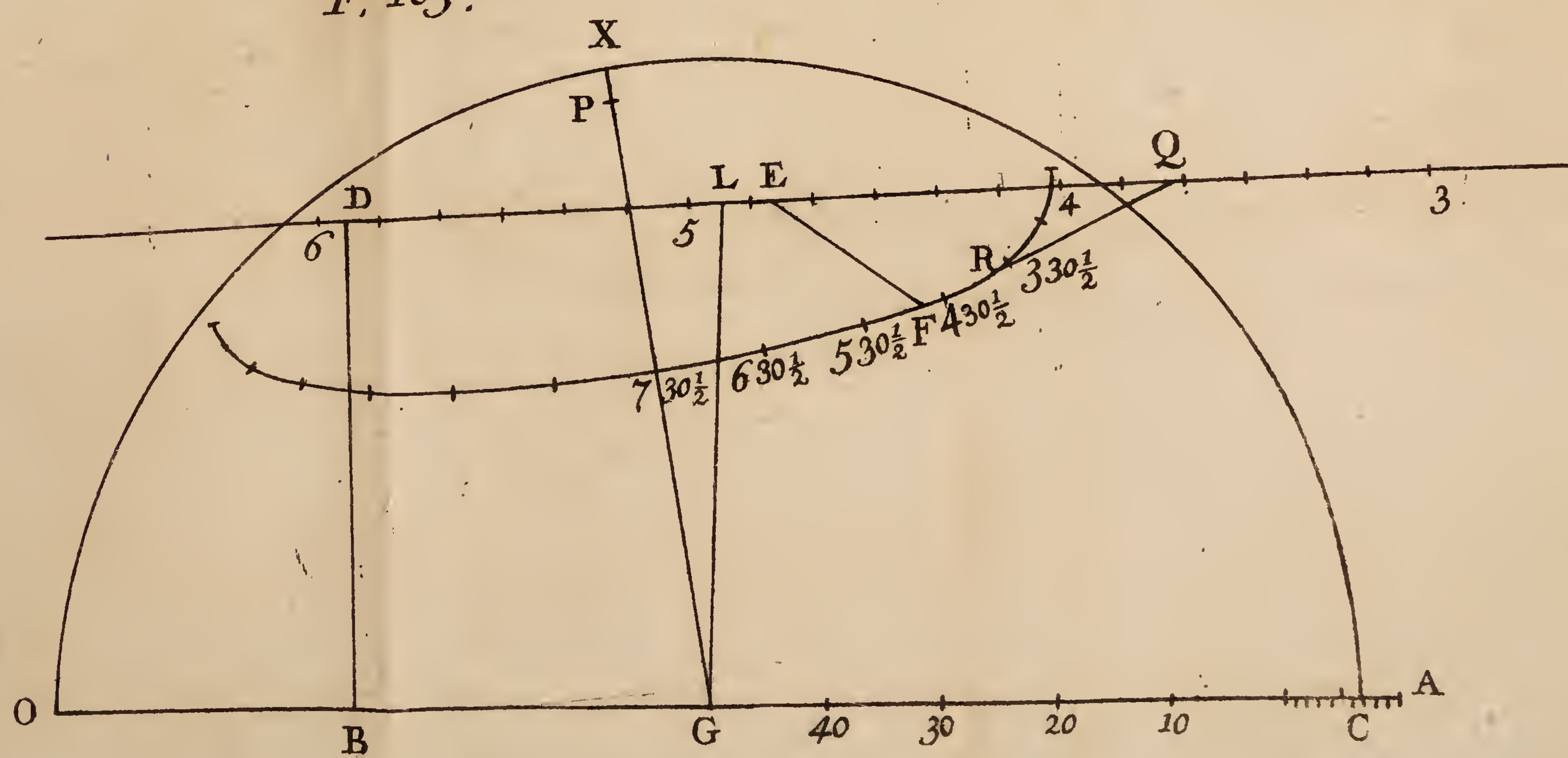

L
M
N
F
98
C


B
60
50
40
30
20
10
A
Septentrio
X
F. 100:
15
H
10
I
E
13
K
P
14
O
G
C
N
V
Oriens
Occidens
Meridies




F. 101.
X
P
E
K
L
F
I
D
R
Q
O
G
50
40
30
20
10
C
A


F. 102.
E
M
K
L
C
F
S
N
B
D
T
Q
H
G


F. 103.
X
P
D
L
E
I
Q
R
F
O
B
G
40
30
20
10
C
A



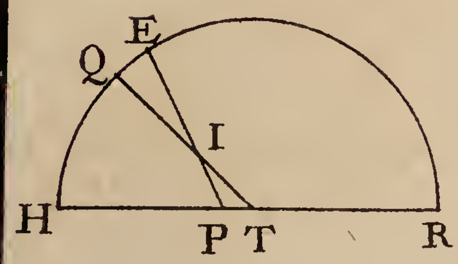
F. 104.



F. 105.



F. 106.



AD LECTIONES ELEMENTARES ASTRONOMIÆ PHYSICÆ, ET GEOMETRICÆ

CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SUECICÆ, BORUSSICÆ, RUSSICÆ, ET GOETTINGANÆ, NEC NON INSTITUTI BONONIENSIS MEMBRI, AC PROFESSORIS MATHESEOS IN COLLEGIO MAZARINIANO PARISIIS,

APPENDIX

COMPLECTENS PRÆCIPUAS MUTATIONES,

QUAS

AUCTOR IN ULTIMA EDITIONE PARISINA ANNO M. DCC. LXI FECIT,

ET IN LATINUM CONVERTIT

C. S. E S. J.



VIENNÆ, PRAGÆ ET TERGESTI,

TYPIS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

MDCCLXII.

LECTORI BENEVOLO.

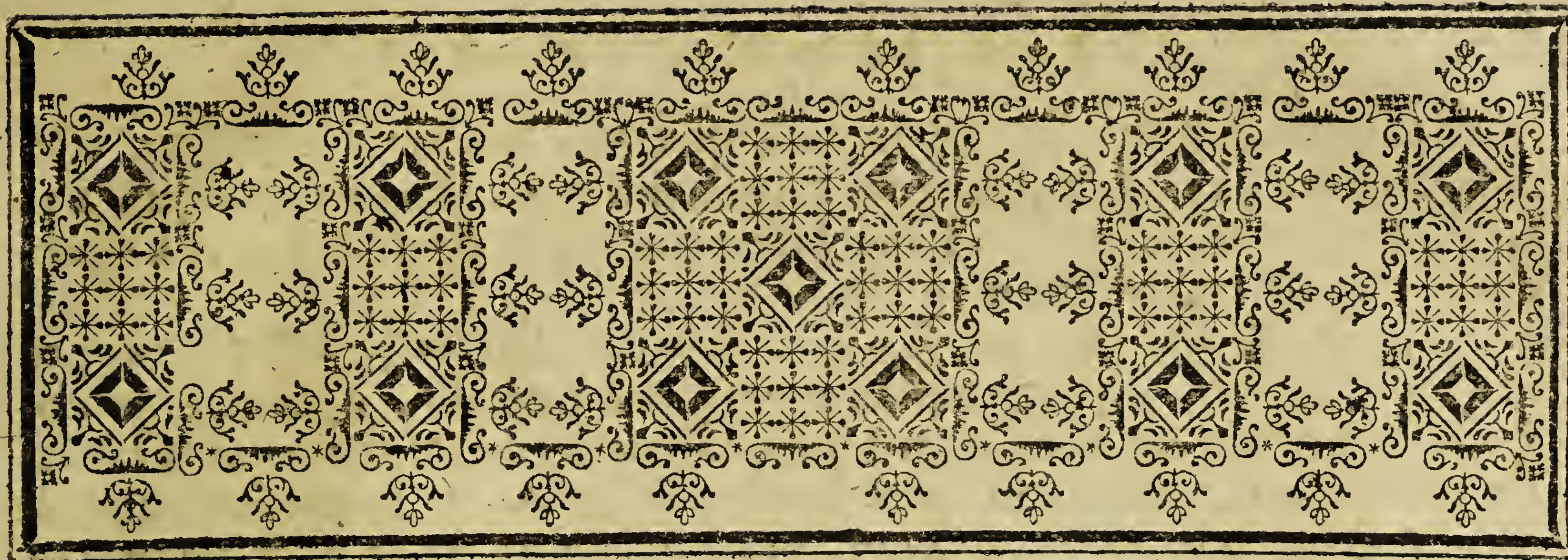
E*re illorum me facturum existimavi, qui* Astronomiæ Lectiones *latinas jam sibi compararunt, si præcipuas mutationes, quas clarissimus Auctor, cum eas Parisiis Anno* 1761 *denuo ederet, faciendas putavit, brevi* Appendice, *facileque parabili, complecterer, ne illis vel penitus* carerent, *vel, dum rursus volumen integrum prælo subjiciatur, expectare cogerentur.*

Dum autem præcipuas *dico, eas intelligat Lector, quæ vel ad methodum pertinent, vel dimensiones non nullas spectant, in quibus plus momenti est ad Theoriam. Quando de exemplis tantummodo illustrandæ methodo destinatis agitur, vix operæ pretium censui, lectorem ad appendicem remittere, nisi & hæc ipsa peculiare quid contineant, quod rationes antea non satis explicatas, vimque adeo, si dicere licet, methodi ob oculos ponat. Ceterum si omnes mutationes congerendæ fuissent, leviore sine labore novam editionem totius operis fuissemus moliti. Unum est, quod monitum cupio lectorem, me citasse semper paginam Lectionum Astronomiæ, ad quam mutatio quævis pertinet; plerumque etiam para-*

 gra-

graphum, quandoque tamen paginam tantum. Dum paginæ & paragrapho etiam numerus lineæ, in qua quidpiam corrigendum occurrit, additus est, lineas Lector ab eo paragrapho numerabit, non ab initio paginæ; secus, si paragraphus additus non sit. Pariter numeros schematum, quæ vel nova accesserunt, vel mutata sunt in editione Parisina, hic retinui. Unde dum figura citatur numero simplice, ea quærenda est in tabulis lectionum; si vox Append. *adjuncta sit, in Appendice reperietur.*

PRÆ-



PRÆCIPUÆ MUTATIONES
IN
LECTIONIBUS ASTRONOMIÆ.



Ag. 5 *ante* §. 20 *inseratur sequens Corollarium, pro quo* Fig. 2 Append. *non nihil immutata adhibenda est.*

Coroll.. Si duo quivis anguli correspondentes A, D conjungantur arcu circuli maximi AD (qui in P ex A productus erit ad latus oppositum CB perpendicularis); si præterea arcus CA, FD producantur, donec in K concurrant, fient quatuor triangula DAI, NAD, KAI, KND, ad I & N rectangula, quorum anguli, & latera erunt complementa angulorum, & laterum trianguli ABC, aut vero iisdem æqualia. Sic latera IA, ID sunt complementa lateris AB, & anguli B; uti & hypotenusa AD arcus perpendicularis AP. Eodem modo AN, DN sunt complementa lateris AC, & anguli C: angulus item NDK æquatur lateri BC; & angulus DKN est complementum arcus BQ ex angulo B ad latus oppositum AC perpendicularis; quod nempe puncta B, E sint poli circulorum, ad quos pertinent arcus DK, NK (15). Idem dici potest de arcubus BA, DE; aut CB, FE productis, donec alter alteri occurrat. Hæc triangula rectangula adhiberi possunt, dum partes trianguli obliquanguli ABC sunt calculandæ.

Pag. 7. §. 28 *adde*: Verum numerus graduum singulorum angulorum dependet a numero graduum laterum, nec constans est, ut

in triangulis rectilineis. Id tantum certum, quemvis angulum esse majorem 60° (23); & si singula latera sint 90°, singuli quoque anguli sunt graduum totidem; sed lateribus 90° excedentibus, anguli etiam singuli recto sunt majores.

Pag. 7. §. 31. *Quæ hoc §. a lin. 6 habentur, ita mutanda sunt:* Verum ubi hunc numerum graduum aliquis eorum excedit, signum ejus cosinus, tangentis, & cotangentis mutandum est in contrarium. Etenim ex ipso intuitu circuli in 360° divisi, si hæ lineæ in diversis successive positionibus considerentur, patet I, quod inde a 0° usque ad 180° sinus eundem situm servent respectu diametri hæc divisionum puncta jungentis; quod crescant a 0 usque ad 1, qui terminus est quoddam eorum *maximum*, ad quod perveniunt, ubi 90° numerantur; postea decrescunt usque ad 0, cum scilicet ad 180° venitur; quod hinc incipiendo positionem mutent, ac usque ad 1 crescant, dum ad 270° attingunt, a quo termino decrescunt usque ad nihilum, ubi 360° habentur. Quare signum non mutatur, nisi in transitu per 0°, & 180°. II. At vero cosinus ad *maximum* suum perveniunt in 0° & 180°; & fiunt 0, simulque positionem mutant in 90° & 270°. III. Si tangentes sumantur in recta utrinque in infinitum producta per 0°, & cotangentes in recta utrinque in infinitum producta per punctum 90°, facile admodum intelligitur, earum signum mutari in transitu per 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, ubi æquantur vel 0, vel ∞.

Pag. 8. §. 33 *Formulæ, quæ hic primo loco ponitur, sequentes duæ præmittendæ sunt.*

$\pm f \frac{1}{2}$ A $= \pm$ *cof* $\frac{1}{2}$ *suppl.* A. Item $\pm$ *tang* $\frac{1}{2}$ A $= \pm$ *cot* $\frac{1}{2}$ *suppl.* A.

Formulæ ipsi primæ adde $= \frac{tang\ A}{sec\ A}$.

§. 34 *Formulæ* II *adde* $= R^2 - 2f^2 \frac{1}{2}$ A.

§. 35 *Formulæ* III *adde* $= f A \times sec$ A.

§. 39 *Formula* VII *lege* R $\pm$ *cof* A $=$ &c.

§. 41. *Formulæ* IX *adde:* Aut vero $\frac{R + cof\ A}{R - cof\ A} = cot^2 \frac{1}{2}$ A.

Pag. 9. *Post titulum* DEMONSTRATIO, *inseratur:* Ratio formularum $\pm f \frac{1}{2}$ A $=$ *cof* $\frac{1}{2}$ *suppl.* A, item $\pm$ *tang* $\frac{1}{2}$ A $= \pm$ *cot* $\frac{1}{2}$ *suppl.* A, intelligitur, si cogitetur, quod si v. gr. A sit $= 40°$, sinus, & tangens ejus complementi ad 2 rectos 140° (sive *supplementi*) sint negativa; at vero si dimidia accipiantur, scilicet 20°, & 70°, hæc sese mutuo ad rectum complent, atque 90° minora sunt.

Pag. 11 *lin.* 13 *adde:* uti & formula VI e XXIX, si ponatur B $=$ A.

Pag. 17 §. 105 *Loco* Coroll. *si in triangulis sphæricis* &c, *lege* Coroll. *Si in duobus triangulis sphæricis descriptis in eadem sphæra* &c.

Pag.

Pag. 23 §. 126 *Hujus §. lineæ* 7, 8 & 9 *omittantur.*

Pag. 28 *linea ultima hujus paginæ adde* : Jam vero manifestum est, 6, 21803 esse logarithmum numeri $\frac{1}{6053}$ (posito logarithmo unitatis = 10, 00000); & numerum alium multiplicare per $\frac{1}{6053}$ idem esse, ac eum per 6053 dividere.

Pag. 41 §. 34	*lin.* 8. *loco*	25″ 23‴ *lege*	25″, 4.
	lin. 9. *loco*	16″ 37‴ *lege*	26″, 6.
Pag 42. §. 35	*lin.* 2. *loco*	16″ 37‴ *lege*	16″, 6.
	lin. 6. *loco*	4° 11′ 5″ *lege*	4° 11′ 27″.
	lin. 7. *loco*	6° 23′ 27″ *lege*	6° 23′ 29″.
	lin. 10. *loco*	2° 12′ 22″ *lege*	2° 12° 2″.

Pag. 43. *Cum plures correctiones in hac tabula occurrant, e commodo lectoris putavimus, novam ex integro subjicere.*



Di-

Diſtantiæ Mercurii a prima Stella Arietis in ipſo meridie obſervatæ.

1740	Sign.	Grad.	Min.	Sec.	Differentiæ.		
Jun. die 14	0	2	4	30	5°	2′	37″
15	0	7	7	7	5	12	23
16	0	12	19	30	5	22	14
17	0	17	41	44	5	31	53
18	0	23	13	37	5	41	20
19	0	28	54	57	5	50	12
20	1	4	45	9	5	58	31
21	1	10	43	40	6	5	53
22	1	16	49	33	6	12	12
23	1	23	1	45	6	17	9
24	1	29	18	54	6	20	54
25	2	5	39	48	6	23	1
26	2	12	2	49	6	23	29
27	2	18	26	18	6	22	22
28	2	24	48	40	6	19	33
29	3	1	8	13	6	15	13
30	3	7	23	26	6	9	42
Jul. d. 1	3	13	33	8	6	2	53
2	3	19	36	1	5	55	8
3	3	25	31	9	5	46	31
4	4	1	17	40	5	37	25
5	4	6	55	5	5	27	52
6	4	13	22	57	5	18	10
7	4	17	41	7	5	8	21
8	4	22	49	28	4	58	33
9	4	27	48	1	4	49	2
10	5	2	37	3	4	39	46
11	5	7	16	49	4	30	54
12	5	11	47	43	4	22	22
13	5	16	10	5	4	14	12
14	5	20	24	17	4	6	28
15	5	24	30	45	3	59	9
16	5	28	29	54	3	52	15
17	6	2	22	9	3	45	46
18	6	6	7	55	3	39	22
19	6	9	47	17	3	34	2
20	6	13	21	19	3	28	48
21	6	16	50	7	3	23	57
22	6	20	14	4	3	19	20
23	6	23	33	24	3	15	17
24	6	26	48	41	3	11	19
25	7	0	0	0	3	7	44
26	7	3	7	44	3	4	27
27	7	6	12	11	3	1	31
28	7	9	13	42	2	58	51
29	7	12	12	33	2	56	24

	Sign.	Grad.	Min.	Sec.	Differentiæ.		
Jul. d. 30	7	15	8	57	2°	54′	11″
31	7	18	3	8	2	52	15
Aug. d. 1	7	20	55	23	2	50	27
2	7	23	45	50	2	49	2
3	7	26	34	52	2	47	45
4	7	29	22	37	2	46	36
5	8	2	9	13	2	45	49
6	8	4	55	2	2	45	3
7	8	7	40	5	2	44	43
8	8	10	24	48	2	44	24
9	8	13	9	12	2	44	20
10	8	15	53	32	2	44	30
11	8	18	38	2	2	44	51
12	8	21	22	53	2	45	25
13	8	24	8	18	2	46	10
14	8	26	54	28	2	47	4
15	8	29	41	32	2	48	17
16	9	2	29	49	2	49	39
17	9	5	19	28	2	51	8
18	9	8	10	36	2	53	10
19	9	10	3	46	2	55	13
20	9	13	58	59	2	57	23
21	9	16	56	22	3	0	1
22	9	19	56	23	3	2	48
23	9	22	59	11	3	5	55
24	9	26	5	6	3	9	20
25	9	29	14	26	3	12	56
26	10	2	27	22	3	17	10
27	10	5	44	32	3	21	24
28	10	9	5	56	3	26	2
29	10	12	31	58	3	30	57
30	10	16	2	55	3	36	15
31	10	19	39	10	3	42	24
Sept. d. 1	10	23	21	34	3	48	52
2	10	27	10	26	3	55	14
3	11	1	5	30	4	2	23
4	11	5	7	53	4	9	54
5	11	9	17	47	4	17	47
6	11	13	35	34	4	26	10
7	11	18	1	44	4	34	56
8	11	22	36	40	4	43	52
9	11	27	20	32	4	53	19
10	0	2	13	51	5	2	54
11	0	7	16	45	5	12	42
12	0	12	29	27	5	22	31
13	0	17	51	58			

Pag. 48 §. 60. *Hoc Scholium a Lin.* 8 *hunc in modnm mutetur* : Itaque *si motus a viribus acceleratricibus diversis effecti inter se comparentur*, est 1mo. *celeritas in ratione composita virium acceleratricium*, & *temporum*. 2do. *Spatia percursa sunt in ratione composita virium acceleratricium*, & *quadratorum temporum*. 3^{tio}. *Quadrata celeritatum acquisitarum sunt in ratione composita virium acceleratricium*, & *spatiorum*. Dicatur vis acceleratrix f, dabuntur sequentes formulæ.

$u = ft = \sqrt{fe}$. Hinc si $u = 1$, $e = \frac{1}{f}$ &c.

$e = ftt$.

$f = \frac{e}{tt}$.

$t = \sqrt{\frac{e}{f}}$.

Id genus formulæ rationum compositarum eodem prorsus modo demonstrantur, quo superius (52) usi sumus. Itaque

Pag. 54 §. 77 *in fine adde* : uti & vis uniformis & æquabilis *tangentialis* appellatur, quod ejus directio semper congruat cum tangente curvæ a corpore projecto descriptæ.

Pag. 57 §. 92. *Huic* §. *sequentia duo Corollaria subjicienda sunt*: Coroll. I. *Maxima angularis celeritas vera habetur itaque in eo orbitæ puncto, ubi corpus centro virium est maxime vicinum ; uti minima illic est, ubi ab eodem centro corpus plurimum distat*: Unde *linea apsidum duo trajectoriæ in se redeuntis puncta connectit*, *quorum alterum centro virium est maxime propinquum*, *alterum omnium maxime dissitum*.

Coroll. II. Si tempus revolutionis periodicæ corporis curvam in se redeuntem describentis sit $=$ T, distantia a centro virium, quando velocitas angularis vera æquatur velocitati angulari mediæ, $= r$, & distantia ab eodem centro in quovis alio trajectoriæ puncto dicatur $= d$, ejus illic velocitas angularis vera u tempore t admodum parvo rite exprimetur in hunc modum $u = \frac{t \times 360^{\circ} \times rr}{T \times dd}$. Est enim $u : \frac{t \times 360^{\circ}}{T} = rr : dd$. Ob eandem rationem erit $d = r\sqrt{\left(\frac{t \times 360^{\circ}}{T \times u}\right)}$ formula distantiæ a centro virium.

Pag. 61 Exempla, & usus &c. *Monitum hoc loco volumus lectorem*, *quoniam ad usum formularum rite comprehendendum nil interest*, *quænam dentur quantitates*, *nos in his exemplis nihil mutare voluisse*. *Unde positiones Mercurii non e tabula correcta*, *sed uti habetur* PAG. 43, *desumptas reliquimus usque ad* §. 106, *quem ab Authore magis illustratum cum differentiis e tabula correcta acceptis jam subjungimus*.

106. Interpolari etiam possunt differentiæ radicum datarum, tum ut inveniatur tempori dato correspondens, tum ut reperiatur maxima vel minima omnium, quæ dari possunt, ope formularum pro *maximo* vel *minimo*. Hac ratione plures observationes calculum

ingrediuntur, quo interpolatio accuratior evadit. V. g. in sequente tabella

Jun. loca Mercurii					*Differentiæ primæ.*			*Differentiæ secundæ.*
die 24	1^s	29°	18	$54''$	6°	$20'$	$54''$	$+\ 2'\ 7'' = a = 0'\ 0''$
25	2	5	39	48	6	23	1	$+\ 0\ 28 = b = 1\ 44$
26	2	12	2	49	6	23	29	$-\ 1\ 7 = c = 3\ 18$
27	2	18	26	18	6	22	22	$-\ 2\ 49 = d = 5\ 3$
28	2	24	48	40	6	19	33	
29	3	1	8	13				

Acceptæ ſunt ſex obſervationes a die 24 usque ad 29 Junii, cum 5 earum differentiis, quæ *differentiæ primæ* appellantur, & 4 harum differentiarum differentiis, quæ *differentiæ ſecundæ* dicuntur. Manifeſtum autem eſt *primo*, terminum, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, inter hos ſex dies contineri. *Secundo* quatuor differentias ſecundas reſpondere diebus 25, 26, 27 & 28 Junii. *Tertio* quoniam primæ duæ ex his ſecundis differentiis ſunt poſitivæ, reliquæ duæ negativæ, tempus, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, debere illud fuiſſe, quo differentia ſecunda fuit æqualis 0. Quare loco meridiei dierum 25, 26, 27 & 28 Jun. ſcribi etiam poteſt 0, 1, 2, 3, & pro differentiis ſecundis a, b, c, d, quarum prima $= 0$. Et ut imaginandi vis hac in re non nihil juvetur, calculique ordo appareat, ſit A D (*Fig.* 30 Append.) recta quævis in tres partes æquales arbitrariæ longitudinis diviſa. Inſiſtat huic ad A alia quælibet recta AE, cujus longitudo repræſentet quantitatem primam $a = 2'\ 7''$, quæ initio, ſeu origini alterius AD, competit, ubi ſcilicet radix prima $= 0$. Per B ducatur BF priori parallela, atque ex eadem AE parte, cujus longitudo exhibet quantitatem alteram $b = 28''$, radici AB $= 1$ convenientem. Agatur per C denuo parallela ad AE, verum in partem oppoſitam: ejus longitudo exprimit $c = -\ 1'\ 7''$, quæ functio reſpondet radici AC $= 2$. Denique per D ducta parallela ad AE, atque contrarium ſitum obtinens, repræſentat quantitatem $d = -\ 2'\ 49''$, debitam radici AD $= 3$. Quod ſi jam cogitetur curva per E, F, G, H tranſiens, evidens ſane eſt, per radicem AI exhiberi tempus tranſitus e poſitivo ad negativum, & conſequenter tempus velocitatis maximæ, quod quæritur. Licet vero AE, BF, CG, DH exprimant functiones reſpondentes radicibus 0, AB $= 1$, AC $= 2$, AD $= 3$, itaque calculus ex his ſolis iniri jam poſſet; ut tamen is adhuc evadat planior, ſumpta functione prima $= 0$, atque ſolutione problematis ad 3 caſum formulæ 2[dæ] reducta (97), ducatur EL ad AD parallela, & recta

ctæ FB, GC, HD (quæ functiones repræsentant) producantur usque ad EL, ut obtineantur Bb, Gg, Hh. Quoniam Eb, bg, gh æquantur cum AB, BC, CD, manifestum est, sumi posse punctum E, tum rectas Eb, Eg, Eh pro radicibus 0, 1, 2, 3; pro functionibus correspondentibus E, bB, gG, hH, aut in numeris 0, 1′ 39″, 3′ 14″, 4′ 56″; & ducta IK per punctum I ad AE parallela, huc demum reducitur problema, ut inveniatur valor radicis EK sive AI, respondentis functioni KI, vel AE = 2′ 7″, aut 127. His ita constitutis habebitur $l = 1\frac{5}{6}$, $k = -7\frac{1}{2}$, & $h = 106\frac{2}{3}$, & æquatio tertii gradus erit, $1\frac{5}{6}x^3 - 7\frac{1}{2}xx + 106\frac{2}{3}x = 127$, cujus radix $x = 1,2956$ æquivalet 1 d. 7 h. 5′ 40″, quod tempus meridiei 25 Junii, cui prima functio respondet, addendum, ut obtineatur tempus, quo Mercurius maximam nactus est celeritatem, scilicet d. 26 Jun. 7 h. 5′ 40″.

Si idem problema per formulam *Maximi* resolvere lubeat, quatuor tantummodo differentiæ primæ accipiendæ sunt, ne calculus in immensum excurrat; & sane praxi satis est hic terminorum numerus. Itaque habitis ex ordine quatuor prioribus differentiis primis 6° 20″ 54″, 6° 23′ 1″ &c, harum rursus accipiantur differentiæ, sive excessus supra minimam (quæ prima est); erunt functiones 0″, 2′ 7″, 2′ 35″, 1′ 28″. Et quoniam hæ ab initio crescunt, dein decrescunt, patet, celeritatem maximam quæsitam respondere functioni maximæ, poteritque ex formula *maximi* (97) $x = \frac{\pm\sqrt{(kk - 3lh)} - k}{3l}$ immediate reperiri. Quod si quis velit calculi ordinem figuræ Geometricæ accommodare, sit recta AD (*Fig* 29 Append.), cujus tres partes æquales exhibeant radices 0, 1, 2, 3. Parallelæ BE, CF, DG sua longitudine earum functiones repræsentabunt, scilicet 2′ 7″, 2′ 35″, 1′ 28″. Curvæ per extrema A, F, E, G transeuntis (quæ semper erit generis parabolici; & quidem ordinaria parabola, quando tres tantummodo functiones, totidemque radices habentur; cubica, sive secundi generis, ubi quatuor (uti in præsente casu) radices, ac functiones sunt &c.) vertex I respondebit functioni maximæ, quæ celeritatem maximam repræsentat; & recta AK, determinata per IK, ad BE parallelam, exhibet radicem correspondentem, quæ tempus maximæ celeritatis indicat. Ut igitur hæc radix reperiatur, erit $b = 131$, $c = 158$, $d = 91$; & hinc juxta casum 3 formulæ 2^{dæ} $l = \frac{2}{3}$, $k = -51\frac{1}{2}$, & $h = 177\frac{5}{6}$; & per formulam *Maximi* erit $x = \pm\sqrt{\left(\frac{2652\frac{1}{4}}{4} - \frac{177\frac{5}{6}}{5}\right)} + \frac{51\frac{1}{2}}{2}$, sive $x = \pm 23,9613 + 25,75$; quapropter binæ radices sunt

$x =$

$x = 49, 7113$, & $x = 1, 7887$, quarum poſterior procul dubio quæſita eſt. Reſpondet autem huic tempus 1 d. 18 h. 55′ 44″ addendum ad 24 Jun. 12 h. 0′, quod prima differentia 6° 20′ 54″ reſpondet medio inter 24 & 25 Junii. Obtinetur adeo tempus celeritatis maximæ Mercurii d. 26 Jun. 6 h. 55′ 44″, quod a ſuperius invento propterea tantillum differt, quod in præſente calculo una obſervatione pauciores ſint adhibitæ. Verum hoc diſcrimen nullius momenti eſt, cum motus planetæ in tranſitu per apſides (ubi radius vector ad tangentem perpendicularis eſt) ſit admodum æquabilis.

Si tandem ſcire quis cupiat, quanta fuerit celeritas maxima angularis Mercurii intra 4 horas, ſive quos arcus conficere viſus ſit duabus horis ante, & duabus horis poſt momentum, quo ad maximam celeritatem pervenit, id eſt, ab hora 5 usque ad horam 9 diei 26 Junii, in formula $-15\frac{5}{6}x^3 + 61\frac{1}{2}xx + 22935\frac{1}{3}x$ primum pro x ſubſtituatur 1, 20833, dein vero 1, 375; obtinebitur e prima ſubſtitutione 27775, 4, ex altera 31611, 2, & differentia 3835, 8 oſtendet, motum angularem fuiſſe 1° 3′ 55″, 8.

Conſimili calculo invenietur celeritas minima Mercurii die 9 Aug. 6 h. 37′, ejusque motus angularis verus intervallo 4 horarum (nempe ab 4 h. 37′, usque ad 8 h. 37′) 27′ 23″, 2.

Pag. 63. §. 107. *Demonſtratio hujus Theor. ſic mutanda, adhibito etiam ſchemate* 31 Append. *paullo aliter conſtructo.*

DEMONSTRATIO. Si corpore D trajectoriam PNAM circa punctum S deſcribente, cogitetur interea aliud corpus *d* circa idem centrum S, eodemque tempore periodico, circulum TNM percurrere, manifeſtum eſt 1mo, ob æqualitatem temporum periodicorum, velocitatem angularem mediam (90) utriusque corporis eandem eſſe. 2do. in circulo celeritatem angularem veram æquari ſemper celeritati angulari mediæ (88). Quare velocitas angularis media in trajectoria æqualis ſemper eſt velocitati angulari veræ in circulo. His poſitis, ſint G*g*, R*r* arcus eodem tempore deſcripti, alter in trajectoria, in circulo alter. Ductis SG, S*g*; SR, S*r*, nec non GO ad S*g* perpendiculari, ſectores GS*g*, RS*r* erunt areæ triangulares æquales; & hinc (Elem. 597) R*r*: GO = SG : SR. Sunt autem arcus (Elem. 582) GO : RV = SG : SR; igitur R*r* : RV $= SG^2 : SR^2$. Quare, prout SG fuerit major, æqualis, aut minor, quam SR, hoc eſt, prout corpus D fuerit extra circulum, vel in eodem, aut intra illum, ita arcus R*r*, qui velocitatem angularem veram in circulo metitur, conſequenter etiam celeritatem angularem mediam in trajectoria, major, æqualis, aut minor erit arcu RV, qui metitur angulum GS*g* celeritatis angularis veræ in Trajectoria. Unde in toto arcu NAM celeritas angularis vera corporis D minor

eſt

eſt celeritate media. Oppoſitum contingit in arcu MPN. Sunt *itaque puncta* N *&* M *termini accelerationis, & retardationis motus angularis veri reſpectu motus medii.* Et hinc velocitas angularis vera nullibi accurate æquatur mediæ, præterquam in dictis punctis N & M. Nec etiam æqualitas ad ſenſum habetur inter has velocitates, niſi quatenus exigui arcus trajectoriæ ad N & M congruunt ad ſenſum cum arcubus exiguis circuli: ſed quo angulus curvilineus ANM major eſt, eo minus trajectoria cum circulo congruit: itaque quo major eſt angulus, quo trajectoria circulum interſecat, eo citius circa puncta N & M velocitas angularis vera a media diſcrepet, eſt neceſſe.

Pag. 64. § 109. *Huic §. ſequentia adjiciantur.* Ut poſtremo loco allata analogia demonſtretur, ponatur recta GH (*vide Fig.* 31 Append.) duo loca oppoſita conjungere, in quibus Planeta parum a linea apſidum AP abfuit. Facile intelligetur, cum motus in A & P ſit æquabilis ad ſenſum, tempora, quibus percurruntur ſpatia angularia æqualia PSH, ASG, eſſe in ratione inverſa celeritatum angularium u, V in A & P: unde erit $T : t = V : u$; & hinc $V - u : V = T - t : T$.

Pag. 69. Artic. XI. *Quoniam in hoc articulo plurimæ mutationes occurrunt, ne Lectoris attentionem in materia tanti momenti diſtraheremus, eum propter paucas lineolas nunc ad præſentem Appendicem, nunc rurſus ad ipſas Lectiones Aſtronom. remittendo, expedire judicavimus, totum Articulum, uti in poſtrema edit. Pariſi. habetur, hoc loco exponere.*

ARTICULUS XI.

De ratione diſtribuendi inæqualitates Planetarum in diverſis orbitæ locis.

Inæqualitas motus angularis eſt perpetua mutatio rationis, quam anguli confecti ad partes æquales temporis habent. In theoria motus compoſiti a nobis tradita non aliam conſtantem rationem reperimus, quam arearum deſcriptarum a radiis vectoribus ad tempora, quibus percurruntur; ut proinde ad calculandos motus veros Planetarum pro tempore quovis dato, imprimis areæ ſectorum confectæ ex ipſo tempore definiri debeant; tum vero quæri anguli ad vertices eorundem ſectorum. Ut autem tam tempora, quam areæ rite conſtituantur, inde a punctis quibusdam fixis (quæ *Epochæ* dicuntur) computi initium ſumendum. Et quamvis videatur, pro *Epocha temporis* ſumi poſſe momentum quodvis, modo ſimul conſtet de *Epocha*

 motus

motus, id eſt, cuinam cœli puncto locus Planetæ eo temporis momento reſponderit; nihilominus ut, quantum licet, calculus reddatur ſimplicior, epocharum electio arbitraria non eſt, quando quisque facile perſpicit, non aliud punctum commodius pro primo ſtatui, quam in quo Planetæ motus eſt uniformis. At vero in quavis revolutione Planetæ ellipſin deſcribentis, motus bis fit æquabilis, ſcilicet in tranſitu per lineam apſidum: e re igitur fuerit, ut alterutrius hujus tranſitus momentum aſſumatur pro epocha temporis, punctum vero cœli, cui apſis illa, per quam tum tranſiit, reſpondet, pro epocha motus.

Convenit quidem adhuc inter Aſtronomos, ut tempus tranſitus per Aphelium, & ipſe Aphelii locus epochæ ſtatuerentur; verum poſtquam ex indubio Cometarum reditu demonſtratum eſt, etiam ab his ellipſes deſcribi, quarum pars vicinior, in qua eſt Perihelium, a nobis tantum conſpici poteſt, neceſſitas nobis impoſita eſt, a vetere hoc more recedendi, ſiquidem regulas calculi & Planetis, & Cometis accommodatas condere velimus. Quare motus corporum cœleſtium deinceps a Perihelio computandi ſunt. Ceterum hæc mutatio præter ſignorum + & — commutationem vix aliam varietatem in regulas calculi ab Aphelio deducti invehit, ut modica attentione adhibita facile eædem regulæ ab una epocha ad alteram traduci poſſint. Determinatis itaque ex obſervationibus dimenſionibus ellipſium, quas ſinguli Planetæ deſcribunt, poſitione lineæ apſidum, & conſtituta epocha tranſitus per perihelium, nihil præterea deeſt obſervatori, quo minus locum Planetæ in hac orbita pro tempore quovis dato calculare poſſit, quam ut reperiat methodum aſſignandi angulum ad ſolem a linea apſidum, & radio vectore, in cujus extremo Planeta tempore dato exiſtit, comprehenſum.

Hæc methodus, quæ regulas reperiendi omnes motuum Planetariorum inæqualitates ſuppeditare debet, ſuis non caret difficultatibus. Solet vero *Problema Kepleri* dici, quod is Aſtronomus, cum veram motuum cœleſtium theoriam propoſuiſſet, primus conſtituerit, ejus leges ad calculos exigere, quanquam rem methodo directa perficere haud potuerit, aliis, qui poſt ſe in Geometriam profundius penetraſſent, relicta cura problematis directe reſolvendi. Neque vero ad hæc noſtra usque tempora id via commodiore, quam approximatione, præſtari potuit, ob rationem, quæ mox patebit. Adferemus interim ſolutionem praxi maxime opportunam, imprimis quando orbitæ parum admodum a circulis differunt, quales reapſe ſunt omnes Planetariæ ſyſtematis Solaris: poſtea indicabimus, quid agendum dum calculus ellipſibus valde eccentricis, ut ſunt Cometarum trajectoriæ, accommodandus.

Con-

Conſtructio Problematis Kepleriani. E datis dimenſionibus trajectoriæ planetæ deſcripta ellipſi A B P E (*vid. Fig.* 26 *Append.*), cujus axis major A P, A aphelium, P perihelium, S focus a Sole occupatus, B E axis minor, C centrum &c, fiat ſuper diametro A P circulus A N P G, in cujus circumferentia, inde a puncto P ſequendo directionem planetæ, accipiatur arcus P D, qui ſit ad totam circumferentiam, ut eſt intervallum temporis a proximo tranſitu planetæ per perihelium usque ad tempus datum, ad tempus revolutionis periodicæ. Jungatur S D, & agatur ei per C radius parallelus C N. Demittatur ex N in axem A P perpendiculum N I: erit punctum M, in quo ſecat ellipſin, locus planetæ in ſua orbita prope verus.

Jam vero circulus A D P G appellatur *eccentricus*; arcus B D, ſive angulus P C D, quem is metitur, *Anomalia Media* Planetæ; arcus P N, aut angulus P C N, *Anomalia Eccentrici*; angulus P S M, qui quæritur, *Anomalia Vera* planetæ; denique differentia inter anomaliam mediam & veram, *Æquatio Centri.* Unde problema Keplerianum hunc in modum enunciandum eſt: *data anomalia media planetæ, invenire ejus anomaliam veram, ſive æquationem centri.* Reſolutio in duas partes dividitur: in altera ex anomalia media invenitur anomalia eccentrici: in altera ex anomalia eccentrici anomalia vera.

Proponatur exempli cauſa inveniendus locus Mercurii die 13 Julii An. 1740. 9 h. veſperi. Cum Mercurius fuerit in ſuo perihelio die 29 Jun. 6 h. 59′ 41″, intervallum inter epocham, & tempus datum eſt 17 d. 2 h. 0′ 19″. Quod ſi itaque fiat, ut 87 d. 23 h. 15′ 32″ ad 360° 0′ 0″, ita 17 d. 2 h. 0′ 19″ ad 69° 54′ 41″, habebitur anomalia media planetæ, ſive arcus P D.

Demonſtratur Conſtructio. Quoniam in motibus corporum cœleſtium tempora perpetua lege proportionalia ſunt areis, quas verrunt radii vectores, ſi M eſt locus verus Planetæ in ſua ellipſi, area P S M ſit, oportet, ad aream integram ellipſeos, ut eſt intervallum temporis a tranſitu proximo per perihelium usque ad tempus datum elapſi ad tempus periodicum planetæ. Jam vero arcus P D, & tota eccentrici peripheria, ſeu, quod idem, ſector P C D, & area integra eccentrici ſunt itidem in eadem temporum ratione: quare eſt area P S M ad aream P C D, ut area ellipſeos ad aream eccentrici, & propterea (Elem. 896) ut C B ad C A. Sunt vero areæ P S M, P S N pariter inter ſe, ut C B & C A (Elem. 897); igitur eſt area P S M ad aream P C D, ut eadem area P S M ad aream P S N, e quo manifeſtum eſt, P C D æquari cum P S N. Porro $PCD = PCN - DCN$, & $PSN = PCN - CNS$; ergo area $DCN = CNS$. Eſt autem (Elem. 604) $DCN = \frac{1}{2} CN \times DN$; & $CNS = \frac{1}{2} CN \times ST$; unde $DN = ST$, id eſt, *anomalia eccentrici* per P N determinata, *ejus debet*

eſſe

esse conditionis, ut arcus D N *eccentrici, differentiam ab anomalia media* P D *metiens, æquetur exacte longitudini perpendiculi* S T *e foco* S *in radium* C N, *qui anomaliam eccentrici abscindit, demissi.*

Sed quoniam orbitæ ponuntur parum a circulis discrepare, punctum S debet puncto C admodum vicinum esse, perpendicularis S T exigua, & consequenter arcus D N, ei æqualis, paucorum graduum. His ita habentibus, cum tam arcus D N sit ad radium CN normalis, quam S T, poni potest, S T & D N esse rectas æquales ad C N perpendiculares, & propterea SD ad sensum esse parallelam cum C N. Datis itaque punctis S, & D, altero ex constructione ellipseos, altero ex anomalia media, datur linea S D positione, eique parallela C N abscindit in N anomaliam eccentrici, cujus ope in ellipsi invenitur locus planetæ M.

OBSERVA Propter curvaturam arcus D N nequit S D accurate esse parallela ad CN, sed aliquantum versus N inclinari debet, eoque magis, quo arcus DN est plurium graduum. Itaque angulus PSD paullo major est angulo PCN, qui anomaliam eccentrici exhibet.

Resolutio partis primæ Problematis Kepleriani, id est, data anomalia media invenire anomaliam eccentrici.

Anomalia eccentrici PCN proxime æquatur angulo PSD, complemento ad duos rectos anguli CSD; dantur vero in triangulo CSD latera CS, C D = CA, cum angulo comprehenso SCD; reperitur igitur CSD, indeque PSD. Porro analogia in hoc calculo adhibenda est (Elem. 751) CD + CS (sive SA) est ad CD — CS (id est SP), ut tangens dimidii complementi ad duos rectos anguli S CD ad tangentem arcus addendi eidem dimidio complemento ad duos rectos, ut habeatur angulus CSD. Et quoniam (Elem. 736) tangentes sunt in ratione reciproca cotangentium, analogia mutabitur in hanc: SP est ad SA, sive *distantia perihelii est ad distantiam aphelii*, ut cotangens dimidii complementi ad duos rectos anguli CSD (hoc est, *ut tangens dimidiæ anomaliæ mediæ* SCD), est ad cotangentem arcus addendi dimidio complementi ad duos rectos anguli CSD, ut habeatur complementum ad duos rectos anguli PSD, (hoc est, *ad tangentem arcus addendi dimidio anguli* SCD *anomaliæ mediæ*, ut obtineatur angulus PSD *proxime æqualis* angulo PCN *anomaliæ eccentrici*).

In exemplo proposito est o, 791184 : 1, 208816 = *tang* 34° 57′ 20″ : *tang.* 46° 53′ 5″, ac proinde anomalia eccentrici prope vera 81° 50′ 25″.

Verum ut hæc anomalia eccentrici ad veram propius accedat, quærenda est vera magnitudo anguli PCN, vel SCT, ope cujus in triangulo SCT ad T rectangulo recta ST ejusmodi reddatur, ut ad gradus, minuta, & secunda reducta accurate æquetur differentiæ inter eundem angulum

SCT,

S C T, & anomaliam mediam datam P C D; id autem non nisi tentando obtineri potest (cum problematis constructio accurata non sit), & per approximationem, quod quadratura, aut rectificatio circuli adhuc aliter, quam per approximationem, non habeatur. In hunc finem imprimis eccentricitas C S ad gradus, minuta, & secunda ope sequentis analogiæ est reducenda: ut radius C A, sive 1, est ad 57° 17′ 44″,8; ita est C S, seu 0,208816, ad 11° 57′ 51″,3. (Observandum hic, radium circuli in gradus conversum semper obtineri 57° 17′ 44″,8, si fiat 355 : 113 = 180° 0′ 0″ : 57° 17′ 44″,8). Dein in triangulo rectangulo S C T, sumpto angulo S C T, qualis supra inventus est, 81° 50′ 25″, quærendum est latus S T ex hac proportione: *ut radius est ad eccentricitatem* C S *in partes circuli conversam, ita est sinus anomaliæ eccentrici* S C T *ad* S T *itidem reductam ad gradus.* In nostro exemplo reperitur S T = 11° 50′ 35″, quæ sit differentia inter anomaliam mediam, & anomaliam eccentrici; & hinc, cum anomalia media sit 69° 54′ 41″, habetur anomalia eccentrici 81° 45′ 16″. Sumatur itaque angulus S C T 81° 45′ 16″, & inito in hac hypothesi calculo invenietur S T 11° 50′ 26″, & anomalia eccentrici 81° 45′ 7″. Hinc denuo ponatur angulus S C T 81° 45′ 7″, iterato calculo in eodem triangulo reperitur S T 11° 50′ 26″, eadem, quæ prius: e quo demum intelligitur, anomaliam eccentrici reapse esse 81° 45′ 7″.

Resolutionis pars altera: data anomalia eccentrici invenire anomaliam veram.

Posito M loco vero Mercurii in ellipsi, hoc eodem centro M describatur per focum alterum F ellipseos circulus O F R: producatur S M utrinque in Q, O: erit $SO = SM + MO = SM + MF = 2\,CA = 2$, posita $CA = 1$ seu sinui toti; $SQ = MQ - MS = FM - SM$; & $FI = \frac{1}{2} FR$ (Elem. 448), seu $FR = 2\,FI$: item $SR = FR - FS$, & hinc $\frac{1}{2} SR = FI - FC = CI = cos\,PN$, & $SR = 2\,cos\,PN$. Est autem (Elem. 566) $SO : SR = FS : SQ$, vel vero $2 : 2\,cos\,PN = 2\,CS : FM - SM$; igitur $FM - SM = cos\,PN \times 2\,CS$. Atqui $FM + SM = AP = 2$; ergo (Elem. 232) $SM = 1 - CS \times cos\,PN$.

In triangulo S M I ad I rectangulo est $SM : R = SI : cos\,ISM$; seu $1 - CS \times cos\,PN : 1 = CS - CI$ (aut $CS - cos\,PN$) : $cos\,ISM$. Quare $cos\,ISM = \frac{CS - cos\,PN}{1 - CS \times cos\,PN}$; & $1 + cos\,ISM$

$$= \frac{1 - CS \times cos\,PN + CS - cos\,PN}{1 - CS \times cos\,PN} = \frac{1 + CS - (1 + CS) \times cos\,PN}{1 - CS \times cos\,PN}$$

$$= \frac{SP - SA \times cos\,PN}{1 - CS \times cos\,PN}.$$ Eodem modo reperitur $1 - cos\,ISM =$

C SP

$\frac{SP + SP \times cos\,PN}{1 - CS \times cos\,PN}$. Eſt autem (31) $cos\,ISM = - cos\,PSM$; unde (41) $\frac{1 - cos\,PSM}{1 + cos\,PSM} = \text{tang}^2\,\tfrac{1}{2}\,PSM = \frac{1 + cos\,ISM}{1 - cos\,ISM} =$ $\frac{SA - SA \times cos\,PN}{SP + SP \times cos\,PN} = \frac{SA}{SP} \times \frac{1 - cos\,PN}{1 + cos\,PN} = \frac{SA}{SP} \times tang^2\,\tfrac{1}{2}\,PN$. Hinc denique $tang^2\,\tfrac{1}{2}\,PSM = \frac{SA}{SP} \times tang^2\,\tfrac{1}{2}\,PN$. Ex qua æquatione habetur $SP : SA = tang^2\,\tfrac{1}{2}\,PCN : tang^2\,\tfrac{1}{2}\,PSM$, vel vero $\sqrt{SP} : \sqrt{SA} = tang\,\tfrac{1}{2}\,PCN : tang\,\tfrac{1}{2}\,PSM$; hoc eſt: *ut radix quadrata diſtantiæ perihelii ad radicem quadratam diſtantiæ aphelii; ita eſt tangens dimidiæ anomaliæ eccentrici ad tangentem dimidiæ anomaliæ veræ.* Quapropter ex hac analogia reperietur PSM 93° 51′ 47″, ſive 3 3° 51′ 47″, quæ ſi addantur loco perihelii 2ˢ 13° 54′ 32″, habebitur locus Mercurii 5ˢ 17° 46′ 19″ pro die 13 Julii 9h. veſper.

Ut executio hujus calculi commodior evadat, eum ſequentibus regulis adſtringimus.

Regulæ calculi, quo anomalia media ad anomaliam veram in ellipſi reducitur, computando a proximo tranſitu planetæ per perihelium.

I *A logarithmo diſtantiæ apheliæ ſubducatur logarithmus diſtantiæ periheliæ, ut habeatur primus logarithmus conſtans, cui addatur logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ mediæ; ſumma erit logarithmus tangentis arcus addendi ad dimidiam anomaliam mediam, ut obtineatur anomalia eccentrici primo approximata.* In toto hoc primo calculo minuta ſecunda negligi poſſunt.

II *Logarithmo* 5, 3144251 (qui eſt logarithmus radii in gradus converſi 57° 17′ 44″, 8) *addatur logarithmus eccentricitatis planetæ: a ſumma ſubtrahatur logarithmus ſemiaxis majoris; reſiduum erit ſecundus logarithmus conſtans.*

III *Logarithmo ſecundo conſtanti addatur Logarithmus ſinus anomaliæ eccentrici primo approximatæ; ſumma erit logarithmus numeri graduum, minutorum, & ſecundorum addendorum ad anomaliam mediam, ut habeatur anomalia eccentrici ſecundo approximata.*

IV *Logarithmo ſecundo conſtanti addatur logarithmus ſinus anomaliæ eccentrici ſecundo approximatæ; erit ſumma logarithmus numeri graduum, minutorum, ſecundorum, quæ addita ad anomaliam mediam dant anomaliam eccentrici tertio approximatam.*

Idem calculus toties repetendus eſt, quoties opus, adhibita ſemper anomalia eccentrici ultimo approximata, ut bis conſequenter eadem accurate obtineatur; quod dum contingit, illa ipſa erit anomalia

malia eccentrici vera. In calculis planetarum ſyſtematis ſolaris ultra tertio approximatam non venitur.

V *Dimidio logarithmi primi conſtantis addatur logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ veræ eccentrici ; erit ſumma logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ veræ , quæ quæritur.*

Pag. 73 §. 139 *lin.* 2 *adde* : omnibus a perihelio computatis.

Ibid. lin. 3 *loco* perihelii *lege* aphelii.

Ibid. lin. 4 *loco* aphelii *lege* perihelii.

Ibid. lin. 8 *loco* addendum *lege* ſubtrahendum ab anomalia eccentrici.

§. 140 *Problema hoc ſequente ratione mutavit author.*

Problema II. *Datis dimenſionibus ellipſis invenire radium vectorem, ſive diſtantiam* S M (fig. 26 Append.) , *quæ anomaliæ veræ datæ competit.*

Reſolutio I. S M = ſemiax. major $\mp$ eccentricit. × *coſ* anomal. eccentrici.

$$\text{II. } S M = \frac{\text{ſemiax. minor.} \times \textit{ſin} \text{ anomal. eccentrici}}{\textit{ſin} \text{ anomal. veræ.}}$$

$$\text{III. } S M = \frac{\text{diſtant. aphel.} \times \text{diſtant. perihel.}}{\text{diſtant. perihel.} + 2 \text{ eccentric.} \times \textit{coſ}^2 \tfrac{1}{2} \text{ anomal. veræ}}.$$

$$\text{IV. } S M = \frac{\text{diſtant. aphel.} \times \text{diſtant. perihel.}}{\text{ſemiax. major.} \pm \text{eccentricit.} \times \textit{coſ} \text{ anomal. veræ}}.$$

Formula prima nil aliud eſt, quam S M = 1 — C S × *coſ* P N, ut Artic. præced. Reſol. Probl. Kepler. part. altera vidimus.

DEMONSTRATIO formulæ 2^{dæ}. In triangulis I S M, I S N ad I rectangulis ; ſunt latera M I, N I ut tangentes ; & latera S M, S N ut ſecantens angulorum C S M, C S N, ſive eorum complementorum ad duos rectos P S M, P S N. Sunt vero rectæ M I & N I ut C B & C A vel C N (Elem 843) ; itaque ſequentes habentur proportiones C B : C N = *tang* P S M : *tang* P S N ; & in triangulo C N S, C N : S N = ſ P S N : ſ P C N ; item S N : S M = *ſec* P S N : *ſec* P S M. Quare his tribus compoſitis , & prima ratione per C N × S N diviſa , obtinetur C B : S M = *tang* P S M × ſ P S N × *ſec* P S N : *tang* P S N × ſ P C N × *ſec* P S M. Atqui (*Trig.* 35) *ſin* × *ſec* = *tang* ; igitur C B : S M = *tang* P S M × *tang* P S N : *tang* P S N × *ſec* P S M × ſ P C N = *tang* P S M : ſ P C N × *ſec* P S M = $\frac{\textit{tang}\ P S M}{\textit{ſec}\ P S M}$: ſ P C N = ſ P S M : ſ P C N. Quare denique habetur C B : S M = *ſin* P S M : *ſin* P C N. Hæc formula commode adhiberi poteſt, ſi quis tabulam condere velit, quæ logarithmos diſtantiarum Planetæ a Sole exhibeat.

DEMONSTR. 3^{tiæ} & 4^{æ} formulæ. $\frac{1}{2}$ S M + $\frac{1}{2}$ M F = C A : itaque

itaque $\frac{1}{2}$ S M + $\frac{1}{2}$ M F + $\frac{1}{2}$ F S = C A + C S = S A. Jam vero (*Trig.* 111) eſt S F × S M : (S A — S F) × (S A — S M) = 1 : $f^2 \frac{1}{2}$ A S M, vel vero 2 C S × S M : S P × (S A — S M) = 1 : $f^2 \frac{1}{2}$ A S M = 1 : $cof^2 \frac{1}{2}$ P S M (*Trig.* 33 *Append.*) : unde habetur $SM = \frac{SP \times SA}{SP + 2CS \times cof^2 \frac{1}{2} PSM}$. Et quoniam (*Trig.* 39) R ± *cof* = 2 $cof^2 \frac{1}{2}$, fiet 2 C S × $cof^2 \frac{1}{2}$ P S M, aut C S × 2 $cof^2 \frac{1}{2}$ P S M = C S ± C S × *cof* P S M; & proinde S P + 2 C S × $cof^2 \frac{1}{2}$ P S M = S P + C S ± C S × *cof* P S M = C P ± C S × *cof* P S M; denique $SM = \frac{SP \times SA}{CP \pm CS \times cof PSM}$.

Obſerva. *Ex demonſt. formulæ* 2ᵉ *patet*, §. *ſequentem* 141 *omittendum eſſe.*

Pag. 74 §. 142 *lin.* 13 *hujus* §. *lege* ... angulus A S M, adeoque complementum ejus ad duos rectos 99° 2′ 34″ eſt anomalia vera; & hinc anomalia media correſpondens 73° 59′ 30″,5, harumque differentia 24° 3′ 3″,5 æquatio centri quæſita.

Pag. 76 §. 148 *lin.* 2 *lege* anomalia vera 99° 6′ 28″, cui reſpondet media 74° 55′ 59″ (139), hinc maxima &c.

Pag. 77 §. 152 *correctiones in hoc exemplo faciendas, Lector facile intelliget, ſi modo reputet apud animum, anomalias veras non computari ab aphelio* a, *ſed a perihelio* p, *cujus rei exempla jam iſthic dedimus ad* §. 142, & §. 148. *Præterea operæ pretium non cenſuimus poſitiones Mercurii e tabula nova deſumere.*

Pag. 79 §. 156. *Huic Theoremati ſequentia Lemmata præmittantur.*

Lem. I *Si ſuper axe majore ellipſeos* A R (fig. 28 Append.) *deſcribatur circulus, omnia perpendicula* S T *e focis ad tangentem quamvis* T V *demiſſa, terminantur in circuli peripheria.*

DEMONST. Ducatur a puncto T, in quo perpendiculum S T tangenti occurrit, ad centrum ellipſeos T C; erit S T = $\frac{1}{2}$ S K (Elem. 808), & S C = $\frac{1}{2}$ S F. Sunt itaque triangula S T C, S K F ſimilia, & T C parallela & æqualis $\frac{1}{2}$ F K = $\frac{1}{2}$ C A (Elem. 510).

Lem. II *Quadratum ſemiaxis minoris æquale eſt facto e binis perpendiculis, e focis ad eandem tangentem demiſſis*, ſeu C B² = S T × F V.

DEMONST. Si per punctum contactus P ducatur diameter P *p*, & per alterum ejus extremum *p* tangens *t u*, erit ob partes ellipſeos ſymmetricas S *t* = F V, S T = F *u*, ac puncta *t*, *u* erunt in peripheria circuli ſuper diametro A R deſcripti. Itaque (Elem. 566) S T × S *t* = R S × S A, ſive S T × F V = R S × S A = C B² (Elem. 813).

Lem. III *Recta* P D *e quovis puncto ellipſeos* P *per focum* F *tranſiens*, & *intercepta inter* P & *diametrum* N n *ad eam conjugatam, quæ per idem* P *ducitur*,

tur, æqualis est semiaxi majori C A; quod scilicet T C D P sit parallelogrammum, in quo P D = T C = C A (Lem. I).

Lem. IV. *Factum duarum rectarum e quovis puncto* P *perimetri ellipseos ad focos ductarum* P S × P F *æquale est quadrato semidiametri* C N, *ad eam conjugatæ, quæ per* P *transit*; sive $PS \times PF = CN^2$.

DEMONST. Quoniam triangula rectangula S P T, F P V similia sunt, erit ratio S T ad S P eadem cum ratione F V ad F P. Igitur (Elem. 298) $ST \times FV : SP \times PF = ST^2 : SP^2$. Est vero etiam $ST + FV (= Tt) : SP + PF (= AR) = ST : SP$; & (Elem. 863) $TI : CA = CB : CN = ST : SP$; igitur $CB^2 : CN^2 = ST^2 : SP^2 = ST \times FV : SP \times PF$. Atqui (Lem. II) $ST \times FV = CB^2$; quare etiam $SP \times PF = CN^2$.

COROLL. Ex analogia $CB : CN = ST : SP$ habetur $ST = \frac{SP \times CB}{CN}$.

Pag. 81 §. 163 *Demonstrationi a lin. 6 hujus* §[i] *sequens brevior substituatur.*

Etenim si in formula generali $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$ substituatur pro S T ejus valor $\frac{CB \times SP}{CN}$ (Cor. Lem. IV), & pro P G radio curvaturæ $\frac{CN^3}{CA \times CB}$ (Elem. 886), habebitur formula generalis pro sectionibus conicis, in quibus vis centralis tendit ad focum S, nempe $f = \frac{SP \times CN^3 \times CA \times CB}{SP^3 \times CB^3 \times 2CN^3}$, & facta reductione, $f = \frac{CA}{SP^2 \times CB^2 \times 2} = \frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$; & omissis constantibus C A, 2 C B, $f = \frac{1}{SP^2}$.

Pag. 82 §. 165. *Huic theoremati præmittit Author sequens.*

THEOR. *Vis tangentialis, quæ una cum centrali facit, ut corpus describat sectionem conicam, est in quovis sectionis puncto minor, æqualis, vel major ea vi, quam acquisivisset corpus motu rectilineo, & uniformiter accelerato cadendo inde usque ad focum, in quo residet vis centralis, prout sectio fuerit ellipsis, parabola, vel hyperbola.* (fig. 35. Append.).

DEMONST. Arcus exiguus P p describitur a corpore P tempusculo t per vim centralem, qua per P I motu uniformiter accelerato moveretur interea, dum eodem tempore t ferretur motu æquabili vi tangentiali per P F. Ut jam vis centralis in P rite exprimatur, sit P K altitudo, per quam tempore T corpus P versus S motu uni-

 formi-

formiter accelerato per gravitatem g æqualem illi, quam in telluris ſuperficie experimur, cadendo acquireret in fine hujus temporis celeritatem æqualem illi, quam vis tangentialis efficit in corpore P, ut tempuſculo t percurrat uniformiter P F. Evidens eſt, fore 2 P K ſpatium tempore T eadem celeritate percurrendum, qua P F tempuſculo t, ut adeo ſit $PF : 2PK = t : T$.

Quoniam vero vires centrales variabiles ſunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro virium, ſit d diſtantia, quam ab S corpus P habere deberet, ut ejus vis centralis eſſet $= g$; erit itaque vis centralis in P, qua corpus actu urgetur, ad vim, ſive gravitatem g, ut dd ad SP^2, & hinc exprimetur vis centralis in puncto P per $\frac{ddg}{SP^2}$.

Porro dum tempuſcula exigua ſunt, vires centrales conſtantes cenſeri debent (156): eritque ſpatium P I vi $\frac{ddg}{SP^2}$ tempuſculo t deſcribendum, ad ſpatium P K tempore T vi acceleratrice conſtante g percurrendum, ut vires eædem ductæ in quadrata temporum, ſeu in quadrata P F & 2 P K. Unde habetur $PI : PK = \frac{ddg \times PF^2}{SP^2} : g \times 4PK^2$, & $PI = \frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK}$.

Jam vero eſt (Elem. 861) $pi^2 : Pi \times (iC + CP)$ ſeu $Pi \times 2PC = CN^2 : PC^2$, adeoque $Pi \times 2CN^2 = pi^2 \times PC$, & $Pi : pi = pi \times PC : 2CN^2$. Sed quia pi eſt quantitas infinite parva, etiam $pi \times PC$ reſpectu $2CN^2$ infinite parvum eſt, & hinc quoque Pi reſpectu pi, cenſerique poterit comparate ad pi punctum i congruere cum puncto P, & propterea $PF = pi$: quod ſi ſubſtituatur, erit $Pi \times 2CN^2 = PC \times PF^2$, & $Pi = \frac{PC \times PF^2}{2CN^2}$. His poſitis triangula ſimilia PIi, P D C hanc præbent analogiam: $PC : PD$ (vel CA) $= Pi$ $\left(\text{vel} \frac{PC \times PF^2}{2CN^2}\right) : PI$, ex qua eſt $PI = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$. Comparato jam utroque valore de P I, habetur æquatio $\frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK} = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$, quæ reducitur ad $\frac{dd}{SP^2} \times CN^2 = 2CA \times PK$, ſive $= PS \times PR \times \frac{dd}{SP^2}$ (Lem. IV), aut $PR \times \frac{dd}{SP} = 2CA \times PK$, vel denique $= AB \times PK$.

Finga-

Fingamus jam esse P H altitudinem, ex qua motu uniformiter accelerato, & vi acceleratrice constante g cadendo corpus acquireret eandem celeritatem, quam acquireret in S cadendo motu uniformiter accelerato per P S, & vi acceleratrice constante, illique æquali, qua reipsa in puncto P suæ orbitæ A P B urgetur. Quoniam P H & P S sunt spatia, quibus percursis eadem celeritas acquiritur, ea debent esse in ratione inversa virium acceleratricium (60 Append.), sive $PH : PS = \frac{ddg}{SP^2} : g$, consequenter $PH = \frac{dd}{SP}$. Quare si hic valor de $\frac{dd}{SP}$ substituatur in priore æquatione, habebitur $PH \times PR = AB \times PK$, seu $PK : PH = PR : AB$. Est autem in ellipsi P R minor quam A B; in parabola, cum utraque fiat infinita, censendæ sunt æquales; in hyperbola si accipiatur distantia alicujus puncti a foco pertinente ad hyperbolam oppositam, ea major est axe principali. Igitur P K minor, æqualis, aut major est, quam P H, prout curva A P B fuerit ellipsis, parabola, vel hyperbola: ideoque etiam 2 P K, quæ exprimit celeritatem tangentialem, minor, æqualis, vel major est, quam 2 P H, qua designatur celeritas uniformis acquisita lapsu uniformiter accelerato ex P in S, prout Planeta ellipsin, parabolam, aut hyperbolam circa punctum S describit.

COROLL. I Expressio generalis celeritatis tangentialis est $\frac{2PH \times PR}{AB} = \frac{PH \times PR}{CA}$.

COROLL. II. Si corpus P moveretur in circulo vi centrali tendente ad centrum S (quod tum cum R congrueret), ob $RP = \frac{1}{2} AB$ in hac hypothesi, fieret $PK = \frac{1}{2} PH$, & $2PK = PH$. Itaque celeritas tangentialis dimidia foret illius, quæ acquiritur in S lapsu uniformiter accelerato per radium P S, agente vi centrali, quam corpus reipsa in P habet.

Pag. 85 §. 174. Loco hujus IV[ti] theorematis novus adjungendus est Articulus.

ARTICULUS XIV

De modificationibus motuum Planetariorum pendentibus a variationibus, quæ accidunt viribus hæc corpora urgentibus.

Quæ adhuc dicta sunt, supponunt, planetam P (fig. 35 Append.) moveri tantummodo duabus viribus singulis momentis mutabilibus

libus, altera tangentiali, quæ planetæ impertitur celeritatem per $2\,PK$, five $\frac{PH \times PR}{CA}$ repræsentatam; altera centrali, quæ eidem tribuit celeritatem expressam per $\frac{CA}{SP^2 \times 2\,CB^2}$. Sed quoniam fieri potest, imo reipsa fit, uti in sequentibus videbimus, ut causæ quædam physicæ exiguam aliquam mutationem in hisce viribus efficiant, ita, ut celeritates inde pendentes haud sint accurate singulis momentis in ratione $\frac{PH \times PR}{CA}$ ad $\frac{CA}{SP^2 \times 2\,CB^2}$, inquirendum nobis isthic est generatim, ecquis effectus inde proveniat. Argumentum hoc, quod in tota Astronomia Physica est maxime intricatum, minutim evolvere haud licet nobis, ideoque adferemus tantummodo principia, ex quibus pendet maxime notabilium inæqualitatum ratio, quæ in cœlestibus corporibus deprehenduntur, & de quibus nobis etiam sermo erit.

THEOREMA I. *Axis major ellipseos* A B (fig. 35 Append.), *quam corpus* P *per ejusmodi vires tangentialem, & centralem describit, quales superiore Articulo reperimus, rite exprimitur hac formula* $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$. Facile enim deducitur ex æquatione $PH \times PR = AB \times PK$, si pro P R substituatur ejus valor $AB - SP$.

COROLL. I. Si duæ vires, quibus animatur corpus P, exiguam quandam mutationem subeant, quæ obsit accuratæ illi rationi, quam inter sese habere debent, ut corpus constanter in eadem ellipsi moveatur, fieri nequit, ut eandem percurrat ellipsin, nisi hæc fingatur tum in positione sua, tum in dimensionibus mutabilis. Cum itaque axis majoris expressio sit $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$, necesse est, ut ejus mutationes illis sint analogæ, quæ quantitatibus P K, P H accidere possunt.

Si exempli gratia contingat, ut quacunque demum causa extranea agente vis tangentialis sola exiguo excessu augeatur, ut P F evadat $PF + 2x$, crescet etiam P K quantitate $+ x$, & valore denominatoris $PH - PK$ imminuto, augebitur valor fractionis $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$, quæ in $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$ abit; e quo sequitur, axem majorem A B prolongandum esse. Ut autem hujus prolongationis quantitas habeatur, subducatur $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$ ex $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$,

obtine-

obtinebitur (Elem. 89) $\frac{PH \times SP \times x}{PH^2 - 2PH \times PK + PK^2 + PH \times x - SP \times x}$; & neglectis in denominatore terminis $PH \times x - SP \times x$ velut infinite parvis respectu aliorum, fiet $\frac{PH \times SP \times x}{(PH - PK)^2}$.

At si fingamus, manente vi tangentiali eadem, solam vim centralem modicam imminutionem pati, ut PH mutetur in $PH - z$, fiet $AB = \frac{(PH - z) \times SP}{PH - z - PK}$, & variatio axis æquabitur differentiæ inter hanc expressionem, & $\frac{PH \times PS}{PH - PK}$, totumque discrimen calculo priori simili reperietur $= \frac{PK \times SP \times z}{(PH - PK)^2}$.

Quod si denique utraque vis simul exigua quantitate data mutetur, juxta priores formulas singillatim calculanda est mutatio longitudinis axis, quæ ex utravis variatione provenit.

COROLL. II. *Tam incrementum accidentale celeritatis tangentialis planetæ, quam decrementum vis centralis, efficit augmentum temporis revolutionis periodicæ.* Sunt enim tempora periodica semper in ratione radicum quadratarum cuborum axium majorum, & utravis variatio auget longitudinem eorundem axium.

THEOREMA II. *Variatio in axe majore ellipseos necessario inducit etiam mutationem in ejus positione, & eccentricitate, modo ponatur, quod trajectoria maneat semper elliptica, & focus, ad quem tendit vis centralis, immotus.*

Etenim manente foco immoto, & trajectoria elliptica, necesse est, angulum SPE (Fig. 35 Append.) a radio vectore SP, & tangente EP comprehensum, manere æqualem angulo FPR, id natura sectionum conicarum exigente (Elem. 807). Si itaque I°. magnitudo axis AB mutata est propter variationem solius vis tangentialis, oportet, ut manente SP constante, ea mutatio accipiatur inde a puncto R in recta RP; ut si axis foret imminutus, accipienda esset RT æqualis illi decremento, essetque tum T locus alterius foci ellipseos, ST dupla eccentricitas, quæ positionem lineæ apsidum determinaret, quæ propterea motum angularem habuisset exhibitum angulo TSR, cujus mensura est arcus TG e centro S descriptus. Porro cum hic arcus TG nil differret a recta ad SR perpendiculari, haberetur *sin. tot.* : TR = *cos* TRG : GR; ideoque GR = TR × *cos* TRG, & variatio eccentricitatis esset ½ TR × *cos* PRS. In eodem triangulo GTR est item *sin tot* : TR = *sin* TRG : TG = TR × *sin* PRS. Jam vero est SG : 57° 17′ 45″ = TG : *ang* GST; quare motus angu-

gularis lineæ apſidum eſſet $\frac{\text{ſin}\, SPR \times TR \times 57^{\circ}\, 17'\, 45''}{SG \text{ vel } RS}$. II°. Si axis mutatio contingat ex variatione ſolius vis centralis, manente vi tangentiali eadem, producatur is quantitate $z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK)^2}$, fiat ut axis integer $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$ ad hoc incrementum, ita eſt SP ad variationem, ſive augmentum radii vectoris Pp, quod invenietur $= z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$. Ducatur pT ad PR parallela (Fig. 34 Append.); per R agatur RO ad PF parallela, & accipiatur $OT = z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK)^2} - 2z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$, ita ut T cadat reſpectu puncti p trans, aut cis punctum O, prout OT fuerit poſitiva aut negativa: erit punctum T alter focus, ST dupla eccentricitas, & angulus RST exprimet motum lineæ apſidum. Etenim cum triangulum Ppi ſit iſoſceles, eſt $Pp = pi$, ideoque $SP + Pp + pi + iO = SP + iO + 2z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$. Eſt autem $SP + iO = AB$; igitur accipienda eſt differentia inter $z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK)^2}$ & $2z \times \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$, ut obtineatur locus, in quem cadit punctum T. Porro etſi ex poſtrema hac conſtructione calculus non adeo expeditus ſit pro variatione eccentricitatis, & motu lineæ apſidum, non tamen adeo magnis premitur difficultatibus, cum in triangulo SpT cognitis lateribus Sp, pT & angulo comprehenſo, qui æqualis eſt angulo SPR, inveniri poſſint ST, & angulus pST, cujus ab angulo PSR differentia dat motum apſidum RST.

Quæ hic de ellipſi dicta ſunt, applicari poſſunt cuivis alteri trajectoriæ, modo debitæ fiant mutationes, quas ejus curvatura, & ſpecies vis centralis exigunt.

SCHOLIUM. Si itaque obſervationes mutationem in ſitu lineæ apſidum, variationem eccentricitatis, aut revolutionis periodicæ prodant, id indicio erit, contigiſſe interea temporis aliquam variationem in lege virium; & ſiquidem mutationes illæ continuæ ſint, & periodicæ, pendebunt ab actionibus, quæ itidem continuo vires afficiunt, & modificant.

Pag. 89 *Lin.* 21 Duo ſolum . . . *usque Lin.* 26 eſt 575 annorum *Sic corrige*: unus tantummodo eſt, cujus reditus certo prædici poſſit, eſt-

eſtque A. 1531, 1607, 1682, & 1759 viſus, ejusque revolutio tempore 76 annorum fere abſolvitur. Alter qui An. 1532 & 1661 comparuit, atque unus, idemque eſſe videtur, ſpes eſt, ut circa An. 1789 redeat Rediiſſe autem &c.

Pag. 96 §. 209. *Reſolutionem hujus problematis exhibet paulo aliter nova editio.*

RESOLUTIO. In formula III §. 140 Append. fiat diſtantia aphelia = ∞, uti & eccentricitas: mutabitur in ſequentem pro radio vectore $= \frac{\textit{Diſtant. Perihel.}}{cof^2 \frac{1}{2} \textit{ anom. ver.}}$

Pag. 98 & 99. *Hanc tabulam rejicit author ad finem* Sect. III, *ubi novam pro correctione addit, ut ſuo loco videbimus.*

Pag. 103 §. 226. *Primum hujus capitis articulum ita mutavit author.*

ARTICULUS I.

De cauſa, & natura rotationis, ſeu revolutionis diurnæ Planetarum.

Quoniam leges Mechanicæ in detegenda cauſa rotationis corporum terreſtrium, quæ ſæpe cum eorum motu progreſſivo conjuncta eſt, uſum habent, iis quoque locus dandus eſt, dum analogia ab his petita de ratione corporum cœleſtium agimus.

Fingamus globum e maſſa ubivis homogenea, ejusdem denſitatis, & figuræ perfecte ſphæricæ, in medio quopiam omnino libero poſitum. Nil vetat, quo minus cogitatione gravitatem inde abſtrahamus, nulla neceſſitate illi conjunctam, atque effectam tantummodo a vi centrali globo indita; at vero haud ita licet inde inertiam ſeparare proportionalem numero molecularum globum conſtituentium, utpote qualitatem cuivis materiæ inhærentem.

THEOREMA I. *Si punctum quodvis* A (Fig. 40 Append.) *extra globi centrum* C, *recipiat quamlibet impreſſionem momentaneam ſecundum quamcunque directionem* KA; *globus illico duplicem acquiret motum uniformem, alterum rotationis circa axem ad planum circuli maximi perpendicularem, in quo ſita eſt directio* KA; *alterum progreſſionis, aut translationis; ita ut centrum globi in eodem plano circuli maximi deſcribat rectam* CB *ad directionem* KA *parallelam.*

DEMONSTR. Cum omnes globi particulæ inter ſe cohæreant, evidens eſt, impreſſionem in punctum A factam ad omnes omnino pertinere moleculas. Utcunque autem hic effectus diſtribuatur, neceſſe eſt, ut quælibet nitatur in recta ad KA parallela progredi, ita,

ut omnes moleculæ in eadem globi chorda ad KA parallela poſitæ æqualem habeant celeritatem, cum, ut recta moveatur ſecundum ſuam propriam directionem, nullum determinatum ſit punctum, cui applicari debeat vis motrix, quandoquidem nullum punctum in ea directione progredi poteſt, quin ſimul reliqua omnia æqualiter progrediantur.

His ita conſtitutis, ſi ducatur per globum chorda K*k* ſecundum directionem KA, & in plano circuli maximi per eandem directionem determinato fiant diametri B*b*, D*d*, altera parallela, altera perpendicularis eidem chordæ, denique concipiatur planum K*k* ad axem D*d* normale, evidenter apparet, quod cum hoc planum ſecet globum in portiones K*dk*, KD*k* inter ſe inæquales tum quod ad maſſam, tum quod ad inertiam, ſive vim reſiſtendi, impreſſio in punctum A facta nequeat ita in utramque portionem diſtribui, ut ſingulæ moleculæ eas componentes acquirant æqualem celeritatem. At ſi fingatur, inertiam portionis KD*k* eſſe totam collectam in H, & inertiam alterius portionis K*dk* in puncto G (ut juxta leges Mechanicæ ſit $DH : aD = 2CB - \frac{3}{4}aD : 3CB - aD$; & $dG : ad = 2CB - \frac{3}{4}ad : 3CB - ad$), tum vero licebit portionem axis HG inſtar vectis conſiderare, in cujus extremis H & G ſint binæ maſſæ circa hypomochlium C in æquilibrio, quod (hypomochlium) ſit punctum, in quo tota inertia omnium molecularum globi ſit unita; ipſa vero impreſſio in punctum A facta ſpectari poterit ut potentia in hunc vectem directione A*a* per punctum æquilibrii C non tranſeunte agens. Porro effectus idem eſſe debet, ac ſi hæc potentia ageret ipſi puncto *a* vectis GH applicata, cum in quocunque puncto rectæ K*k* ſuam vim exerat, celeritatem ſemper eandem efficiat in punctis H, C, G juxta ſingulorum chordas ad K*k* parallelas. Quare impreſſio in punctum A ita concipi poteſt, velut ſi fieret in vectis HG punctum *a* diverſum a puncto æquilibrii C, & propterea e lege Mechanicæ hæc vis nequit eundem motum maſſis H & G communicare, ſed majorem efficiet in ea, in qua eſt minor inertia, & diſtributio motus communicati ejusmodi erit, ut pars obtingens maſſæ, aut puncto H, ſit ad partem, quæ obvenit puncto G, reciproce ut factum ex maſſa H in H *a* (ſive $H \times Ha$) ad maſſam $G \times aG$. Itaque tempuſculo infinite parvo *t* punctum H deſcribet majus ſpatium H*h* directione ad K*k* parallelum, quam ſit ſpatium G*g* itidem directione ad K*k* parallelum. Et hinc poſt tempuſculum *t* vectis HG habebit ſitum *hg*, conſequenter axis D*d* transferetur in E*e*, & totus globus in EI*e*; & quoniam centrum C ſemper eſt in recta jungente puncta H, G, in fine tempuſculi *t* in *c* eſſe debebit. Unde durante hoc tempuſculo Centrum C uniformiter progreſſum eſt in plano circuli maximi

BD

B D*b d* in recta C*c* ad K*k* parallela; punctum autem *h* præcessit, & post se reliquit punctum *g*. Ex quo evidenter consequitur, rectum H G habuisse motum rotationis circa punctum C, & siquidem per *c* ducatur F*f* ad D*d* (quæ fuit positio axis in principio tempusculi *t*) parallela, angulus F*ch* exprimet celeritatem angularem rotationis puncti *h* respectu *c* tempusculo *t*, & angulus æqualis *fc* G celeritatem angularem rotationis puncti *g* respectu ejusdem *c*, eodemque tempore. Apparet denique motu ita sequentibus tempusculis æqualibus continuato, uti primo *t* cœperat, 1mo centrum globi debere semper uniformiter in recta C*b* progredi, ad directionem, qua facta est impressio in punctum A, parallela. 2do motum translationis debere fieri in plano circuli maximi B D*b d*, positione directionis, qua fit impressio, K A determinato. 3^tio^ axem D*d* debere uniformiter rotari in plano eodem B D*bd*, & propter mutuam cohæsionem molecularum globi, easdem itidem omnes debere rotari uniformiter vel in eodem, vel in planis parallelis, sive, quod eodem redit, debere eas rotari circa axem globi ad planum B D*b d* perpendicularem, qui propterea *axis rotationis* appellatur.

COROLL. I. Motus translationis centri C*c* est rectilineus, & simplex; at motus omnium reliquarum molecularum globi est summa vel differentia duorum motuum, quorum alter est uniformis rectilineus, vi cujus pari celeritate singulæ moleculæ percurrant temporibus æqualibus spatia parallela & æqualia illis, quæ percurrit centrum C, cujus motu totus globus abripitur: alter motus est rotationis uniformis, qui singulis moleculis eam tribuit celeritatem, ut percurrant spatia singularum distantiis a centro C proportionalia. Hunc in modum H*h* exhibet motum puncti H tempusculo *t*, estque = C*c* + F*h*; item G*g* exprimit motum puncti G, & est = C*c* — *gf*. Quia vero anguli F*ch*, *fcg* admodum exigui sunt, rectæ F*h*, *gf* accipi possunt pro arcubus eos angulos metientibus. Itaque si stricte loquamur, spatia reipsa a moleculis globi confecta sunt summa vel differentia spatii rectilinei pro omnibus æqualis, & arcus circuli pro omnibus similis.

COROLL. II. Motus rotationis est tantummodo motus relativus ad centrum globi; aut rectius ad axem rotationis, & quisque facile videt, quod *quamdiu nec plus nec minus celeritatis est in aliqua molecula globi, quam sit in illis, quæ sunt in axe rotationis positæ, nec rotatio, nec axis rotationis aliquam mutationem subire possit.*

COROLL. III. *Quanto magis directio, secundum quam impressio fit, a centro globi distat, tanto velocior est motus rotationis.*

COROLL. IV. Si directio impressionis in quodvis globi punctum L transiret per centrum C, evidens sane est, plano B*b* per eam dire-

 ctio-

ctionem ducto, secandum tunc globum in duo hemisphæria æqualia B D b, Bbd, & actionem in L eandem omnino fore, ac si centro C applicaretur, quod esset hypomochlium vectis utrinque æqualibus massis, & ad æqualem distantiam onusti (foret vero hæc distantia ex Mechanica æqualis $\frac{3}{8}$ radii). Vis hæc impressa æqualiter divideretur per totum vectem, & consequenter per utrumque hemisphærium, quorum moleculæ omnes æquali celeritate niterentur progredi in parallelis ad L C. Quare tunc nulla esset rotatio, & globi centrum moveretur uniformiter in directione impressionis Cb.

SCHOLIUM. Proclive est, ut cogitemus, impressionis directionem, cum Planetæ primitus in iis spatiis projicerentur, ad quæ solis actio sese extendit, non transiisse per horum corporum centra. Et Joannes Bernoullius (Tom. IV Operum, pag. 283) inito calculo reperit, distantiam hujus directionis a centro Telluris æqualem $\frac{1}{150}$ ejusdem semidiametri. Consimili ratione in Marte a centro intervallo $\frac{1}{418}$ semidiametri hujus planetæ eam transivisse invenit, uti & in Jove $\frac{7}{19}$. Et quamvis corpora terrestria directione per eorum centrum transeunte percussa sæpe motum rotationis acquirant; fit tamen id seu ex affrictu eorum superficiei asperæ cum scabris partibus superficiei illius, in qua progrediuntur, quæ si abfuissent, motum tantummodo translationis habuissent; seu ex incursu partium in eorum superficie ceteris magis eminentium in particulas medii resistentis, in quo eorum motus peragitur. Nec veri speciem habet, rotationem Planetarum ex simili affrictu, aut impactu oriri, utpote qui suas orbitas describunt in medio nullam prorsus resistentiam, quæ sensu percipi posset, objiciente.

THEOREMA II. *Si in globi motu rotationis, & progressionis aut translationis præditi quamvis particulam fiat impressio nova per centrum transeunte directione, ejus motus translationis tantummodo accelerari, retardari, vel extingui potest, quin motus rotationis, aut positio axis rotationis, quidquam mutationis patiatur.*

DEMONSTR. Impressio, cujus directio per centrum transit, nequit moleculis globi inæqualem celeritatem impertiri, sed id tantummodo efficere potest (THEOR. I), ut omnes æqualiter nitantur in parallelis ad impressionis directionem progredi. Jam vero hæc vis de novo moleculis communicata, cum componatur cum priore, resultante e duplice earum tendentia, quæque in singulis itidem æqualis erat, ac secundum parallelas ad primæ impressionis directionem agebat, nil aliud præstare potest, quam ut enascatur inde velocitas major, minor, aut nulla, ita, ut ex hac motuum compositione in nulla particula major oriatur celeritas, quam in altera, nec rotatio, aut axis rotationis, sed motus tantummodo translationis afficiatur.

SCHO-

SCHOLIUM. Liceret quidem, hanc theoriam ad hypotheſes magis complicatas transferre, ut cum ſimul plures diverſæ impreſſiones in diverſa puncta extra centrum fiunt; ſed quoniam hæ in Aſtronomia elementari locum non habent, ſatis fuerit animadvertiſſe 1mo, eadem, quæ adhuc diximus, conſimili ratiocinio convenire in globum, qui non ſit ubivis æque denſus, ſed ſtratis concentricis diverſæ denſitatis conſtet; aut vero cujus figura non ſit accurate ſphærica, ſed ſphæroidea, genita revolutione curvæ ſymmetricæ circa alterutrum axem, qualis eſt ellipſis, modo ponatur, directionem impreſſionis eſſe in plano axium, & ad eorum alterutrum parallelam. 2do Motum rotationis in ſphæris accuratis, aut ſphæroidibus ſymmetricis, nihil penitus mutari quavis variatione virium in eorum centra agentium, ut proinde *effectus variationum virium centralium in Planetis in eo tantummodo conſiſtat, quod deſcribant trajectorias curvilineas inæqualibus celeritatibus, manente eorum revolutione diurna prorſus uniformi.* 3^tio^ quando plana, in quibus agunt vires centrales, non ſunt ad axem rotationis corporum ſphæroidicorum perpendicularia, poſitionem axis eorum rotationis reddi quibuſdam variationibus obnoxiam, cujus rei exemplum adferemus, quando de Theoria Lunæ agendum erit.

Pag. 108 *Lin.* 2 *a S b*, *lege p S b.* Item *Lin.* 3 A S B, *lege* P S B.

Pag. 123 §. 311. *In fine hujus* §. *adde :* Et alias jam conſtat de cauſa phyſica, quacum hic effectus neceſſario conjungitur, ſciturque eum pendere ab actionibus planetarum, maxime Jovis, & Veneris, in tellurem. Vid. Monum. Acad. Berolin. ad An. 1754 pag. 296.

Pag. 126 §§. 320 & 321. *Utrumque hunc* §. *ſic muta.*

Itaque menſura differentiæ temporis veri & medii, eſt differentia ad tempus reducta inter ſummam motuum diurnorum ſolis in aſcenſionem rectam, & ſummam 59′ 8″ toties acceptorum, quot dies interceſſerunt, ſive, quod eodem redit, inter aſcenſionem rectam veram, quam ſol actu habet, & aſcenſionem rectam mediam pro dato tempore ei competentem (quæ quidem æqualis eſt longitudini ſolis mediæ, cum 360 gradus aſcenſionis rectæ mediæ eodem temporis periodici intervallo deſcribantur, quo 360 gradus longitudinis mediæ). Ex quo conſequitur, *tempus verum æquale eſſe tempori medio, dum aſcenſio recta vera ſolis æqualis eſt ejus longitudini mediæ*, id, quod quater contingit per anni decurſum, ſcilicet circa 14 Aprilis, 15 Junii, 30 Auguſti, & 23 Decembris: hoc eſt, ſi ope calculi e tabulis Aſtronomicis reperiatur pro 6 h. 18′ 24″ eadem longitudo media ſolis cum ejus aſcenſione recta vera, erit 6 h. 18′ 24″ ſeu tempus verum, ſeu tempus medium ſumas. Sed quoniam poſt hoc tempus illico aſcenſio recta vera incipit diſcrepare a longitudine media, tempus verum ſimul in-

incipit differre a tempore medio. Hoc discrimen in dies accrescere pergit, donec differentia inter ascensionem rectam veram, & longitudinem augeri desinat, rursusque incipiat minui: & tunc quidem tempus verum maxime discrepat a medio, postea ad hoc propius accessurum. Evenit hoc circa diem 11 Februarii, quo tempus verum a medio 14′ 40″ exceditur; item circa 14 Maii, quando tempus medium 4′ 2″ brevius est vero; pariter circa 26 Julii, cum verum a medio deficit 5′ 58″; uti & circa 1 Novembris, quando medium exceditur a tempore vero 16′ 8″. At enim his ipsis diebus longitudo diei veræ eadem est cum longitudine diei mediæ, cum tunc, differentia inter ascensionem rectam veram, & longitudinem solis mediam nec crescente amplius, nec etiam decrescente jam, motus diurnus in ascensionem rectam verus sit 59′ 8″. Quare *dies verus non est æqualis diei medio, nisi quando tempus verum maxime differt a tempore medio.*

Pag. 128 *Lin.* 11: hinc angulus T P S, *lege* hinc dimidius angulus T P S,

Pag. 129 §. 330. *Huic* §. *adde sequentia.*

Hujus methodi principia eadem sunt, ac illius, qua per altitudines correspondentes reperitur momentum transitus alicujus sideris per meridianum. Unde usum etiam habere potest in inveniendo transitu solis per colurum solstitiorum, imo & colurum æquinoctiorum, si modo etiam observetur differentia ascensionum rectarum solis, & stellæ ejusdem circa tempus solstitiale, aut æquinoctiale.

Exemplum. Quoniam, dum sol utrinque æqualiter a solstitio aberat, differentiæ ascensionum rectarum solis & lucidæ Lyræ erant 104° 2′ 31″ & 241° 43′ 26″, harum dimidium (sive semisumma) 172° 52′ 58″$\frac{1}{2}$ necesse est, ut sit differentia earundem ascensionum rectarum momento solstitii. Jam vero die 19 Junii 1749 in meridie differentiam ascensionum rectarum solis, & lucidæ Lyræ observavi 170° 53′ 10″$\frac{1}{2}$, itaque tum soli adhuc conficienda restabant 1° 59′ 48″ in ascensionem rectam, ut ad punctum solstitiale pertingeret. Et ex tabulis Astronomicis motus diurnus Solis in ascensionem rectam circa 19, 20, & 21 Junii est 1° 2′ 23″; tempore 46 h. 5′$\frac{1}{3}$ itaque opus fuit, ut in ascensionem rectam conficeret 1° 59′ 48″. Quare solstitium contigit die 20 Junii 22 h. 5′ 20″. In hoc & sequentibus calculis, qui explicandæ tantummodo methodi gratia instituuntur, negliguntur nonnullæ exiguæ correctiones in observationibus faciendæ, tum ratione motus apparentis & perparvi in fixis, tum ratione perturbationum solis, de quibus in sequentibus erit agendi locus.

Consimili ratione subtractis 21° 9′ 23″, 5 ex 104° 2′ 31″, remanent 82° 53′ 7″, 5 pro differentia ascensionum rectarum solis & lu-

lucidæ Lyræ momento æquinoctii præcedentis diem 12 Aprilis. Atqui die 21 Martii in meridie reperta fuit hæc differentia 83° 49′ 18″, 8. Itaque ſol jam ultra punctum æquinoctiale tunc confecerat in aſcenſione recta 56′ 11″, 3. Et quoniam ex ſolis theoria motus ejus in aſcenſionem rectam diurnus diebus 20, & 21 Martii tantummodo eſt 54′ 32″, ſequitur æquinoctium 24 h. 44′ citius contigiſſe, ac proinde 19 Martii 23 h. 16′.

Pag. 137 §. 365. *Hujus Corollarii primas tres lineas ſic lege*: Quo recta ab oculo ad objectum ducta magis accedit ad ſitum perpendicularem reſpectu plani orbitæ veræ oculi, eo projectio orbitæ opticæ videtur magis dilatari, & ad circulum propius accedere; ita &c.

Pag. 156 §. 424. *lin.* 2, hora 10½, *lege* 10 hora 23′ 37″
Ibid. lin. 4 zenith 25° 2′ *lege* zenith 25° 0′
26″, 7 ſeptentrionalior *lege* 1′ 25″, 8 Auſtralior
Pag. 157 *lin.* 3. 6″, 6 *lege* 1′ 57″, 7
lin. 5 ſumma 33″, 3 *lege* differentia 31″, 9
lin. 6 25° 2′ eſt 4231; Quare eorum ſumma 13518 *lege* 25° 0′ eſt 4226; Quare eorum ſumma 13513
lin. 7 ut 33″, 3 ad 24″, 64 *lege* ut 31″, 9 ad 23″, 6

Pag. 157 §. 425. *Hunc* §. *ſic muta.* In quocunque hemiſphærio conſtituti ſint obſervatores, modo radius e centro Telluris ad ſidus ductus inter eorum Zenith cadat, ſemper analogia ſuperius indicata locum habet; at ſi hic radius non tranſiret inter obſervatorum Zenith, differentia ſinuum diſtantiarum apparentium a Zenith loco eorum ſummæ adhibenda eſſet.

Pag. 157 §. 426. *Adde huic* §: Exemplum. Die 25 Octobris 1751 0 h. 31′ 44″ veſp. in eadem urbe Capitis Bonæ Spei obſervatus a me fuit limbus ſeptentrionalis veneris 7′ 26″, 2 auſtralior parallelo ſtellæ *b* ♒, cum per meridianum tranſiret in diſtantia 12° 21′ a Zenith. Eodem die a Bradleyo Greenwicii in Anglia idem limbus deprehenſus fuit dicto parallelo ſtellæ *b* ♒ auſtralior 7′ 15″, ſeu (habita ratione refractionis, de qua Cap. ſequente, & longitudinis tuborum) 7′ 15″, 3, cum venus in meridiano a Zenith 73° diſtaret. Obſervaverat præterea Bradleyus, Venerem poſt 23 h. 54′ ad meridianum redeuntem fuiſſe ſeptentrionaliorem 17′ 21″, 5 aut ſi refractio attendatur, 17′ 25″. His poſitis cum Meridianus Greenwicenſis ſit 18° occidentalior eo, qui per Caput Bonæ Spei tranſit, Greenwicii una hora, 14′ minus numeratur, quam in Capite Bonæ Spei, ideoque Obſervatio prima Bradley 1 h. 14′ tardius facta eſt, quam mea. Ut itaque reducatur utraque ad idem tempus, fiat, ut 23 h. 54′ ad 1 h. 14′, ita ſunt 17′ 25″ ad 53″, 9, addenda ad 7′ 15″, 3,

ut habeatur diſtantia limbi veneris a parallelo ſtellæ in meridiano Greenwicenſi eo momento, quo mea obſervatio in Capite Bonæ Spei facta eſt, nempe 8′ 9″,2. Jam differentia inter 8′ 9″,2, & 7′ 26″,2 eſt 43″,0; unde erit 11699 (ſumma ſinuum 12° 21′, & 73°) ad 10000 (ſinum totum), ut 43″,0 ad 36″,8 parallaxin horizontalem Veneris pro die 24 Octob. 1751. 23 h. 27′ tempore vero ad Meridianum Pariſinum.

Pag. 157 §. 427. *lin.* 1 24″,64 die 6 *lege* 23″, 6 die 5
lin. 3 *pro* 8371¼ *lege* 8740
lin. 11 6 Octob. 1751 hor. 10½ *lege* 5 Octob. 1751 10 h. 33″ 37″
lin. 13 4354 *lege* 4327
lin. 14 8371½ *lege* 8740
lin. 15 38460 *lege* 40398.

His adde ſequentia. Simili calculo parallaxeos horizontalis Veneris, reperitur hujus Planetæ diſtantia a tellure 5605 ſemidiametrorum terreſtrium pro 24 Octob. 23 h. 27′ temp. ver. Eſt autem ex Tabulis Aſtronomicis pro eodem tempore diſtantia veneris a terra partium 2776, quales ſcala communis continet 20000; igitur magnitudo abſoluta hujus ſcalæ invenitur 40382 ſemidiametrorum terræ; & accepto inter utramque hanc determinationem medio, ſupponi poteſt magnitudo ſcalæ vera 40390 ſemidiametrorum terreſtrium.

Pag. 158 §. 429 *lin.* 3 *&* 4 *loco* 19230 *lege* 20195
lin. 6 *&* 9 *loco* 10″, 72 *lege* 10″, 21.
lin. 9. *loco* 90 *lege* 94
lin. 10 *loco* 8053 *lege* 8860
lin. 11 *loco* 722700^es^ *lege* 834000^es^.

Pag 160 §. 434. *Poſt hunc* § *adde.* COROLL. *Manente eadem declinatione ſideris, ejus parallaxis nequit mutare tempus, quo indiget, ut ejus diameter per quemvis circulum horarium tranſeat.* Etenim ſi id tempus mutaretur, hæc mutatio ex eo tantum penderet, quod extremum diametri orientale in appulſu ad circulum horarium haberet majorem vel minorem parallaxin in aſcenſionem rectam, quam habeat extremum occidentale per illum horarium jam transgreſſum. Jam vero evidens eſt, in ipſo appulſu ad horarium utrumvis extremum diametri habere eandem apparentem diſtantiam a meridiano; itaque ſi non mutetur declinatio ſideris, formula ſuperius expoſita exhibebit eandem parallaxin in aſcenſionem rectam pro utrovis extremo, & conſequenter nulla erit mutatio in duratione tranſitus totius diametri.

metri. Equidem si quis sideris diametrum a limbo orientali ad limbum occidentalem quovis demum instrumento metiatur, aliquantum mutata apparebit ratione parallaxeos; sed enim eo momento, quo hæc mensura accipitur, extrema diametri non habent eandem distantiam a meridiano, quemadmodum id contingit, si metiamur diametrum per tempus transitus per horarium.

Methodus calculandi parallaxin, quando ratio habenda est Figuræ Telluris ad polos depressæ.

Quando parallaxis horizontalis sideris plurium minutorum est (id, quod in Luna tantum locum habet) ut nihil accurationis in calculis desideretur, etiam figuræ telluris ratio habenda est, quæ, cum aliquantum a sphærica aberret, & proxime elliptica sit (519) efficit, ut linea verticalis observatoris non transeat per centrum terræ, nisi is in æquatore illius, aut polis sit constitutus. Patebit hoc consideranti, in ellipsi PEMQ (Fig. 77 Append.) normalem OI, & semidiametrum OC ex eodem puncto O ductas eo majorem comprehendere angulum, eoque magis alteram ab altera recedere, quo ellipsis magis a circulo differt, quoque punctum O longius ab extremis axium P, Q distat. Jam vero normalis OI non modo lineam verticalem observatoris OZ, sed etiam situm omnium planorum verticalium determinat, quorum proinde nullum, præter planum meridiani, per centrum C transire potest. Quare ope formularum superius traditarum loca apparentia Lunæ haud quaquam ad ea reducuntur, quæ e centro tellulis C viderentur. Equidem discrimen perexiguum est, ejusque quantitas maxime dependet ab hypothesi, quam quisque de Telluris figura adoptat. Unde neque ejus ratio habenda est, nisi in calculis, qui summam accurationem exposcunt, quales illi sunt, quibus ex occultationibus stellarum per lunam longitudines determinantur. Neque licet nobis id genus calculos parallaxeon diffuse, & minutim discutere; sed satis fuerit methodum simplicissimam indicasse.

Posito igitur, tellurem esse solidum revolutione alicujus curvæ ovalis PEMQ circa axem minorem PM genitum, erit radius terræ e centro C ad polum P ductus CP; CQ vero radius æquatoris. Et quoniam verticalis ZI per Zenith observatoris, & ejus locum O ducta cum normali OI congruit, occurret axi in K ita, ut punctum K, ad quod tendunt omnia perpendicula, videatur esse centrum Terræ respectu observatoris. Quod si itaque, datis proprietatibus curvæ PEMQ, & dimensionibus terræ, fiat

CP = 1, & calculetur magnitudo linearum OK, & CK pro latitudine quacunque data (quam metitur angulus OIQ); si præterea sciatur parallaxis horizontalis lunæ p respectu observatoris in polo constituti, quæ propterea respondet radio telluris CP; ex unica proportione invenietur parallaxis horizontalis, competens radio KO. His positis sit Luna in L; si formulis superius traditis, & accepta parallaxi horizontali $p \times KO$, methodo præscripta utamur, omnia loca lunæ visa ex O reducentur exacte ad loca visa e puncto K, & vicissim, cum triangulum parallacticum OKL sit in vero plano verticali respectu observatoris: sed quoniam loca lunæ ex O observata ad punctum C referri debent, en correctiones adhibendas locis ad K reductis, ut habeantur loca ex C visa.

Pro ascensione recta, & declinatione. Ascensio recta juxta formulam N. 434 (in qua parallaxis horizontalis $p \times KO$ adhibenda) reducta, nulla opus habet correctione. Nam ducta CL manifestum est, reductionem a puncto K ad punctum C pendere A parvo triangulo CKL. Jam vero planum hujus trianguli determinatur positione per rectam CK, quæ est portio axis æquatoris; itaque planum illius est idem cum plano circuli horarii, in quo est sidus L, oculus K, & centrum C, consequenter correctio, sive angulus CLK, afficit tantummodo declinationem lunæ e puncto K visam. Est autem in triangulo CLK, CL, sive (414) $\frac{1}{p}$: *sin*PKL (aut *cos declin. veræ Lunæ*) = CK : CLK; itaque formula correctionis adhibendæ declinationi est $= p \times CK \times$ *cos. declin. veræ Lunæ*. Est hæc correctio subtractiva, quando declinatio est ejusdem nominis cum latitudine loci observatoris, additiva, quando utriusque est contraria denominatio.

Pro longitudine, & latitudine. Sit (in fig. 78 Append.) P polus æquatoris, Z polus eclipticæ, m locus lunæ reductus juxta formulas N. 434 ad eum, qui e puncto K fig. 77 videretur, adhibita in formulis parallaxi $p \times OK$ pro horizontali Evidens est, per correctiones faciendas in longitudine & latitudine lunæ, ut ex loco m viso e puncto K reductio fiat ad locum M visum ex C, punctum m in idem M mutari debere, in quod mutatur per correctiones ascensionis rectæ, & declinationis; atqui harum correctiones tantummodo afficiunt declinationem; igitur punctum M in circulum declinationis Pm cadere debet. Quare formulæ correctionum inveniri poterunt ex formulis differentialibus Trigonometriæ sphæricæ. Et hinc in triangulo ZPm, in quo ZP, & ZPm sunt quantitates constantes, & variatio, sive differentiale Mm est $= p \times CK \times$ *cos. declin. veræ Lunæ*, habebitur formula correctionis longitudinis (Trigon. 179)

$$= \frac{p \times CK \times \textit{cos. long. veræ Lun.} \times \textit{sin. Obliq. Eclipt.}}{\textit{cos. Latit. veræ Lunæ}},$$ quæ reduci pot-

est

eſt ad hanc $= p \times CK \times$ *coſ. long. ver. Lun.* $\times$ *ſin. Obliq. Eclipt.*, quin in calculum redundet error $\frac{1}{20}$ minuti ſecundi. Eſt hæc correctio additiva, luna verſante in ſignis ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐; ſubtractiva in reliquis. Supponitur nihilominus obſervator conſtitutus in hemiſphærio Telluris Boreali; quod ſi is latitudinem loci Auſtralem haberet, contraria ſigna adhibenda eſſent.

Quod ad correctionem latitudinis, plures formulæ deduci poſſunt (Trigon. 177), atque inter alias duæ ſequentes, $= p \times CK \times$ *coſ. declin. veræ Lunæ* $\times$ *coſ. anguli ad Lunam inter circulos latitudinis & declinationis.* Et $= p \times CK \times \frac{\textit{coſ. Oblig. Eclipt.}}{\textit{coſ. latitud. veræ Lunæ}} - p \times CK \times$ *ſin. declin. veræ Lunæ* $\times$ *tang. latitud. veræ Lunæ.* Apparet autem, in poſtrema formula terminum ſecundum debere eſſe admodum exiguum, eamque propterea citra periculum erroris integri ſecundi ſemper poſſe reduci ad hanc $= p \times CK \times$ *coſ. obliq. eclipt.* Correctio hæc reſpectu obſervatoris Borealis eſt additiva ad latitudinem lunæ Auſtralem, ſed ſubtractriva a latitudine lunæ Boreali: ſi obſervator ſit in parte Auſtrali, ſigna mutanda ſunt.

Pro altitudine, & azimutho. Quod ſi in iis, quæ paullo ante diximus, loco *longitudinis* & *latitudinis* voces *azimuthum*, & *altitudo* ſubſtituantur, & (fig. 78 Append.) Z ſumatur pro Zenith, eodem modo patebit, correctiones azimutho, & altitudini adhibendas deduci ex ſola correctione declinationis M*m*, reperienturque ſequentes formulæ. Pro Azimutho $= \frac{p \times KC \times \textit{ſin. Azim. Lunæ} \times \textit{coſ. alt. poli}}{\textit{coſ. alt. veræ Lunæ}}$. Hæc correctio eſt ſubtractiva ab azimutho a puncto interſectionis Meridiani cum horizonte, quod reſpicit meridiem, usque ad interſectionem verticalis primarii cum horizonte; & additiva ad azimuthum ab interſectione meridiani cum horizonte, quæ reſpicit mediam noctem, usque ad interſectionem verticalis primarii cum horizonte. Pro correctione altitudinis, hæ duæ formulæ habentur, $= p \times CK \times$ *coſ. declin. veræ Lunæ* $\times$ *coſ. anguli ad lunam inter verticalem, & circulum declinationis.* Et $= p \times CK \times \frac{\textit{ſin. altit. poli}}{\textit{coſ. altit. veræ Lun.}} - p \times CK \times$ *ſin. declin. veræ Lun.* $\times$ *tang. altit. veræ lunæ.* Hæc correctio eſt ſubtractiva ex altitudine jam ad eam reducta, quæ videretur ex puncto K.

OBSERVA. Ceterum id incommodi habent calculi tam minuti, e quo determinatio redditur incerta, quod variæ hypotheſes dimenſionum figuræ Telluris e menſurationibus inſtitutis deductæ varios quoque præbeant valores linearum OK & CK. In uſu ſupponi poteſt terra ſphæroides ellipticum, in quo diameter æquatoris excedit axem

axem per polos tranfeuntem $\frac{1}{215}$ parte. In hac hypothefi pro altitudine poli 48° 51′ 29″ (fit fiat CP = 1) reperietur OK = 1,00730, & CK = 0, 00704. Si itaque *p* parallaxis horizontalis polaris, foret 57′ 20″, effet $p \times OK$ = 57′ 45″, 1 & $p \times CK$ = 24″, 21. Ut autem inveniantur OK, & CK pro aliis poli altitudinibus, confuli poteft *Difcours de M. de Maupertuis fur la parallaxe de la lune. Paris* 1741. *pag.* 21, *& fuiv.* (*)

Pag.

(*) In tironum gratiam e diverfis methodis accurrate inveniendi rectas OK, & CK in ellipfi, cujus axes dantur, fequentem ex ipfius Clariffimi Auctoris epiftola fubjungo. Sit (Fig. 79 Append.) O locus obfervatoris in Ellipfi, normalis OG ad axem usque producta fit OK; e puncto C agatur CD parallela ad OK; erit punctum D locus obfervatoris in terra fphærica fub eadem latitudine, ac punctum O in elliptoide, quoniam latitudines angulis verticalium OG cum plano æquatoris CQ determinantur. Jam vero fupputatis a centro abfciffis ellipfeos, eft ordinata $OT = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$ Elem. 892) & fubnormalis $GT = \frac{bbx}{aa}$ (Elem. 846). In triangulo rectangulo GOT eft $GT : OT = R : \text{tang } OGT = \frac{OT}{GT} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}}{bbx} = \sqrt{\frac{b}{a}}(aa - xx) \times \frac{aa}{bbx} = \frac{a\sqrt{(aa - xx)}}{bx}$. Eft ergo tang OGT, feu $\frac{\text{f } OGT}{\text{cof } OGT} = \frac{a\sqrt{aa - xx}}{bx}$, unde facile colligitur

$$x = \frac{aa \times \text{cof } OGT}{\sqrt{(bb \times \text{f}^2\, OGT + aa \times \text{cof}^2\, OGT)}} = \frac{CQ^2 \times \text{cof lat.}}{\sqrt{(CP^2 \times \text{f}^2 \text{ lat.} + CQ^2 \text{cof}^2 \text{ lat.})}}.$$

Jam vero $GT\left(= \frac{bbx}{aa}\right)$ fit $= \frac{CP^2 \times \text{cof lat}}{V}$, fi brevitatis gratia ponatur $\sqrt{(CP^2 \times \text{f}^2 \text{ lat} + CQ^2 \times \text{cof}^2 \text{ lat})} = V$. Porro $CR : DR = GT : OT = \frac{CP^2 \times \text{f lat}}{V}$. Item CR (feu cof lat) : R (= 1) = $GT : OG = \frac{CP^2}{V}$. $CT -$

$$GT = CG = \frac{(CQ^2 - CP^2)}{V} \times \text{cof lat.}$$

$$CR \text{ (feu cof. lat)} : DR \text{ (feu fin lat)} = CG : CK = \frac{(CQ^2 - CP^2) \text{ fin lat.}}{V}$$

$$CR \text{ (feu cof lat)} : R\ (= 1) = CG : KG = \frac{(CQ^2 - CP^2)}{V}.$$ Denique

$$KO = KG + OG = \frac{CQ^2}{V}.$$

Adhibitis igitur quibuslibet numeris pro CQ & CP, invenientur CT, GT, OT, OG &c in eadem numerorum fcala; qui numeri fi ad modulum CP = 1 redigendi funt, fiat, ut CP ad 1, ita numerus inventus ad numerum quæfitum, feu numerus inventus dividatur per CP. Ita Auctor.

Pag. 163 §. 447. *Loco hujus* §. *sequentia insere.* OBSERVA I. Animadversum est, quod, præterquam in magna horizontis vicinia (ubi vapores, aliæque causæ accidentales, & loco cuivis peculiares, lucis radios terræ superficiem fere radentes, sine certa lege, atque inæqualiter inflectunt) refractio crescat $\frac{1}{27}$ quantitatis suæ mediæ parte, quando in barometro Mercurius uno pollice altior est, & liquor in thermometro Reaumuriano 10 gradibus deprimitur. Secundum hanc animadversionem corrigi potest refractio media, atque ad eam reduci, quæ præsenti atmosphæræ constitutioni, ope horum duornm instrumentorum cognitæ, competit.

II. Collatis inter se refractionibus ab Astronomis accuratissime definitis, notatum est præterea, eas, cum siderum altitudo 30 gradus excedit, fere decrescere in ratione cotangentium altitudinum; atque huic principio innituntur pleræque hypotheses Geometricæ ad condendas tabulas refractionum Astronomicas excogitatæ.

III. Methodus autem *determinandi absolutam quantitatem refractionum*, quam unicus observator sequi possit, hæc est tutissima. Stabilienda est cumprimis altitudo poli apparens e magno observationum numero in stellis circumpolaribus. Tum etiam invenienda est altitudo æquatoris apparens per altitudines meridianas solis æquinoctiis vicini, atque cum ejus declinatione comparatas, quam deducere oportet ex ejus ascensione recta iisdem diebus observata, ope alicujus stellæ, cujus positio exacte sit determinata. His rite constitutis, cum refractione altitudines poli & æquatoris reddantur veris majores, utriusque summa debet 90° excedere: excessus hic erit summa duplicis refractionis, quem proinde in ratione cotangentium earum altitudinum partiri oportet.

EXEMPLUM. Ex compluribus observationibus stellæ polaris ope quadrantis radii 6 pedum inveni altitudinem poli apparentem pro Collegio Mazarinæo 48° 52′ 27″, 2. Dein e quinis altitudinibus meridianis solis eodem instrumento acceptis a die 27 usque ad 31 Martii 1760 reperi altitudinem centri solis in meridie die 29, 44° 49′ 39″, 1. Tum acceptis pluribus altitudinibus correspondentibus solis & lucidæ Lyræ ascensionem rectam solis pro meridie ejusdem 29 inveni 8° 20′ 33″, ex qua, posita eclipticæ obliquitate apparente

---

Quod de reductione ad modulum CP = 1 dictum, eodem modo intelligendum est de reductione ad CQ, si hic æquatoris radius assumatur pro unitate. Quare si quis uti velit parallaxi æquatoria respondente radio CQ, & rectas OK, CK, calcularit in modulo CP = 1, eas prius reducet ad modulum CQ, faciendo ut CQ ad CP (v. g. ut 215 ad 214), ita OK & CK inventæ ad OK & CK, reductas.

te 23° 28′ 16″, obtinetur declinatio vera solis 3° 40′ 8″, 5, ex qua subtracta parallaxi in declinationem 7″, 2, remanet declinatio ejus apparens 3° 40′ 1″, 3: hæc subducta ex 44° 49′ 39″, 1 relinquit altitudinem apparentem æquatoris 41° 9′ 37″, 8, quæ juncta altitudini poli apparenti 48° 52′ 27″, 2, dat pro summa duarum refractionum 2′ 5″, quæ utrique altitudini apparenti 48° 52′½, & 44° 50′ competunt. Cotangentes harum altitudinum sunt 873, & 1005. Quare erit ut harum summa 1878 ad summam refractionum 2′ 5″, ita cotangens altitudinis 48° 52′½ ad 58″, 1, refractionem eidem altitudini convenientem. Item ut 1878 ad cotangentem altitudinis 44° 50′, ita 2′ 5″ ad 1′ 6″, 9 sive refractionem competentem altitudini 44° 50′. Definita hunc in modum refractione conveniente altitudini poli apparenti, ejus altitudo vera habetur, ac in præsente exemplo altitudo poli vera pro Collegio Mazarinæo reperitur 48° 51′ 29″, 6. Ad hæc observanda est altitudo meridiana alicujus stellæ ita prope Zenith transeuntis, ut ejus refractio nulla sit, habebiturque vera ejus declinatio; denique notatis temporibus, quo stella ad varios altitudinis gradus infra 30 pervenit (ad quod pendulum accuratum ad manus sit, oportet) calculanda est pro iisdem altitudo vera stellæ, cujus differentia ab observata dabit quantitatem refractionis pro iisdem altitudinis apparentis gradibus. Quod ad refractiones in altitudinibus 30 gradibus majoribus, eæ calculandæ sunt ex ratione cotangentium, ut supra diximus.

Sequitur jam §. 448, sed §. 449 *omittendus est.*

Pag. 164 §. 453. *In hunc locum transtulit auctor Articulum* V *hujus capitis; & quoniam plures in eo mutationes non exigui momenti occurrunt, tantumque positum est in recte constituta Theoria solis, neque dubium est, posteriorum accurationem majorem esse, quam priorum, libuit hunc articulum etsi longiusculum, transcribere*

ARTICULUS I.

De melioribus methodis stabiliendi elementa Theoriæ motus veri Telluris, seu motus apparentis solis, cum exemplis applicatis ad observationes, quæ ad determinationem horum elementorum sunt institutæ.

Postquam ars horologiaria, & theoria motus apparentis fixarum, ad hunc perfectionis gradum perducta est, nulla melior est methodus

dus poſitionem ſiderum accurate determinandi, quam ſi obſervetur eorum differentia in aſcenſione recta, cum ſtella quapiam, quæ ceteris ad id commodior viſa fuerit; & declinatio ex altitudine meridiana, vel ex differentia declinationis cum ſtella eadem, vel altera, quæ exacte jam ſit obſervata, uti explicuimus Articulo VIII & IX CAP. I. SECT. II. Verum cum ſol latitudinem nullam, quæ percipi poſſit, habeat, ejus aſcenſionem rectam obſervare ſatis eſt, ut reperiatur ejus longitudo, & conſequenter tempus tranſitus per quævis puncta orbitæ, ut æquinoctialia, ſolſtitialia, diſtantiæ mediæ, extrema lineæ apſidum (quorum alterum, nempe aphelium Telluris, dicitur *apogeum* ſolis, alterum, ſeu terræ perihelium, *perigeum* ſolis) &c, ut denique omnes dimenſiones orbitæ ſolis (quæ nihil aliud eſt, quam ellipſis a Tellure deſcripta) methodis SECT I CAP. II traditis determinentur. Itaque ut determinetur tempus revolutionis annuæ ſolis, via ſecuriſſima eſt, ſi ex obſervationibus inveniantur duo momenta temporis, quibus ſol eundem accurate ſitum reſpectu ejusdem ſtellæ fixæ habet, ita, ut inter utrumque hoc tempus magnus revolutionum numerus intercedat. Hoc temporis intervallum per revolutionum numerum diviſum dabit tempus revolutionis annuæ. In exemplo: accepto medio ex obſervationibus a De la Hirio diebus 27, 29 & 30 Junii 1684 factis, invenitur longitudo ſolis pro die 29 Jun. 0 h. 2′ 50″ temp. med. minor longitudine Sirii 1° 21′ 59″. Et rurſus accepto medio ex obſervationibus a me factis ad Caput Bonæ Spei diebus 28 & 30 Junii 1751 reperi pro die 30 Jun. 0 h. 2′ 56″ temp. med. longitudinem ſolis minorem longitudine Sirii 2° 30′ 2″; tempus autem hoc reductum ad meridianum Pariſinum fuit 29 Jun. 22 h. 58′ 16″ temp. med. Diſcrimen porro inter longitudinum differentias 1° 8′ 3″ confici debuit (cum 57′ 12″ reſpondeant 24 h. 0′ 12″ temp. med.) 1 d. 4. h. 33′ 21″. Igitur die 1 Julii 1751 3 h. 31′ 37″ temp. med. Pariſ. ſol habuit eundem ſitum reſpectu Sirii, quem habuit die 29 Jun. 1684 0 h. 2′ 50″ temp. med. Eſt autem intervallum 24472 d. 3 h. 28′ 47″; & hoc per 67 diviſo obtinetur revolutio annua ſolis 365 d. 6 h. 8′ 29″ 31‴.

Comparato in hunc modum ſitu ſolis cum aliqua ſtella ex obſervationibus diverſis anni temporibus inſtitutis, ſole nempe in aliis orbitæ ſuæ punctis verſante, animadverſum eſt, nequaquam eandem temporis revolutionis annuæ quantitatem obtineri; & ſiquidem conferantur obſervationes correſpondentes habitæ menſibus Majo, Junio, Julio, Auguſto, ſemper tempus revolutionis minus deprehenditur, quam præbeant obſervationes Novembri, Decembri, Januario, aut Februario inſtitutæ; ita, ut non niſi obſervationes circa finem Martii, aut initio Aprilis factæ idem tempus exhibeant, quod

 ob-

observationes institutæ circa finem Septembris, vel initio Octobris. Hæc inæqualitas, cum constans sit, haud potest attribui exiguis erroribus, qui in observationes semper solent irrepere, sed ejus causa e theoria solis pendet.

Sic ex observatione De la Hirii 21 Decembris 1684 23 h. 59′ 50″ temp. med. Parif. fuit tum differentia longitudinis solis & Sirii 171° 55′ 45″. Porro secundum meam observationem ad Caput Bonæ Spei institutam 25 Decemb. 1751 0 h. 0′ 33″ temp. med. hoc est, 24 Decemb. 22 h. 55′ 53″ temp. medio ad meridianum Parisinum, erat differentia longitudinis solis & Sirii 172° 43′ 41″. Harum differentia 47′ 56″ requirit 18 h. 48′ 17″ (cum 1° 1′ 11″ respondeant 24 h. 0′ 30″ temp. med.). Quare sol eundem situm respectu Sirii habuit die 21 Decembr. 1684 23 h. 59′ 50″, quem 24 Decembr. 1751 4 h. 7′ 36″ temp. med. Intervallum 24472 d. 4 h. 7′ 46″ divisum per 67 exhibet revolutionem annuam solis 365 d. 6 h. 9′ 4″ 16‴.

OBSERVA. I. Non negem equidem, quod, si præter exiguos motus apparentes fixarum, quarum theoriam perspectam habemus, stella ad consimiles observationes selecta alicui peculiari motui, qui post annos aliquot notabilis evadat, obnoxia sit, revolutio annua accurata inde deduci haud possit, nisi etiam hujus ratio habeatur. Est hæc Sirii, & (quod vero simile) omnium magis illustrium fixarum conditio, in quarum singulis motus aliquid & directione & quantitate varii, neque adhuc satis explorati, percipi cœpit. Et quod ad Sirium, longa disquisitione reperi, eum intra 67 annos uno minuto ac tribus secundis minus in longitudinem progressum, quam spectata præcessione æquinoctiorum oporteret. Atque ex hac differentia intervallum inter observationes factas mense Junio Anni 1684 & 1751, crescit 26′ 27″, ut propterea revolutio annua futura sit 365 d. 6 h. 8′ 53″ 12‴. Eadem differentia auget intervallum observationum institutarum mense Decembri 24′ 44″, quæ proinde exhibent revolutionem annuam 365 d. 6 h. 9′ 26″ 25‴. Verum quiscunque sit peculiaris hujus stellæ motus, satis est, eum semestris spatio sentiri non posse, ut inæqualitas revolutionum annuarum ex observationum diversis anni tempestatibus institutarum comparatione deducta demonstretur, id, quod in præsens faciendum nobis fuerat.

Ex hac inæqualitate autem evidenter consequitur, *solem non habere eandem velocitatem, dum ad idem punctum redit, in quo prius fuerat observatus*, id, quod fieri nequit, nisi linea apsidum aliquantum moveatur, atque ita iisdem cœli punctis non eadem semper solis anomalia respondeat. Et certe nemo non intelligit, quod si semel sol in suo apogæo sit observatus (uti fit circa finem Junii) & postea, absoluta integra respectu fixarum revolutione, soleque ad idem, in quo prius vi-

visus fuerat, cœli punctum redeunte, reperiatur, apogæum non amplius esse in eo puncto, sed aliquantum promotum fuisse ultra illud, sol in hoc loco majorem debeat habere velocitatem, quam quæ apogæo convenire possit, consequenter etiam ad illum citius perveniat, quam si apogæum mansisset immotum, & hinc tempus revolutionis brevius fiat. Contrarium eveniret, si observatio fuisset in solis perigæo (mense Decembri) instituta; aut si loco motus juxta signorum ordinem, apogæum haberet motum retrogradum. Ex his itaque patet 1mo, superius relatas observationes ostendere, *lineam apsidum solis moveri juxta signorum ordinem.* 2do Observationes ad determinandam revolutionem annuam maxime idoneas esse, quæ instituuntur sole versante circa puncta distantiæ mediæ; aut vero accipiendam esse quantitatem aliquam mediam inter revolutiones deductas ex observationibus factis sole in punctis oppositis versante, & inter quas idem temporum intervallum intercesserit, uti dum sol fuit in apogæo, & dein in perigæo: atque hæc methodus tutior est, quod sole prope apsides existente aliquot continuis diebus ejus motus sit uniformis, adeoque observationes uno die institutæ accurate reduci possint ad eas, quæ duos, tresve dies tardius vel citius sunt habitæ. Et ex supra allatis exemplis statuemus veram quantitatem revolutionis annuæ solis 365 d. 6 h. 9′ 9″ 48‴.

Observa II. Ex comparatione temporum reditus solis ad idem æquinoctium, ad idem solstitium, denique ad idem, qualecunque id sit, eclipticæ punctum, non solum inæqualis diversis anni temporibus revolutio eruitur, verum etiam universe minor, quam paullo ante determinavimus. Itaque ad evitandas inæqualitates ob motum apogæi solis, comparandæ sunt observationes vel institutæ, dum sol versabatur circa idem punctum distantiæ mediæ; vel circa duo æquinoctia autumnalia, & circa duo æquinoctia verna eorundem annorum, hoc est, ut primis duabus observationibus circa æquinoctia ejusdem anni institutis, etiam postremæ duæ eodem anno circa æquinoctia fiant, & observationes autumnales inter se comparentur, & verna cum verna: ut hac ratione accipi possit medium inter revolutionem prodeuntem ex observationibus circa autumnalia æquinoctia factis, & illam, quæ eruitur ex observationibus circa æquinoctia verna institutis. Simili ratione observationes etiam accipi possunt circa duo solstitia æstiva, & circa duo solstitia hyberna eorundem annorum factæ. Nobis satis fuerit exemplum prioris casus addidisse.

Die 28 Martii 1657 0 h. 5′ 1″ temp. med. Cassinus observavit in magno gnomone ad D. Petronii Bononiæ altitudinem apparentem centri solis 48° 46′ 43″, ac proinde habita ratione refractionis & parallaxeos, vera fuit 48° 45′ 52″: ex hac subducta elevatione æqua-

toris 45° 30′ 40″, remanet declinatio borealis ſolis 3° 15′ 12″, cui competit longitudo 0ˢ 8° 11′ 16″, quæ tamen ob rationem mox reddendam (OBS. III) reducenda eſt ad 8° 11′ 3″. Tempus hoc ad meridianum Pariſinum reductum eſt 27 Mart. 1657 23 h. 28′ 56″ temp. med. Jam vero ex quinque altitudinibus meridianis ſolis diebus totidem continuis ope quadrantis, cujus radius erat 6 pedum, acceptis inveni ejusdem centri altitudinem meridianam apparentem pro 28 Martii 1760 0 h. 5′ 1″ temp. medio ad meridianum Collegii Mazarinæi æqualem 44° 26′ 26″, ideoque veram 44° 25′ 25″ ½. Subtracta hinc elevatione æquatoris 41° 8′ 30″½, habetur declinatio ſolis borealis 3° 16′ 55″, cui reſpondet longitudo 0ˢ 8° 15′ 51″, reducenda ad 0ˢ 8° 15′ 42″. Differentia inter utramque longitudinem 4′ 39″ a ſole conficitur 1 h. 53′ 15″ (cum diei integro conveniant 59′ 8″, 3); itaque 27 Martii 1760 22 h. 11′ 46″ temp. med. ſol eundem ſitum reſpectu punctorum æquinoctialium habuit, ac 27 Martii 1657 23 h. 28′ 56″ temp. med. Intervallum eſt 37619 d. 22 h. 42′ 50″, quod diviſum per 103 dat revolutionem annuam ſolis reſpectu puncti æquinoctialis Arietis 365 d. 5 h. 48′ 48″.

Ex his complures ſequelæ magni momenti deducuntur. Primo *ſtabiliendæ ſunt tres ſpecies revolutionum in theoria ſolis*; nempe revolutio *Siderea*, quæ eſt tempus reditus ſolis ad eandem ſtellam fixam, eſtque 365 d. 6 h. 9′ 9″ 48‴. Dein revolutio *Tropica*, hoc eſt intervallum reditus ſolis ad idem punctum eclipticæ, ad eundem colurum, ad eundem tropicum &c, cujus duratio eſt 365 d. 5 h. 48′ 48″ 0‴. Denique revolutio *Anomaliſtica*, tempus reditus ſolis ad eandem apſidem, quæ eſt, ut mox videbimus, 365 d. 6 h. 15′ 46″.

Secundo. Quoniam ſol ad idem punctum eclipticæ 20′ 21″ 48‴ temporis citius revertitur, quam revolutionem integram reſpectu fixarum abſolvat, ſequitur, coluros, & hinc puncta æquinoctialia, & ſolſtitialia, habere motum retrogradum reſpectu ſolis paullo majorem 50″ 11‴ in partibus circuli per annum. Ex quo fit, ut aſcenſione recta, & longitudine a puncto æquinoctiali Arietis computatis, videatur ſol jam integram deſcripſiſſe eclipticam, dum reipſa non niſi 359° 59′ 9″ 49‴ confecit. Hic motus punctorum æquinoctialium dicitur *Præceſſio æquinoctiorum.*

Tertio. Quia diverſæ anni tempeſtates juxta revolutionem tropicam contingunt, utpote quæ (275) a tranſitu ſolis per puncta æquinoctialia, & ſolſtitialia dependent, hæc revolutio maxime idonea eſt, ut ſit regula temporis civilis & politici, ideoque etiam ei calculi Aſtronomici accommodandi ſunt, quamvis revolutio ſiderea eſſet opportunior. Itaque ratio habenda eſt differentiæ inter haſce revolutiones, ac ſupponendum, quod 360 gradus eclipticæ reſpon-

deant

deant tempori 365 d. 5 h. 48′ 48″, licet interea ſol in cœlo ſtellato non percurrat, niſi 359° 59′ 10″.

Quarto. Omnia puncta reipſa immobilia in cœlo reſpectu punctorum æquinoctialium 50″ ſingulis annis videri debent progredi juxta ſignorum ordinem.

Quinto. Et quia revolutio anomaliſtica ſolis ſideream 6′ 36″ temporis excedit, conſequens eſt, ut apogæum ſolis reſpectu fixarum motu annuo progrediatur 16″ 16‴, & reſpectu punctorum æquinoctialium circiter 1′ 6″, 4.

Sexto. Motus apogæi ſolis indicio eſt, vi centrali terræ exiguam quandam, ſed conſtantem, mutationem alicunde accidere (§ 174 Append.) ſed de hoc, uti etiam de retrogradatione punctorum æquinoctialium, in ſequentibus quædam adferemus.

Habitis jam temporibus diverſarum ſolis revolutionum, omnes dimenſiones ellipſeos, quam deſcribere videtur, inveniri poſſunt ope trium ejus longitudinum, quæ conditionibus magis faventibus, & cum cura obſervatæ ſint, ſecundum methodum (150) expoſitam. Exempli cauſa collato ſole cum Sirio ad Caput Bonæ Spei, longitudinem veram ſolis die 30 Septembris 1751 23 h. 49′ 44″ temp. med. inveni 6^s 7° 51′ 49″$\frac{1}{2}$; die 30 Decembris 0 h. 3′ 0″ temp. med. 9^s 8° 30′ 5″; & die 28 Martii 1752 0 h. 5′ 2″ temp. med. 0^s 8° 9′ 25″$\frac{1}{2}$, adhibitis ubivis correctionibus, de quibus infra. Ex his intuli locum perigæi ſolis circa finem Anni 1751 fuiſſe 9^s 8° 40′ 45″; ſolem per illud tranſiviſſe 30 Decembris 3 h. 9′ 20″ temp. med. ad meridianum Pariſinum reducto; eccentricitatem eſſe partium æqualium 16809, quarum diſtantia media terræ a ſole continet 1000000; & hinc maximam æquationem centri 1° 55″ 34″$\frac{1}{2}$.

Intervallum a 30 Decembris 1751 3 h. 9′ 20″ temp. med. usque ad 1 Januarii meridiem 1752 temp. med. (eſt autem hic meridies apud omnes fere Aſtronomos *epocha* motus medii ſolis annis biſſextilibus; pridianus vero annis communibus) eſt 1 d. 20 h. 50′ 40″, quo ſol motu medio conficit 1° 50′ 30″; his additis ad locum perigæi 9^s 8° 40′ 45″, habetur epocha motus medii pro initio anni 1752, nempe 9^s 10° 31′ 15″.

Multis ejusmodi ſelectis obſervationibus ad ſimilem calculum revocatis, tandem de veris theoriæ ſolis elementis certi reddemur; & ſiquidem aliquod in iis diſcrimen occurrat, medium quoddam inter ea, quæ reperimus, accipiemus.

Verum quia Aſtronomus quam minime elementa ſuæ theoriæ hypotheſibus ſuperſtruere debet; decebit ſane, ut poſitio lineæ apſidum, & epocha tranſitus ſolis per eandem, ſecundum methodum N. 109 expoſitam; æquatio vero maxima cum eccentricitate juxta

NN. 143 & 145 investigetur. In exemplo, e comparatione solis cum Sirio ejus longitudinem die 30 Junii 1751 0 h. 2′ 55″ temp. med. ad Caput Bonæ Spei inveni 3ˢ 8° 9′ 2″; & 30 Decembris 0 h. 3′ 0″ eadem erat 9ˢ 8° 30′ 5″. Differentia 6ˢ 0° 21′ 3″ excedit, 180° 0′ 33″, quos sol intra semirevolutionem anomalisticam describit, 20′ 30″; jam vero motu diurno existente 57′ 12″, sol excessum illum percurrit intra 8 h. 36′ 13″, & ad 180° 0′ 33″ e loco, in quo 30 Decembris 0 h. 3′ 0″ fuerat, pervenit die 30 Jun. 8 h. 39′ 8″. Intervallum temporis est 182 d. 15 h. 23′ 52″, exceditque semirevolutionem anomalisticam 15′ 59″. Itaque 30 Jun. 8 h. 39′ 8″ sol nondum ad apogæum pervenerat. Fiat, ut 4′ 0″ (differentia inter velocitates solis in apogæo & perigæo) ad 57′ 12″ (velocitatem diurnam solis in apogæo); ita sunt 16′ 5″ ad 3 h. 48′ 34″; hoc tempore adhuc opus erat, ut sol apogæum attingeret: transiit ergo per apogæum die 30 Jun. 1751 12 h 27′ 42″ ad meridianum Capitis Bonæ Spei, tempore vero medio reducto ad meridianum Parisinum ejusdem diei 11 h. 23′ 2″, & quidem apogæo existente in 3ˢ 8° 38′ 44″ circa finem Junii An. 1751.

Si comparentur duæ longitudines solis ad diem 30 Septembris 1751, & 28 Martii 1752 superius allatæ, reperitur, quod hoc intervallo confecerit sol 180° 17′ 36″ motu vero; motus medius tempori inter observationes interjecto competens erat 176° 26′ 29″: semidifferentia 1° 55′ 33″½ est æquatio maxima solis, cui tamen addendum est est 1″, quoniam 28 Martii sol paullo plus, quam uno gradu, aberat a puncto suæ distantiæ mediæ. Est igitur æquatio maxima centri 1° 55′ 34″½, & eccentricitas 16809 partium.

Quod ad revolutionem anomalisticam attinet, ea invenitur ex comparato tempore transitus solis per suum perigæum die 30 Decembris 1751 3 h. 9′ temp. med. Parisiis, cum tempore transitus ejusdem, deducto ex observationibus Norimbergæ An. 1487 a Walthero factis. Juxta has observationes (vid. Monum. Acad. Reg. Parif. An. 1749 pag. 53 & seq.) die 12 Decemb. 12 h. 36′ temp. med. sol aberat a perigæo 3° 49′ 36″; & hinc perigæum attigit die 16 Decemb. 6 h. 5′ tempore ad meridianum Parisinum reducto. Intervallum est 96428 d. 21 h. 4′, e quo revolutio una eruitur 365 d. 6 h. 15′ 42″. Similiter sol erat in apogæo An. 1503 die 16 Junii 18 h. 0′ juxta meridianum Parisinum. Vidimus autem, solem etiam fuisse in apogæo die 30 Junii 1751 11 h. 23′; intervallum 90584 d. 17 h. 23′ dat revolutionem unam 365 d. 6 h. 15′ 50″; itaque accepto medio statui potest 365 d. 6 h. 15′ 46″.

OBSERVA III. Antequam observatio aliqua solis ad subtiliorem quampiam disquisitionem adhibeatur, rationem habere oportet qua-

quatuor exiguarum inæqualitatum pendentium ab actione planetarum in terram, quemadmodum in sequentibus explicabitur.

Huic jam subjiciendus est Artic. I, *qui* pag. 164 *habetur.*

Pag. 167 §. 464 *Lin.* 3 *loco* aphelium *lege* perihelium. *Idem fiat* § 465 *Lin.* 2. Item § 468 *Lin.* 3 *&* §. 469 *Lin.* 2.

Pag. 183 §. 524 *Lin.* 3 *loco* 57050 *lege* 57030.

Pag. 185 §. 530 *& sequentibus hujus Articuli aliud exemplum habet author in eorum commodum transcribendum, qui sese in his calculis exercere desiderant.*

Cometa Anni 1742, qui erat retrogradus, transivit per suum perihelium die 8 Februarii 4h. 48′ temp. med. Locus perihelii in orbita cometæ erat in $7^s\ 7^\circ\ 35'\ 13''$. Logarithmus distantiæ perihelii a sole erat 9,884049; nodus ascendens in $6^s\ 5^\circ\ 38'\ 29''$; denique inclinatio orbitæ $65^\circ\ 59'\ 14''$. Oporteat invenire locum verum e terra visum pro die 28 Martii 1742 13 h. 39′ 0″ temp. med.

I. *Accipiatur intervallum inter transitum per perihelium, & tempus datum*, quod in præsente casu est 48 d. 8 h. 51′, *& horæ, minuta, & secunda reducantur ad partes decimales diei.* Fient itaque 48, 3687 d.

II. *Dimidium tripli logarithmi distantiæ perihelii subtrahatur a logarithmo intervalli inter tempus transitus per perihelium, & datum; residuum erit logarithmus ejusdem intervalli reducti ad tempus, seu dies elapsos a transitu per perihelium orbitæ in tabula generali post* N. 214 *calculatæ.* In nostro exemplo logarithmus distantiæ perihelii est 9, 884049; ejus triplum 9,652147; tripli dimidium 9, 826074; logarithmus de 48, 3687 est 1, 684564; a quo si subtrahatur 9,826074, relinquitur 1, 858489 logarithmus de 72, 192 d.

III. *Quæratur in tab. gen.* (N. 214) *anomalia vera respondens tempori invento; addaturque ea, si cometa directus est, ad locum perihelii, si tempus datum sequitur transitum per perihelium; at si præcedat, anomalia subtrahatur a loco perihelii. Quando cometa est retrogradus, & tempus datum transitum per perihelium præcedit, anomalia vera addenda est loco perihelii; subtrahenda vero ab eodem, si tempus datum sit posterius transitu per perihelium; habebitur locus verus heliocentricus cometæ in sua orbita.* Diebus 72,192 respondent in tabula $73^\circ\ 8'\ 52''$, sive $2^s\ 13^\circ\ 8'\ 52''$, subtrahenda a loco perihelii $7^s\ 7^\circ\ 35'\ 13''$, quia cometa est retrogradus, & tempus datum est posterius tempore transitus per perihelium. Unde invenitur locus verus heliocentricus cometæ in sua orbita $4^s\ 24^\circ\ 26'\ 21''$.

IV. *Locus verus nodi ascendentis subducatur a loco vero heliocentrico cometæ; habebitur argumentum latitudinis cometæ* (471).

Itaque si $6^s\ 5^\circ\ 38'\ 29''$ subtrahantur a $4^s\ 24^\circ\ 26'\ 21''$, argumentum latitudinis est $10^s\ 18^\circ\ 47'\ 52''$.

V. *Inferatur* (473): *ut sinus totus ad cosinum inclinationis; ita tangens argumenti latitudinis est ad tangentem argumenti latitudinis in ecliptica accepti, &*

ad

ad locum verum nodi addendi, ut obtineatur locus verus heliocentricus cometæ ad eclipticam reductus (475), *five ejus longitudo vera e fole vifa.*

Sic argumentum latitudinis reductum ad eclipticam eft 11^{s} 11° $6'$ $21''$, & longitudo vera cometæ 5^{s} 16° $44'$ $50''$.

VI. *Fiat hæc analogia* (472) : *ut finus totus ad finum argumenti latitudinis, ita eft finus inclinationis orbitæ cometæ ad finum ejus latitudinis e fole vifæ, quæ erit Borealis; vel auftralis, prout (fi cometa eft directus) ejus argumentum latitudinis eft minus, vel majus 6 fignis; aut (fi cometa eft retrogradus) prout ejus argumentum latitudinis eft majus vel minus 6 fignis.*

In noftro exemplo itaque latitudo cometæ e fole vifa eft 37° $19'$ $20''$, & quidem borealis, cum cometa fit retrogradus, & argumentum latitudinis 6 figna excedat.

VII. *Calculetur verus locus folis, inveniaturque ejus diftantiæ a terra logarithmus: ab illo fubtrahantur 6 figna, ut fciatur locus verus Telluris e fole vifus; accipiatur differentia inter longitudinem veram heliocentricam cometæ, & longitudinem terræ e fole vifam: hæc differentia dabit angulum ad folem inter terram & cometam, qui etiam angulus commutationis dicitur.*

In exemplo propofito, locus verus folis die 28 Martii 13 h. $39'$ eft 0^{s} 8° $11'$ $28''$; & logarithmus ejus diftantiæ a terra 9, 999841; itaque locus verus terræ e fole vifus eft 6^{s} 8° $11'$ $28''$. Differentia a 5^{s} 16° $44'$ $50''$, nempe 21° $26'$ $38''$ dat angulum commutationis, feu angulum ad folem.

VIII. *Fiat* 1mo : *ut quadratum cofinus dimidiæ anomaliæ veræ* (inventæ III) *eft ad quadratum radii; ita diftantia perihelii Cometæ eft ad ejus diftantiam a fole, five ad radium vectorem.* 2do *ut eft radius ad cofinum latitudinis e fole vifæ* (VI), *ita radius vector ad diftantiam curtatam.*

Invenietur ex his analogiis logarithmus diftantiæ curtatæ 9, 975019.

IX. *Accipiatur differentia inter logarithmos diftantiæ curtatæ, & diftantiæ terræ a fole (minore e majore fubtracto); additis ad characterifticam* 10, *erit ea logarithmus tangentis alicujus anguli* (Elem. 752), *a quo fubducantur* 45°; *refidui logarithmus tangentis addatur ad logarithmum tangentis complementi anguli dimidii ad folem* (VII); *Summa erit logarithmus tangentis arcus addendi ad illud complementum, fi diftantia curtata cometæ a fole excedit diftantiam terræ a fole; fubtrahendi vero, fi diftantia ea cometæ eft minor, quam diftantia terræ; habebitur angulus elongationis (five angulus ad terram inter locum folis, & locum geocentricum cometæ ad eclipticæ planum reductum interceptus), qui additus, vel fubtractus a loco vero folis (prout cometa e terra vifus fuerit vel ex parte orientis, vel ex parte occidentis refpectu folis) dabit longitudinem geocentricam cometæ.*

Itaque ex 9, 999841 fubductis 9,975018, refiduum 0,024823 auctum decade 10, 024823 eft logarithmus tangentis 46° $38'$ $11''\frac{2}{3}$; hinc fubtractis 45°, tangentis refidui 1° $38'$ $11''\frac{2}{3}$ logarithmum ada-

datur logarithmo tangentis 79° 16′ 41″ (quod eſt complementum de 10° 43′ 19″, dimidio nempe anguli ad ſolem 21° 26′ 38″): ſumma eſt logarithmus tangentis 8° 34′ 51″, quibus e 79° 16′ 41″ ſubtractis (cum diſtantia cometæ a ſole ſit minor, quam diſtantia terræ a ſole) habetur angulus elongationis 70° 41′ 50″, ſive 2ˢ 10° 41′ 50″. E ſchemate rudius conſtructo, quod exhibeat eclipticam in 12 ſigna diviſam, ſolem, terram, & cometam ſecundum longitudines hoc calculo inventas, facile apparet, cometam e terra viſum eſſe reſpectu ſolis ad orientem. Itaque angulus elongationis addendus eſt loco vero ſolis, ut habeatur longitudo geocentrica cometæ 2ˢ 18° 53′ 18″.

X *Fiat denique* (478): *ut ſinus anguli ad ſolem* (VII) *ad ſinum anguli ad terram* (IX), *ita eſt tangens latitudinis cometæ e ſole viſæ* (VI) *ad tangentem ejus latitudinis e terra viſæ.*

Hinc habetur ut ſinus 21° 26′ 38″ eſt ad ſinum 70° 41′ 50″; ita eſt tangens 37° 19′ 20″ ad tangentem latitudinis geocentricæ cometæ 63° 3′ 57″.

Pag. 187. *Articulum* II *&* III *tranſpoſuit author; nos hic ſequimur ordinem editionis novæ, & ejus Articulum* II *cum mutationibus exhibemus.*

Pag. 190.

ARTICULUS II.

De calculo cometarum e terra viſorum in orbitis Ellipticis.

§. 572. Quando reditus Cometæ certus eſt, ideoque revolutionis tempus ſcitur, ejus motus in ellipſi calculandus eſt. Methodus a præcedente nihil diverſi habet, niſi modum inveniendi longitudinem heliocentricam, cui illuſtrando unicum exemplum ſufficit. In ſequente Articulo dicemus, qua ratione utendum ſit obſervationibus, ut elementa theoriæ cometæ in ellipſi reperiantur.

§. 573, *usque ad* 577 *retinentur, uti pag.* 199 *&* 200 *habentur, quibus ſequentia adjungantur.*

Pro majore accuratione limites falſarum poſitionum, quantum fieri poteſt, arcti ſumendi ſunt; ſic in præſente exemplo adhibendæ fuerant anomaliæ veræ 45° 10′ & 45° 20′, aut ſummum 45° & 45° 30′.

Quod ſi pauca ſecunda negligere lubeat, calculi labor admodum contrahetur ope tabellæ, quam in fine hujus Capitis ſubjiciemus, eandem fere cum tabula *Simpſonii* (*Miſcell. Tract. pag.* 62), cujus uſum jam exponimus.

Calculata anomalia vera in parabola, & logarithmo invento distantiæ cometæ a sole, subtrahantur priores quinque notæ logarithmi axis majoris ex primis quinque notis logarithmi distantiæ periheliæ, ut habeatur logarithmus constans, addendus separatim utrique logarithmo hujus tabulæ competentibus anomaliæ veræ in parabola (habita ratione partis proportionalis). Erit prima summa logarithmus minutorum, & secundorum correctionis faciendæ juxta tabulæ titulos, ut anomalia vera in parabola reducatur ad anomaliam veram in ellipsi. Summa altera erit logarithmus numeri semper a logarithmo distantiæ in parabola calculatæ subtrahendi, ut habeatur logarithmus radii vectoris in ellipsi.

Sic pro 36,443 d. in parabola reperitur logarithmus radii vectoris 9, 835474, & anomalia vera 45° 26′ 46″ (209). Ex 9, 7653 subtractis 1, 5530 habetur logarithmus constans 8, 2123, addendus ad 4, 6990, & fit 2, 9113, nempe logarithmus de 13′ 35″, correctionis subtractivæ, ut proinde anomalia vera in ellipsi fit 45° 12′ 11″. Item additis 8, 2123 ad 9, 0802 obtinetur logarithmus 7,2925 de 0,001961, correctione nempe subtractiva e logarithmo radii vectoris, qui 9, 833513 fiet.

Tabula, qua utimur hic, summam accurationem non fert, tum quod constructa sit ex formulis algebraicis, in quibus commoditatis gratia termini aliqui finiti, tanquam infinite parvi, neglecti sunt; tum etiam quod ellipses haud sint curvæ similes, uti omnes parabolæ. Interim si longior calculorum series facienda sit, non sine compendio adhibebitur, modo nonnullæ in ea correctiones fiant.

Sint culculandæ in ellipsi omnes observationes mense Majo An. 1759 factæ. Compertum est, anomaliam cometæ hoc mense fuisse intra 90° & 108°. Ejus perihelii distantia invenitur 0, 583497, & axis major ellipseos 36, 14606: quare construatur tabella correctionum (qualem mox subjiciemus) in alteram tabulam ad finem præsentis Capitis adferendam. In 2da & 6ta columna scribantur correctiones ope logarithmi constantis 8, 2079 repertæ. Tum methodo superius (§, 576) exposita calculentur anomaliæ veræ in ellipsi respondentes anomaliis veris in parabola; exempli causa pro 90°, 100° & 108°, reperientur 90° 11′ 20″, 100° 23′ 32″ & 108° 35′ 12″, quæ jam tres accuratas correctiones pro ellipsi suppeditant, in tertia columna describendas. In 4ta differentiæ harum trium correctionum distribuantur proportionaliter ad differentias secundæ columnæ, e quibus 5ta columna conficitur, quæ veras correctiones, in calculo adhibendas contineat. Eodem modo reperiuntur veræ correctiones logarithmorum radiorum vectorum.

Ano-

Anomalia vera in parabola	Correctio juxta tab. quæ ad finem hujus Cap. habetur	Correctio calculata	Differentia in part. proport. div.	Vera anomaliæ correctio	Correctio logarith. radii vector. juxta tabulam	Correctio radii vectoris calculata	Differentia in part. proport. div.	Correctio vera logarithmi radii vectoris
Gr.	′ ″	′ ″	″	′ ″				
90	+ 11 6	+ 11 20	14	+ 11 20	− 5608	− 5681	73	− 5681
91	12 11		16	12 27	5694		74	5768
92	13 17		18	13 35	5780		75	5855
93	14 24		20	14 44	5867		77	5944
94	15 33		22	15 55	5955		78	6033
95	16 43		24	17 7	6044		80	6142
96	17 55		26	18 21	6133		82	6215
97	19 9		28	19 37	6223		84	6307
98	20 24		30	20 54	6313		85	6398
99	21 40		32	22 12	6405		87	6492
100	22 58	23 32	34	23 32	6499	6588	89	6588
101	24 17		36	24 53	6595		92	6687
102	25 38		38	26 16	6691		95	6786
103	27 0		40	27 40	6789		98	6887
104	28 24		43	29 7	6888		101	6989
105	29 51		45	30 36	6990		104	7094
106	31 19		47	32 6	7094		107	7201
107	32 49		50	33 39	7201		111	7312
108	34 20	35 12	52	35 12	7310	7425	115	7425

ARTICULUS III.

Methodus determinandi omnia elementa theoriæ alicujus Cometæ ex obſervationibus in terra inſtitutis, tum in parabola, cum in ellipſi.

Elementa theoriæ cometarum in terra obſervatorum per methodum directam, & Geometricam determinare, res eſt ſummæ difficultatis, tum quod eorum revolutio periodica ſit incognita, tum etiam, quod non ſæpius in conjunctione, vel oppoſitione obſervari poſſint, utpote exiguo tempore viſibiles. In defectu itaque ejusmodi methodi neceſſe eſt ad *poſitionem falſi*, & longum tentamen recurrere.

Hinc collectis, quot haberi poſſunt, probis obſervationibus cometæ, diverſa phænomena expendenda ſunt, uti inæquales velocitates apparentes cometæ, ejus directio, magnitudo apparens diſci, ſive nuclei, varii gradus luminis, directio ac celeritas cometæ in oppoſitione, vel conjunctione cum ſole &c. Ex his conjectura facien-

cienda eſt 1mo, utrum cometa terræ fuerit vicinus, quod ex magnitudine apparente, & magna velocitate motus Geocentrici, quæ brevi admodum minuuntur, dignoſcitur. 2do quo tempore cometa fuerit in perihelio; quod ex eo fere intelligi poteſt, quod tunc tam ipſe, quam ejus cauda ſit luciđiſſima; quippe id obſervari conſuevit paullo poſt tranſitum per perihelium: at vero, quantum licet, obſervationes inſtitutæ circa perihelium, calculum ingredi non debent in methodo, quam explicamus: tunc enim celeritates cometæ e ſole ſpectati non ſatis inter ſe differunt, ut vera elementa inveniri poſſint; ſed ut veritas inventorum comprobetur, tantummodo uſum habent. 3^tio^ conjectandum, utrum cometa e ſole viſus fuerit directus, an retrogradus, quod fere agnoſcitur e directione apparente illius, quando prope conjunctionem, vel oppoſitionem cum ſole verſatur. 4to æſtimatio facienda eſt, quantæ circiter fuerint Cometæ diſtantiæ a ſole ſub initium, & finem apparitionis. Quamvis autem hæc conjecturam noſtram fefellerint, calculi tamen ſequente methodo inſtituendi, mox id nobis indicabunt, idque ſolum incommodi lapſus ejusmodi habebit, quod operatio pro ejus quantitate longior ſit futura. At ſi paullo major acceſſerit experientia, parum admodum a vero aberrabitur.

Exemplo, & explicationi methodi, de qua agimus, ſit cometa menſibus Martio, & Aprili An. 1742 viſus. Ex hiſtoria obſervationum inſtitutarum, quæ in Mon. Acad. Reg. ſcient. ad annum hunc proſtat, in Europa non niſi ſub initium Martii videri potuit, ex auſtrali cœli parte rapido curſu, & ingenti cum cauda ad nos progreſſus: ferebatur deinceps verſus polum boreum motu apparente directo, ſed velocitate, & lumine ſemper decreſcente, usque ad 6 Maii, quo videri deſiit. In conjunctione cum ſole videbatur 15 Martii, quo tempore motu diurno plus quatuor gradibus circuli maximi conficiebat.

Ex his conjici poteſt 1mo, eum, antequam in Europa eſſet aſpectabilis, jam per perihelium tranſiiſſe, cum in ipſo apparitionis principio tam nucleus, quam cauda tanto lumine fulſerint. 2do motum verum, & heliocentricum fuiſſe retrogradum: quippe cum in conjunctione tantam habuerit velocitatem geocentricam, terræ vicinus eſſe debuit, ac proinde ea conjunctio fuit inferior; & hinc ſi ejus motus heliocentricus fuiſſet directus, geocentricus debuiſſet apparere retrogradus. Neque enim fieri potuit, ut cometa jam a ſole, & perihelio remotior tantam haberet velocitatem heliocentricam directam, ut e terra ſpectatus pariter appareret directus. 3^tio^ cum ſub initium apparitionis in Europa cometa terræ tam fuerit propinquus, ejus diſtantia a ſole tum vix minor eſſe poterat, quam diſtantia ter-

ræ

ræ a ſole. Sed circa Majum cometa jam multo longius a ſole diſtare debebat, quam terra, utpote cum magis ſemper, magisque a ſuo perihelio recederet.

Spectatis omnibus hisce conjecturis ſeligantur tres poſitiones cometæ obſervatæ temporibus, quantum fieri poteſt, maximo intervallo disjunctis, ita tamen, ut tunc motus diurnus cometæ ſaltem 20 minuta circuli maximi æquarit: nam ſi motus admodum lentus eſt, errores minimi in definiendis locis cometæ admiſſi maximos inducunt in determinationem elementorum quæſitorum; & certe nucleus male terminatus, & debili lumine præditus, quando motus cometæ eſt exiguus, accurationi obſervationum admodum officit. Quærantur ex tabulis Aſtonomicis longitudines ſolis, & logarithmi diſtantiarum ejus a terra pro tribus temporibus obſervationum ſelectarum, quæ & ipſa ad tempus medium reducantur. Inveniatur dein elongatio cometæ, hoc eſt, differentia inter ejus longitudinem obſervatam, & longitudinem ſolis tempore primæ & ultimæ obſervationis. Obſervetur præterea, an cometa reſpectu ſolis fuerit verſus orientem, an verſus occidentem, & ex his conſtruatur ſequens tabella.

1742 tempus medium	Longitudo Cometæ Obſervata	Latitudo Bor. cometæ Obſerv.	Longitudo ſolis calculata	Logar. Diſtant. ſolis a terra	Elongatio Cometæ a ſole
h. ′ ″	S G ′ ″	G ′ ″	S G ′ ″		G ′ ″
4 Mart. 16 9 50	9 16 0 40	34 45 37	11 14 27 44	9,996910	58 27 4 Occ.
28 .... 13 39 0	2 18 52 45	63 3 55	0 8 11 28	9,999840	
24 April. 9 39 0	3 1 5 33	50 32 50	1 4 27 16	0,003092	56 38 17 Or.

His ita habentibus invenienda ſunt per calculum elementa parabolæ, quæ quatuor has conditiones habet: 1mo ut ſol ſit in ejus foco. 2do ut tranſeat per duo puncta determinata ex duabus ſelectis obſervationibus inter ſe maxime diſtantibus, nempe factis 4 Martii, & 24 Aprilis. 3^tio^ ut intervallo temporis inter has obſervationes elapſi arcus cœleſtis reipſa deſcribi potuerit, qui iisdem duobus punctis intercipitur: in præſente exemplo eſt hoc intervallum 50 d. 17 h. 29′ 10″. ſeu reductione ad partes diei milleſimas facta, 50, 728$\frac{1}{2}$ d. 4to denique ut præterea tranſeat per punctum determinatum ex tertia aliqua obſervatione, quæ, quantum res fert, remota ſit a duabus prioribus, qualis eſt 28 Maii inſtituta.

Hæc ut præſtentur, ſchemate quodam calculus juvetur (Fig. 76 Append.), quod circiter exhibeat dimenſiones orbitæ quæſitæ. Centro

tro S, in quo ſol ponitur, radio arbitrariæ magnitudinis deſcribatur arcus LK telluris orbitam repræſentans. Sit L locus telluris die 4 Martii, & K die 24 Aprilis, ut proinde arcus KL æquetur motui ſolis eo temporis intervallo. Ad L conſtruatur angulus SLN 58° 27′ 4″ verſus occidentem, ut N ſit projectio loci cometæ in plano eclipticæ SLK; & ducta SN, cogitetur N*n* ad planum eclipticæ, & propterea ad rectas LN, SN, perpendicularis, ita, ut *n* exhibeat locum verum cometæ in orbita parabolica P*nm*.

Hinc ſi ducantur *n*L, *n*S, evidens eſt, eſſe SN diſtantiam curtatam, *n*S radium vectorem, angulum *n*SN latitudinem heliocentricam cometæ, NSL angulum commutationis, ſive angulum ad ſolem; *n*NL angulum ad cometam (ita eum compendii cauſa appellabimus, cum alias dici deberet angulus ad punctum projectionis cometæ inter ſolem & terram); *n*L diſtantiam cometæ a terra; NL diſtantiam puncti projectionis a terra. Jam vero in tribus triangulis SLN, LN*n*, *n*SN, quorum primum eſt obliquangulum, reliqua duo rectangula ad N, nota tantummodo ſunt angulus SLN 58° 27′ 4″, latus SL, cujus logarithmus 9,996910, & angulus *n*LN 34° 45′ 37″, ejusque complementum L*n*N, cum rectis *n*NL, *n*NS; & vel exigua attentione adhibita, ex horum triangulorum poſitione advertitur, quod dato adhuc quocunque alio angulo, vel latere (præterquam radio vectore S*n*) omnia reliqua inveniri poſſent, ut proinde neceſſe non ſit, hæc ſingillatim adferre: id ſolum videtur difficultatem poſſe objicere, ſi daretur angulus *n*SN, ſive ejus complementum N*n*S; at enim facile hinc quis ſe expediet, ſi animadvertat, eſſe (479) tangentem anguli *n*LN ad tangentem anguli *n*SN, ut eſt ſinus anguli NLS ad ſinum anguli NSL.

Eodem modo deſignetur in ſchemate locus cometæ pro die 24 Aprilis, facto angulo SKM 56° 38′ 17″ verſus orientem. Locus cometæ in planum eclipticæ projectus ſit M, & ejus locus verus *m* in extremo *m* rectæ ad planum eclipticæ perpendicularis M*m*; junctis *m*S, *m*K habentur tria triangula SMK, *m*KM, *m*KS, quorum eadem eſt conditio, ac priorum.

Quoniam autem dimenſiones orbitæ cometæ reperiri nequeunt, niſi reſolutione triangulorum utrobivis junctorum, poſitio *falſi* in ſubſidium vocanda eſt, & aſſumendus utraque ex parte valor vel alicujus anguli, vel alicujus lateris (præterquam radii vectoris). Et quidem ſolæ obſervationum circumſtantiæ in electione attendendæ ſunt, ut id eligatur, quod variationem majorem patiatur; uti ſi exempli cauſa cometa viſus fuiſſet magis in latitudinem, quam in longitudinem moveri, poſitio facienda eſſet in latitudinibus heliocentricis *n*SN, *m*SM; at ſi in longitudinem magis, quam in latitudinem

nem moveri fuiſſet viſus, aſſumendus eſſet primo valor diſtantiarum curtatarum SN, SM, vel angulorum commutationis NSL, MSK, ſive etiam angulorum ad cometam LNS, KMS: eſt id prorſus arbitrarium, neque calculus, quidquid elegeris, redditur difficilior. Id tamen obſervandum, valorem diſtantiarum curtatarum aſſumendum non eſſe, quando alteruter angulus ad cometam recto eſt admodum vicinus, cum tunc ex calculo hujus anguli cognoſci nequeat, acutusne, an obtuſus ſit, neque mutationes in diſtantia curtata proportionales ſint mutationibus anguli ad cometam.

Ceterum quæcunque fiant ſuppoſitiones, eo tendant, oportet, ut inveniantur duæ longitudines, & latitudines heliocentricæ cometæ cum duobus radiis vectoribus: nam longitudinum harum differentia dat angulum NSM, qui ope latitudinum ad angulum nSm in plano orbitæ mnP reducitur. Ex inæqualitate porro radiorum vectorum innoteſcunt gradus anomaliæ punctis n & m orbitæ reſpondentes, & conſequenter ſitus perihelii. Denique ex inæqualitate latitudinum heliocentricarum nN, mM invenitur inclinatio orbitæ.

In exemplo propoſito, cum motus cometæ in longitudinem major viſus ſit, quam in latitudinem, poſitiones *falſi* fieri ſupponemus in diſtantiis curtatis SN, & SM, & ſeu ex conjectura, ſeu ex calculo prævio & rudiore, facta diſtantia ſolis a terra = 1, aſſumi SN = 0,879, & SM = 0,957. En autem calculi ordinem!

I. Suppositio SN=0,879, SM=0,957.

In triangulo NSL eſt: *ut aſſumpta diſtantia curtata* SN *ad diſtantiam ſolis a terra* SL, *ita eſt ſinus anguli elongationis* NLS *ad ſinum anguli ad cometam* LNS. Reperitur hic 105° 42′ 48″, & hinc habetur angulus ad ſolem NSL 15° 50′ 8″, qui additus ad longitudinem terræ L 5^s 14° 27′ 44″ dat longitudinem cometæ heliocentricam 6^s 0° 17′ 52″.

Observa I. Utrum angulus ad ſolem addi, vel ſubtrahi debeat a longitudine terræ, pendet a poſitione rectæ SN comparate ad ſigna Zodiaci.

Observa II. Summa ex logarithmo diſtantiæ Solis a terra, & logarithmo ſinus anguli elongationis, præbet logarithmum conſtantem, cujus uſus eſt in omnibus ſuppoſitionibus deinceps faciendis in valore rectæ SN.

Quæratur latitudo heliocentrica cometæ ex hac analogia: *ut ſinus anguli ad terram* NLS, *ad ſinum anguli ad ſolem* NSL, *ita tangens latitudinis obſervatæ n* LN *ad tangentem latitudinis heliocentricæ* NSn (479). Invenitur 12° 31′ 42″ borealis.

Observa III. Subtracto logarithmo anguli ad terram ex logarithmo tangentis latitudinis obſervatæ, habetur logarithmus conſtans, cujus in omnibus ſuppoſitionibus reliquis uſus eſt.

Inve-

Inveniatur radius vector Sn ex analogia : *ut cosinus latitudinis heliocentricæ* nSN *est ad radium, ita distantia curtata* SN *ad radium vectorem* Sn; cujus logarithmus erit 9,954455.

In triangulis SMK, mKM ex iisdem operationibus, inveniantur similiter logarithmi constantes, longitudo heliocentrica cometæ $5^s\ 2^\circ\ 36'\ 33''$, ejusdem latitudo heliocentrica $52^\circ\ 3'\ 38''$, & logarithmus radii vectoris S m 0,192159.

Construatur novum schema (Fig. 80), in quo ENC exhibeat dimidium eclipticæ, cujus polus in P : in N & M sint binæ longitudines heliocentricæ; ductis duobus circulis latitudinis PN, PM, notentur in n & m loca heliocentrica cometæ ad superficiem sphæræ cœlestis relata, ita, ut arcus Nn, Mm designent latitudines heliocentricas. Concipiatur per n & m semicirculus maximus ODB in plano orbitæ cometæ, ad quem nempe orbita e sole visa in superficie sphæræ refertur. Ex differentia longitudinum heliocentricarum habetur arcus MN, sive angulus mPn; & in triangulo sphærico mPn sciuntur latera nP $77^\circ\ 28'\ 18''$, mP $37^\circ\ 56'\ 22''$, cum angulo comprehenso mPn $27^\circ\ 41'\ 19''$. Invenitur itaque nm, mensura anguli ad solem comprehensi a duobus radiis vectoribus cometæ, scilicet $45^\circ\ 22'\ 8''$.

Quando circumstantiæ suadent, quod cometa tempore inter duas observationes (quæ in præsente calculo adhibentur) interjecto transierit per perihelium, arcus mn est summa duarum anomaliarum verarum cometæ in sua orbita parabolica utrinque a linea apsidum positarum; at si videatur vel jam ante observationem primam per perihelium transivisse, vel transiturus post alteram, idem arcus est differentia duarum anomaliarum verarum cometæ. Est autem anomalia minor semper ex eadem parte, ex qua est radius vector minor.

Utraque autem hæc anomalia semper reperitur hac methodo generali: *Logarithmus minoris radii vectoris subtrahatur ex logarithmo majoris; harum semidifferentiæ characteristica augeatur* 10, *quæratur, cujus arcus tangens huic logarithmo conveniat. Ab arcu invento subtrahantur* 45°, *logarithmo tangentis residui, addatur logarithmus cotangentis quartæ partis arcus* mn, *erit summa logarithmus tangentis alicujus anguli, cujus summa cum una quarta parte arcus* mn *est anomalia dimidia vera major, & differentia ab eadem quarta parte arcus* mn *anomalia dimidia minor quæsita.*

Itaque subtracto 9,954455 ex 0,192159 habetur 0,237704; & hujus dimidium additis 10 ad characteristicam 10,118852 est logarithmus tangentis $52^\circ\ 44'\ 38''$: ablatis 45°, logarithmo tangentis residui $7^\circ\ 44'\ 38''$ addatur logarithmus cotangentis $11^\circ\ 20'\ 32''$, quartæ nempe partis de $45^\circ\ 22'\ 8''$, & habebitur logarithmus tangentis $34^\circ\ 8'\ 5''\frac{1}{2}$; e quo habentur dimidiæ anomaliæ, altera $22^\circ\ 47'\ 33''\frac{1}{2}$,

alte-

altera 45° 28′ 27″½, conſequenter ipſa anomalia pro puncto *n* 45° 35′ 7″, & pro *m* 90° 57′ 15″.

Calculetur diſtantia perihelia hujus orbitæ ex hac proportione (209): *quadratum radii eſt ad quadratum coſinus unius ex his anomaliis dimidiis veris, ita radius vector eidem adjacens ad diſtantiam perihelii.* In noſtro exemplo invenitur logarithmus diſtantiæ periheliæ 9, 883835.

E tabula generali N. 214 accipiantur dies, & partes milleſimæ, reſpondentes in parabola (cujus diſtantia perihelia = 1) anomaliis veris inventis: invenientur 36, 579 d. pro 45° 35′ 7″, & 112, 4 d. pro 90° 57′ 15″. Differentia horum dierum eſt 75, 821, quæ reducatur ad eam, quæ convenit parabolæ noſtri cometæ (aut ſi quidem transitus per perihelium accidiſſet tempore inter obſervationes intermedio, reducenda fuiſſet ſumma dierum).

Fit autem hæc reductio (212) addito logarithmo differentiæ dierum (aut ſummæ) repertæ ad dimidium tripli logarithmi diſtantiæ periheliæ. Sic logarithmo 1, 879789 de 75, 821 d. addito ad 9, 883835, hujusque medietatem 9, 941917, ſumma 1, 705541 eſt logarithmus de 50, 762 d.

OBSERVA. Quando anomaliæ veræ majores ſunt 90°, partes decimales diei non ſat exacte acquiruntur e partibus proportionalibus tabulæ generalis. Ut itaque major ſit accuratio, hanc regulam generalem ſequi oportet: *logarithmo conſtanti 1, 9149328 addatur logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ veræ. Item triplo ejusdem tangentis logarithmi addatur logarithmus conſtans 1, 4378116, Numeri utrique logarithmorum ſummæ reſpondentes addantur inter ſe, erit ſumma numerus dierum accuratus, qui conveniunt anomaliæ veræ.*

Itaque ad 1, 914933 addendus eſt logarithmus 0, 007233 tangentis 45° 28′ 37″½; & triplo logarithmo ejusdem tangentis 0, 021699 logarithmus conſtans 1, 437812: reperiuntur 83, 592, & 28, 808, qui competunt ſummis logarithmicis 1, 922166, & 1, 459512. Unde 112, 400 d. accurate reſpondent anomaliæ veræ 90° 57′ 15″ in parabola, cujus diſtantia perihelia = 1. Per partes proportionales tabulæ obveniſſent 112, 4018 d. In calculis ſequentibus regula expoſita uſi ſumus, quæ nihil aliud eſt, quam æquatio $\frac{3}{4}at + \frac{1}{4}at^3 = b$, in qua a = 109, 6154 d. tempori nempe digreſſionis a perihelio usque ad 90° in parabola, cujus diſtantia perihelia = 1; b tempus quæſitum, & t tangens dimidiæ anomaliæ veræ datæ.

Collatis jam illis, quæ præcedentibus calculis reperta ſunt, intelligitur, parabolam inventam duabus tantummodo primis conditionibus facere ſatis, cum tempus inventum 50, 762 d. majus ſit 0, 033½ d. intervallo inter obſervationes adhibitas, nempe 50, 728½ d.

Videndum igitur, quid mutationis in alterutrius diſtantiæ curtatæ valore aſſumpto faciendum ſit, ut obtineatur parabola, quæ etiam tertiam conditionem expleat. Unde diſtantiam SM quantitate o, oo1 minuamus, ut appareat, quæ inde mutationes in novæ parabolæ elementis oriantur, ac utrum ad vera propius acceſſura ſint, an potius longius aberratura.

II SUPPOSITIO. SN=0,879, SM = 0,956. Reſumpto eodem, quo prius, ordine univerſo calculo reperiuntur longitudines heliocentricæ $6^s\ 0°\ 17'\ 52''$, & $5^s\ 3°\ 43'\ 11''$; latitudines heliocentricæ $12°\ 31'\ 42''$, & $52°\ 1'\ 54''\frac{1}{2}$; logarithmi radiorum vectorum 9,954455, & 0,191424; arcus NM (Fig. 80) $27°\ 34'\ 41''$; arcus *nm* $45°\ 18'\ 13''$; anomaliæ veræ $45°\ 32'\ 3''$, & $90°\ 50'\ 16''$; dies correſpondentes 36, 529 & 112, 056; logarithmus diſtantiæ periheliæ 9,883997; denique tempus reductum, quo deſcribi potuit arcus *nm*, 50, 594 d. Hinc intelligitur, imminutione 0,001 rectæ SM imminui tempus 0, 168 d. Fiat igitur $0,168 : 0,001 = 0,033\frac{1}{2} : 0,0002$; nempe diſtantiam SM tantummodo 0,0002 imminui oportuit, ut obtineretur parabola tertiæ conditioni ſatis faciens. Quare iteretur calculus, & fiat

III SUPPOSITIO. SN = 0, 879, SM = 0,9568. Invenientur hic longitudines heliocentricæ $6^s\ 0°\ 17'\ 52''$, & $5^s\ 2°\ 37'\ 53''$; latitudines $12°\ 31'\ 42''$ & $52°\ 3'\ 16''\frac{1}{2}$. Logarithmi radiorum vectorum 9,954455, & 0,192009; arcus NM $27°\ 39'\ 59''$; *nm* $45°\ 21'\ 22''$; anomaliæ veræ $45°\ 34'\ 28''$, & $90°\ 55'\ 50''$; tempora iis reſpondentia $36,568\frac{1}{2}$ d. & 112, 330 d. Logarithmus diſtantiæ periheliæ 9,883870; tempus reductum $50,728\frac{1}{2}$ d; idem accurate cum intervallo obſervationum.

Supereſt, ut videatur, num inventa parabola uti tres priores, ita & quartam habeat conditionem. Quem in finem determinentur reliqua omnia elementa theoriæ cometæ in hac parabola moti. Et imprimis in triangulo *mn*P (Fig. 80) quæratur angulus *mn*P e tribus lateribus *m*P $77°\ 28'\ 18''$, *n*P $37°\ 56'\ 43''\frac{1}{2}$, & *mn* $45°\ 21'\ 22''$, qui invenietur $23°\ 39'\ 33''$. Tum in triangulo *n*ND ad N rectangulo inveſtigetur ND $5°\ 23'\ 45''$, *n*D $13°\ 38'\ 14''$, & angulus ND*n* $66°\ 56'\ 14''$, qui eſt inclinatio orbitæ cometæ ad planum eclipticæ; D eſt locus nodi aſcendentis, ad quem cometa aliquantum ante 4 Martii pervenire debuit.

Quoniam itaque motus cometæ heliocentricus eſt retrogradus, ND $5°\ 25'\ 45''$ addatur longitudini heliocentricæ cometæ die 4 Martii, quæ eſt $6^s\ 0°\ 17'\ 52''$, habebitur locus ☊ $6^s\ 5°\ 43'\ 17''$. Ex hoc loco ☊ ſubtrahatur D*n* $13°\ 38'\ 14''$, relinquetur $5^s\ 22°\ 5'\ 23''$ pro loco cometæ *n* in ſua orbita: & quia illic habuit anomaliam veram

ram 45′ 34′ 28″, hæc loco ejus in orbita addita dabit perihelium in 7^s 7° 39′ 51″. Denique ex ſumma $\frac{3}{2}$ logarithmi diſtantiæ periheliæ, & logarithmi de 36,568$\frac{1}{2}$ d. quibus ea anomalia confici potuit, habetur 24,486 d. intervallum reductum inter obſervationem die 4 Martii, & tempus tranſitus per perihelium, quod ſubtractum a 4 Martii 16 h. 9′ 50″, ſive 0,673$\frac{1}{2}$ d. indicat momentum tranſitus per perihelium die 8, 188 Februarii.

Ope horum elementorum methodo jam tradita calculetur longitudo Geocentrica cometæ pro die 28,569 Martii invenietur ea 2^s 18° 51′ 17, quæ quamvis tantummodo 1′ 28″ minor ſit, quam obſervata 5^s 18° 52′ 45″, non tamen ita accurata eſt, ut inventa parabola quartæ conditioni ſatisfacere cenſeri poſſit.

Ut igitur propius ad veram orbitam accedatur, retineatur SM, ut primo aſſumpta fuit, S N vero minuatur 0,001, ut quemadmodum ſuperius perſpiciatur, quæ nam inde mutationes in parabolam primo loco inventam inducantur.

IV SUPPOSITIO. SN = 0,878, SM = 0,957. In hac hypotheſi erunt longitudines heliocentricæ 6^s 0° 31′ 54″ & 5^s 2° 36′ 33″; latitudines 12° 42′ 11″ & 52° 3′ 38″; logarithmi radiorum vectorum 9,954257 & 0,192159; NM = 27° 55′ 21″; *nm* = 45° 17′ 56″; anomaliæ veræ 45° 44′ 56″ & 91° 2′ 52″; tempora correſpondentia 36,743 d. & 112,680 d. Logarithmus diſtantiæ periheliæ 9,883115; tempus reductum 50,714 d. quod a tempore obſervato differt 0,014$\frac{1}{2}$. Quare apparet, imminuta SN 0,001, minui tempus 0,048 d. Unde fiat 0,048 : 0,001 = 0, 014$\frac{1}{2}$: 0,0007 debebat igitur SN aſſumi = 0, 8783.

V SUPPOSITIO. SN = 0,8783, SM = 0,957. Longitudines heliocentricæ ſunt 6^s 0° 27′ 40″ & 5^s 2° 36′ 33″, latitudines 12° 39′ 2″ & 52° 3′ 38″: logarithmi radiorum vectorum 9,954316 & 0, 192159; arcus NM 27° 51′ 7″; *nm* 45° 19′ 20″; anomaliæ veræ 45° 41′ 45″ & 91° 1′ 5″; tempora correſpondentia 36,689 d. & 112,590 d. logarithmus diſtantiæ periheliæ 9, 883344: tempus reductum 50,729 d. ut adeo primæ tres conditiones impleantur.

Inveniantur jam elementa theoriæ in hac parabola: erit ☊ in 6^s 5° 59′ 6″; perihelium in 7^s 7° 53′ 42″; inclinatio orbitæ 66° 47′ 14″; tempus tranſitus per perihelium 8,151$\frac{1}{2}$ d. Febr. Ex his longitudo geocentrica cometæ pro die 28 Martii obtinetur 2^s 18° 45′ 14″, quæ ab obſervata deficit 7′ 31″, ideoque inventa orbita a vera trajectoria diſſidet.

Sed quoniam mutationes, quæ inducuntur in orbitas, ad ſenſum proportionales ſunt mutationibus, quæ fiunt in diſtantiis curtatis, ut obtineantur binæ diſtantiæ curtatæ parabolæ quæſitæ fiant hæ duæ

analogiæ : *ut* 6′ 3″, *differentia utriusque erroris* — 1′ 28″, *&* — 7′ 31″, *est ad errorem minorem* 1′ 28″; *ita est* 0, 0007, *&* 0, 0002, *seu utravis corrrectio in distantiis curtatis* SN, SM *facta*, *ut obtinerentur duæ parabolæ primis tribus conditionibus satisfaciendas, ad* 0, 000235, *&* 0,000065; *id est*, *ad correctiones in iisdem distantiis facientes*, *ut reperiatur parabola*, *quæ quartam etiam conditionem impleat.*

OBSERVA. Si errores e calculis prodeuntes alter fuisset in excessu, alter in defectu, primus analogiæ terminus esse debuisset *summa errorum.*

Porro ut correctiones hæ repertæ debite applicentur, conferenda est longitudo in utravis orbita calculata cum longitudine cometæ observata. Enimvero cum SN posita = 0,879 error emerserit — 1′ 28″; ea vero sumpta = 0,8787, error evaserit — 7′ 31″; evidens est, quod quo magis SN minuitur, eo magis crescat error: unde SN (ut verus valor habeatur) nempe 0,879, augenda est quantitate 0,000235, ut proinde sumi debeat = 0,879235. Consimili modo patebit, SM ponendam esse = 0,956735; ideoque fiat jam postremo

VI SUPPOSITIO. SN = 0,879235, SM = 0,956735. Inveniuntur longitudines heliocentricæ 6^s 0° 14′ 37″ & 5^s 2° 38′ 19″; latitudines 12° 29′ 17″½, & 52° 3′ 10″½; logarithmi radiorum vectorum 9, 95404, & 0, 191963; anomaliæ veræ 45° 32′ 0″ & 90° 54′ 4″; tempora, quibus conficiuntur, 36, 528 & 112, 243 dies; logarithmus distantiæ periheliæ 9, 884049; intervallum temporis reductum 50, 729 d.

Ex his reperiuntur vera elementa theoriæ, nempe nodus in 6^s 5° 38′ 29″; perihelium in 7^s 7° 35′ 13″; inclinatio orbitæ 66° 59′ 14″; tempus transitus per perihelium d. 8 Febr. 4 h. 48′ temp. med. ad Meridianum Parisinum: denique ex his elementis si calculetur longitudo & latitudo geocentrica pro 28 Martii 13 h. 39′, illa obtinetur 2^s 18° 53′ 18″, hæc 63° 3′ 57″ borealis, discrimine paucorum secundorum ab observatis. Itaque problema resolutum censeri debet.

Quidquid adhuc diximus, satis clarum e prioribus videtur; solam regulam pro inveniendis anomaliis demonstrare juverit. Itaque sit quarta pars summæ utriusque anomaliæ = a; quarta pars earundem differentiæ = x; radius vector major = b, minor = c, distantia perihelia = 1. His positis, erit anomalia vera major adjacens radio vectori b æqualis $2a + 2x$, minor = $2a - 2x$ adjacens radio vectori minori. Ex formula *radii vectoris* = $\frac{\textit{dist. perihel.}}{\cos^2 \frac{1}{2}\,\textit{anom. ver.}}$ evidens

est,

eſt, radios vectores in eadem parabola eſſe in ratione inverſa quadratorum coſinus dimidiarum anomaliarum verarum, ſive eſſe $\sqrt{b} : \sqrt{c} = cos(a-x) : cos(a+x) = cos\,a \times cos\,x + s\,a \times s\,x : cos\,a \times cos\,x - s\,a \times s\,x$ (Trig. 46). Igitur $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{b} \times s\,a \times s\,x = \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x + \sqrt{c} \times s\,a \times s\,x$; & $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x = \sqrt{b} \times s\,a \times s\,x + \sqrt{c} \times s\,a \times s\,x$. Quare eſt $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} = cos\,a \times cos\,x : s\,a \times s\,x = \frac{cos\,a}{s\,a} : \frac{s\,x}{cos\,x} = cot\,a : tang\,x$.

Jam vero (Elem. 752) ſumma duarum quantitatum eſt ad eorum differentiam, ut radius ad tangentem arcus mulctati 45°; & tangens hujus arcus invenitur diviſa majore quantitate per minorem.

ARTICULUS IV

Variæ animadverſiones in calculum cometarum tum in parabola, cum in ellipſi.

I. Si loco diſtantiarum curtatarum aſſumantur anguli ad Cometam, vel anguli commutationis, calculus nec longior evadet, nec diverſus a priore, niſi quod ordo primarum analogiarum in quavis ſuppoſitione mutetur.

II. Poſtquam inventa eſt parabola, quæ fere congruat cum tribus obſervationibus ſelectis, inutile foret aliam quærere, quæ exacte iis reſponderet. Enimvero tria illa loca aut omnino accuratiſſime obſervata ſunt, aut ad vera proxime accedunt; ſi primum, fieri nequit, ut exacte conveniant in parabolam, cum reipſa ſint in ellipſi. Si obſervationum accuratio ſumma non ſit, non niſi caſui tribuendum eſt, ſi incidant omnino in aliquam parabolam, quæ etiam tum ceteris obſervationibus perfecte ſatisfacere nequit.

III. Utile fuerit calculum rudiorem priorum quinque ſuppoſitionum præmittere, neglectis ſecundis, & angulis aſſumptis etiam pluribus gradibus, vel diſtantiis curtatis $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ aut $\frac{1}{2}$; imo & duplo, vel triplo &c mutatis. Quod ſi conferantur debite inter ſe, quæ ejuſmodi calculus offert, facile propius ad veram orbitam accedetur; & tum inſtituetur calculus accuratus, quantitatibus aſſumptis non niſi parum admodum mutatis.

IV. Quod ſi obſervationes, e quibus elementa theoriæ deducenda ſunt, ſint admodum accuratæ, ante ſupremum, & exactiorem calculum corrigendæ ſunt a parallaxi, & aberratione luminis. Adhibentur autem in hunc finem dimenſiones orbitæ veræ propinquæ, in qua invenienda eſt pro ſingulis temporibus obſervationum diſtantia cometæ a terra:

& habebitur parallaxis horizontalis ex hac analogia : ut diſtantia cometæ a terra eſt ad 1, ſive diſtantiam mediam ſolis a terra ; ita eſt parallaxis horizontalis ſolis 10″, 2 ad parallaxin horizontalem cometæ. Si parallaxis horizontalis inventa major ſit 20″, quæratur etiam parallaxis in longitudinem, & latitudinem juxta formulas alias præſcriptas. Ad inveniendam vero aberrationem luminis tum in longitudinem, tum in latitudinem, uſui erit regula a D. Clairaut tradita (788).

V. Si duæ latitudines geocentricæ in calculo adhibitæ ſint altera borealis, altera auſtralis, etiam correſpondentes latitudines heliocentricæ diverſi erunt nominis : & tum in fig. 79 puncta *n* & *m* ita collocanda ſunt, ut alterum ſit ſupra planum eclipticæ, alterum infra illud. Ceterum calculi ratio eadem eſt, ac fig. 80.

VI. Quod ſi reperta elementa theoriæ cometæ in parabolica orbita eadem fere ſint cum elementis alterius cometæ pluribus annis antea obſervati, ut prudenter exiſtimari poſſit, eum nunc rediiſſe, accipiatur intervallum temporis inter tranſitus per perihelium, ut habeatur tempus periodicum (modo ne probabiliter credi poſſit, eum interea jam ſemel rediiſſe). Hinc (170) calculetur axis major orbitæ ellipticæ, & ſubtracta diſtantia perihelia reperietur diſtantia aphelia, atque eccentricitas. Ut autem reliqua elementa in ellipſi obtineantur, ſequente methodo uti licebit.

Cometa An. 1531, 1607, 1682, ac tandem 1759 apparuit denuo. Ex computo Halley per perihelium tranſivit A. 1682 d. 14 Sept. 21 h. 33′ temp. med. ad meridianum Pariſinum. Jam ex tribus accuratis obſervationibus 1759 diebus 13 Aprilis, 1 & 21 Maii habitis ejus elementa in parabola reperiuntur ; & quidem diſtantia perihelii = 0, 5835, poſita diſtantia media ſolis a terra = 1 ; tempus tranſitus per perihelium d. 12 Martii media nocte ; hinc ejus tempus periodicum 27937½ d. axis major ellipſeos 36, 0377 ; diſtantia aphelii = 35, 4542 ; eccentricitas 17, 43535. Suppoſitis hiſce elementis quærantur tam in parabola, quam in hac ellipſi oſculatrice in eodem plano circa communem focum ſita tres longitudines & latitudines Geocentricæ cometæ pro trium obſervationum tempore. Invenietur pro 13 Aprilis longitudo in parabola 1° 7′ minor quam in ellipſi, & latitudo 3′ 46″ major in illa, quam in hac. At pro 1 Maii longitudo in parabola excedet longitudinem in ellipſi 3° 26′ 26″, latitudo vero in parabola deficiet a latitudine in ellipſi 1° 1′ 7″. Pro 21 Maii longitudo in parabola rurſus reperietur major 1° 30′ 50″, & latitudo minor 5′ 27″, quam in ellipſi. Si jam perpendatur, motum obſervatum reapſe factum fuiſſe in ellipſi illi non multum diſſimili, cujus dimenſiones jam repertæ ſunt, clarum eſt, motum verum poſſe reduci ad motum, quem cometa habuiſſet in parabola oſculatrice circa

ca eundem focum descripta, & eodem vertice, differentiis hinc emergentibus collatis cum observationibus factis. Unde sequitur, problema de inveniendis elementis theoriæ cometæ in ellipsi, reduci ad hoc, ut inveniantur elementa eadem in parabola osculatrice; eo tamen servato, ut postea iteretur calculus, ut differentiæ accutiores reperiantur, adeoque elementa certiora.

Peractis hisce calculis, sequens tabella construitur.

Tempus medium				Longitudo observata				Latitudo observata				Longitudo reducta ad parabolam				Latitudo reducta ad parabolam			
1759	H	′	″	S	G	′	″	G	′	″		S	G	′	″	G	′	″	
13 April.	16	12	0	10	20	51	42	2	8	27	A	10	19	44	42	2	12	13	A
1 Maii	9	23	20	5	22	31	40	31	26	32	A	5	25	58	6	30	25	25	A
21 Maii	9	6	0	5	7	35	22	15	4	0	A	5	9	6	12	14	58	33	A

Restat jam tantummodo, ut calculentur methodo superius exposita elementa parabolæ, quæ præbeat longitudines & latitudines ita reductas, quippe quæ eadem omnino futura sint cum illis, quæ invenientur in ellipsi, adhibitis observationibus factis.

Tempus periodicum hunc in modum repertum haud omni ex parte certum est, cum facile actione Planetarum viciniorum cometæ in ejus apparitione mutari possit. Interea tamen, etsi error plurium mensium sit, non tamen sensibiliter influit in calculum elementorum orbitæ ellipticæ, cum aberrationes ab ellipsi respectu parabolæ osculatricis, quæ mutatione temporis periodici inducuntur, sensibiles esse nequeant, nisi in distantiis admodum magnis a perihelio.



Tabu-

TABULA I Theoriæ cometarum, de quibus ſufficientes obſervationes colligi potuerunt ad invenienda elementa in orbitis parabolicis.

Annus apparitionis	Locus ☊	Inclinatio orbitæ	Locus perihelii	Logarithmus diſtant. Perihelii	Tranſitus per perih. temp. med. ad Merid. Pariſinum	Directio motus	Nomen calculatoris orbitæ	Orbitæ minus certæ
	S G M S	G M S	S G M S		D H. M			
1264	7 28 45 0	30 25 0	9 5 45 0	9. 613640	Jul. 17 6 10	Direct.	Pingré	prope
1337	2 24 21 0	32 11 0	1 7 59 0	9. 609236	Jun. 2 6 34	Retrog.	Halley	prope
1472	9 11 46 20	5 20 0	1 15 33 30	9. 734584	Febr. 28 22 33	Retrog.	Halley	prope
1532	2 20 27 0	32 36 0	3 21 7 0	9. 706803	Octo. 19 22 21	Direct.	Halley	prope
1533	4 5 44 0	35 49 0	4 27 16 0	9. 307068	Jun. 16 19 39	Retrog.	Douwes	prope
1556	5 25 42 0	32 6 30	9 8 50 0	9. 666424	April. 21 20 11	Direct.	Halley	prope
1577	0 25 52 0	74 32 45	4 9 22 0	9. 263447	Octob 26 18 54	Retrog.	Halley	
1580	0 18 57 20	64 40 0	3 19 5 50	9. 775450	Nov. 28 15 9	Direct.	Halley	
1585	1 7 42 30	6 4 0	0 8 51 0	10. 038850	Octob 7 19 29	Direct.	Halley	
1590	5 15 30 40	29 40 40	7 6 54 30	9. 760882	Febr. 8 3 54	Retrog.	Halley	
1593	5 14 15 0	87 58 0	4 26 19 0	9. 949926	Jul. 18 13 47	Direct.	La Caille	
1596	10 12 12 30	55 12 0	7 18 16 0	9. 710058	Aug. 10 20 4	Retrog.	Halley	
1618	9 23 25 0	21 28 0	10 18 20 0	9. 710100	Aug. 17 5 12	Direct.	Pingré	
1618	2 16 1 0	37 34 0	0 2 14 0	9. 579498	Nov. 8 12 32	Direct.	Halley	
1652	2 28 10 0	79 28 0	0 28 18 40	9. 928140	Nov. 12 15 49	Direct.	Halley	
1661	2 22 30 30	32 35 50	3 25 58 40	9. 651772	Jan. 26 23 50	Direct.	Halley	
1664	2 21 14 0	21 18 30	4 10 41 25	10. 011044	Dec. 4 12 3	Retrog.	Halley	
1665	7 18 2 0	76 5 0	2 11 54 30	9. 027309	April. 24 5 24	Retrog.	Halley	
1672	9 27 30 30	83 22 10	1 16 59 30	9. 843476	Mart. 1 8 46	Direct.	Halley	
1677	7 26 49 10	79 3 15	4 17 37 5	9. 448072	Maii. 6 0 46	Retrog.	Halley	
1678	5 11 40 0	3 4 20	10 27 46 0	10. 092724	Aug. 26 14 12	Direct.	Struyck	prope
1680	9 2 2 0	60 56 0	8 22 39 30	7. 787106	Dec. 18 0 15	Direct.	Halley	
1683	5 23 23 0	83 11 0	2 25 29 30	9. 748343	Jul. 13 2 59	Retrog.	Halley	
1684	8 28 15 0	65 48 40	7 28 52 0	9. 982339	Jun. 8 10 25	Direct.	Halley	

Con-

Contin. TAB. I Theoriæ Cometarum.

Annus apparitionis	Locus ☊ S G M S	Inclinatio orbitæ G M S	Locus Perihelii S G M S	Logarithmus Distantiæ Perihelii	Tranfitus per Perihel. temp. med. ad merid. Parifinum D H. M	Directio motus	Nomen calculatoris Orbitæ	Orbitæ minus certa
1686	11 20 34 40	31 21 40	2 17 0 30	9. 511883	Sept. 16 14 42	Direct.	Halley	
1689	10 23 45 20	69 17 0	8 23 44 45	8. 227612	Dec. 1 15 5	Retrog.	Pingré	
1698	8 27 44 15	11 46 0	9 0 51 15	9. 839660	Oct. 18 17 6	Retrog.	Halley	prope
1699	10 21 45 35	69 20 0	7 2 31 6	9. 871570	Jan. 13 8 32	Retrog.	La Caille	
1702	6 9 25 15	4 30 0	4 18 41 3	9. 819165	Mart. 13 14 22	Direct.	La Caille	prope
1706	0 13 11 40	55 14 10	2 12 29 10	9. 629218	Jan. 30 4 32	Direct.	La Caille	prope
1707	1 22 46 35	88 36 0	2 19 54 56	9. 934068	Dec. 11 23 39	Direct.	La Caille	
1718	4 8 43 0	30 20 0	4 1 30 0	10. 011380	Jan. 14 23 48	Retrog.	La Caille	
1723	0 14 16 0	49 59 0	1 12 52 20	9. 999414	Sept. 27 16 20	Retrog.	Bradley	
1729	10 10 32 37	76 58 4	10 22 40 0	10. 629552	Jun. 25 11 6	Direct.	La Caille	
1737	7 16 22 0	18 20 45	10 25 55 0	9. 347960	Jan. 30 8 30	Direct.	Bradley	
1739	6 27 25 14	55 42 44	3 12 38 40	9. 828388	Jun. 17 10 9	Retrog.	La Caille	
1742	6 5 38 29	66 59 14	7 7 35 13	9. 884049	Febr. 8 4 48	Retrog.	La Caille	
1743	2 18 21 15	2 19 33	3 2 41 45	9. 921690	Jan. 10 20 35	Direct.	La Caille	prope
1743	0 5 16 25	45 48 20	8 6 33 52	9. 716480	Sept. 20 21 26	Retrog.	Klinkenberg	prope
1744	1 15 46 11	47 5 18	6 17 10 0	9. 347325	Mart. 1 8 13	Direct.	La Caille	
1747	4 27 18 50	79 6 20	9 7 2 0	10. 342128	Mart. 3 7 20	Retrog.	La Caille	
1748	7 22 52 16	85 26 57	7 5 0 50	9. 924620	April. 28 19 34	Retrog.	Maraldi	
1748	1 4 39 43	56 59 3	9 6 9 24	9. 816410	Jun. 18 1 33	Direct.	Struyck	prope
1757	7 4 5 50	12 39 6	4 2 39 0	9. 530288	Oct. 21 9 42	Direct.	La Caille	
1758	7 20 50 9	68 19 0	8 27 37 45	9. 333148	Jun. 11 3 27	Direct.	Pingré	
1759	4 19 39 24	78 59 22	1 23 24 20	9. 902280	Nov. 27 2 28	Direct.	La Caille	
1759	2 19 50 45	4 51 32	4 18 24 35	9. 984972	Dec. 16 21 13	Retrog.	La Caille	
Elementa Cometæ Halleyani pro fingulis revolutionibus								
1456	1 18 30 0	17 56 0	10 1 0 0	9. 767540	Jun. 8 22 10	Retrog.	Pingré	prope
1531	1 19 25 0	17 56 0	10 1 39 0	9. 753583	Aug. 24 21 27	Retrog.	Halley	prope
1607	1 20 21 0	17 2 0	10 2 16 0	9. 768490	Oct. 26 3 59	Retrog.	Halley	prope
1682	1 20 48 0	17 42 0	10 1 36 0	9. 765295	Sept. 14 21 31	Retrog.	Halley	
1759	1 23 49 0	17 39 0	10 3 16 0	9. 766039	Mart. 12 13 41	Retrog.	La Caille	

TABULA II Exhibens correctiones Anomaliæ veræ & radii vectoris in Parabola, ut reducantur ad ellipsin ejusdem foci, & verticis.

An. Ver.	Correct. Anomal.	Correct. Rad Vect.	An. Ver.	Correct. Anomal.	Correct. Rad. Vect.	An. Ver.	Correct. Anom.	Correct. Rad. Vect
G	Addit.	Subtract.	G	Addit.	Subtract.	G	Subtract.	Subtract.
1	3. 2551	5. 8200	41	4. 7001	9. 0006	81	3. 9608	9. 4777
2	3. 5551	6. 4220	42	4. 7010	9. 0195	82	4. 0920	9. 4851
3	3. 7314	6. 7735	43	4. 7013	9. 0378	83	4. 1951	9. 4924
4	3. 8559	7. 0242	44	4. 7009	9. 0555	84	4. 2802	9. 4996
5	3. 9521	7. 2178	45	4. 6998	9. 0727	85	4. 3531	9. 5067
6	4. 0302	7. 2759	46	4. 6981	9. 0894	86	4. 4167	9. 5138
7	4. 0959	7. 5095	47	4. 6957	9. 1056	87	4. 4732	9. 5207
8	4. 1526	7. 6250	48	4. 6926	9. 1215	88	4. 5251	9. 5275
9	4. 2023	7. 7269	49	4. 6888	9. 1369	89	4. 5717	9. 5342
10	4. 2464	7. 8178	50	4. 6842	9. 1520	90	4. 6154	9. 5409
11	4. 2855	7. 8998	51	4. 6788	9. 1666	91	4. 6557	9. 5475
12	4. 3212	7. 9747	52	4. 6726	9. 1808	92	4. 6933	9. 5540
13	4. 3541	8. 0437	53	4. 6655	9. 1947	93	4. 7287	9. 5605
14	4. 3839	8. 1074	54	4. 6576	9. 2083	94	4. 7618	9. 5670
15	4. 4112	8. 1666	55	4. 6489	9. 2215	95	4. 7935	9. 5734
16	4. 4364	8. 2217	56	4. 6391	9. 2344	96	4. 8236	9. 5797
17	4. 4597	8. 2735	57	4. 6281	9. 2469	97	4. 8523	9. 5860
18	4. 4813	8. 3222	58	4. 6159	9. 2592	98	4. 8797	9. 5923
19	4. 5014	8. 3682	59	4. 6024	9. 2712	99	4. 9060	9. 5986
20	4. 5201	8. 4116	60	4. 5876	9. 2829	100	4. 9312	9. 6050
21	4. 5375	8. 4528	61	4. 5713	9. 2943	101	4. 9555	9. 6113
22	4. 5536	8. 4921	62	4. 5535	9. 3055	102	4. 9789	9. 6176
23	4. 5687	8. 5295	63	4. 5338	9. 3163	103	5. 0017	9. 6239
24	4. 5827	8. 5652	64	4. 5119	9. 3270	104	5. 0237	9. 6302
25	4. 5957	8. 5994	65	4. 4876	9. 3374	105	5. 0451	9. 6366
26	4. 6078	8. 6320	66	4. 4608	9. 3477	106	5. 0661	9. 6430
27	4. 6191	8. 6634	67	4. 4308	9. 3576	107	5. 0863	9. 6495
28	4. 6295	8. 6934	68	4. 3968	9. 3674	108	5. 1059	9. 6560
29	4. 6391	8. 7224	69	4. 3586	9. 3769	109	5. 1250	9. 6627
30	4. 6479	8. 7502	70	4. 3144	9. 3862	110	5. 1437	9. 6694
31	4. 6560	8. 7770	71	4. 2638	9. 3954	111	5. 1621	9. 6763
32	4. 6634	8. 8030	72	4. 2029	9. 4044	112	5. 1800	9. 6831
33	4. 6701	8. 8280	73	4. 1318	9. 4132	113	5. 1976	9. 6901
34	4. 6761	8. 8521	74	4. 0426	9. 4218	114	5. 2149	9. 6972
35	4. 6815	8. 8755	75	3. 9239	9. 4303	115	5. 2319	9. 7044
36	4. 6862	8. 8980	76	3. 7548	9. 4386	116	5. 2485	9. 7119
37	4. 6903	8. 9198	77	3. 4621	9. 4468	117	5. 2647	9. 7195
38	4. 6937	8. 9409	78	Subtract.	9. 4546	118	5. 2819	9. 7272
39	4. 6965	8. 9614	79	3. 4691	9. 4624	119	5. 2969	9. 7352
40	4. 6986	8. 9813	80	3. 7787	9. 4701	120	5. 3126	9. 7433

CA-

CAPUT III.

De mutationibus obſervatis in motibus Planetarum, & Cometarum.

Etſi ſuperius (§. 174 Art. XIV Append.) expoſuerimus theoriam, & generales formulas calculandi mutationes motuum Planetarum variatione rationis virium, quibus urgentur ea corpora, inductas; haud tamen hic licet nobis ea in particularibus circumſtantiis applicare, quæ univerſe diximus, ne extra principiorum Aſtronomiæ elementaris limites egrediamur. Quare hujus rei notionem tantummodo generalem adſcremus. Obſervationes recentiores tum inter ſe, tum etiam cum antiquioribus collatæ, oſtendunt 1mo, lineam apſidum in orbitis Planetariis reſpectu fixarum habere aliquem motum directum, quamvis admodum lentum; lineam item nodorum habere motum valde exiguum retrogradum. Ex quo conficitur, *debere exiguas quaſdam mutationes, ſed conſtantes, induci in rationem vis tangentialis ad vim centralem, quæ inter has vires intercedere debet, ut corpora Planetaria temporibus periodicis ſemper æqualibus deſcribant ſingula ſuas ellipſes immobiles, & invariatas in plano fixo poſitas, quarum alterum focum ſol conſtanter occupet*, eo ſcilicet modo, quem Sectione I expoſuimus.

2do Animadverſum eſt, Saturnum & Jovem, quorum volumina comparate ad alios Planetas admodum magna ſunt, & in magnis item a Sole diſtantiis revolvuntur, perturbationibus eſſe ſubjectos, quæ quidem ex parte periodicæ ſunt, cum hi planetæ ad conjunctionem inter ſe redeunt; has porro perturbationes in Saturno eſſe multo majores, ita, ut inde in tempora periodorum conſequentium etiam plurium dierum diſcrimen redundet.

Ex his, ſimilibusque animadverſionibus, maxime factis, cum accuratius in motum Lunæ inquireretur, univerſe tandem concluſum eſt, ex maxime accuratis obſervationibus ſequi evidenter, *quodvis corpus cœleſte eſſe reſpectu alterius id, quod eſt ſol reſpectu alicujus Planetæ*, hoc eſt, *quodvis corpus cœleſte eſſe originem alicujus vis centralis reſpectu omnium aliorum*, ita, ut præter primum ſuum impulſum, quodlibet ſidus urgeatur reipſa tot peculiaribus viribus centralibus, quot reliqua ſunt aſtra. Tendunt hæ vires ſingulæ in ſingula corpora cœleſtia, ſed effectus particularis cujusvis ſentiri nequit, niſi pro ratione maſſæ majoris illius ſideris, in quo hæc vis reſidet, comparatæ cum maſſa alterius, in quod agit, & ratione quadrati diſtantiæ utriusque minoris. Itaque ſingulæ hæ vires centrales exprimuntur fractione, in

qua maſſa corporis, e quo oritur vis, per quadratum diſtantiæ alterius, quod ea vi urgetur, eſt diviſa. Sol ipſe huic legi ſubeſt; ſed enim ingens ejus maſſa facit, ut ejus emotio, quamvis reapſe aliqua ſit, vix tamen percipi poſſit, dum interim motus planetarum primariorum, & cometarum circa eum revolutorum peraguntur in trajectoriis tanto magis a veris, & accuratis ellipſibus degenerantibus, quanto ſumma omnium fractionum vires centrales aliorum ſiderum exprimentium majorem rationem habet ad maſſam ſolis per quadratum diſtantiæ cujusvis planetæ ejusmodi trajectoriam deſcribentis, diviſam.

Sed quoniam planetæ orbitas ſuas diverſis in planis, ac diverſimode inter ſe inclinatis deſcribunt, directiones virium centralium, quæ in ſingulis reſident, ſunt itidem ſingulæ in diverſis planis, neque per regulas compoſitionis virium ad pauciores, quam tres, reduci poſſunt. Quare quilibet planeta ita quovis momento conſiderandus eſt, velut qui triplici ſimul vi urgeatur. Harum prima eſt *tangentialis*, natura ſua uniformis tempuſculo minimo, & quæ determinatur ex omnibus motibus, quos planeta tempuſculo præcedente habuit. Altera eſt vis *acceleratrix*, compoſita ex omnibus viribus centralibus omnium planetarum, & ad unicam reductis, cujus directio eſt recta ſita in plano, cujus poſitio determinatur per centrum ſolis, & directionem vis tangentialis. Differentia inter hanc vim ita compoſitam, & vim centralem ſimplicem, quæ in ſole tantum reſidet, quamque Articulo XIII Cap II Sect. I conſideravimus, appellatur *vis perturbatrix.* Vis tertia eſt itidem acceleratrix, quam *deturbatricem* vocabo; componitur vero rurſus ex omnibus viribus centralibus planetarum ad unicam reductis directione ad planum, de quo modo diximus, perpendiculari. Eſt hæc comparate ad priores duas in noſtro ſyſtemate planetario admodum exigua, cum plana orbitarum planetariarum modicam inter ſe inclinationem habeant, neque ſol quidquam (qui in communi horum planorum interſectione poſitus eſt) ad eam vim deturbatricem conferat.

Si planeta primis tantummodo duabus viribus eſſet præditus, iis compoſitis definiri poſſet natura trajectoriæ, quæ in eodem ſemper plano ſita ſpectari poſſet inſtar ellipſis parum admodum variabilis, quod vis centralis in ſolem vim perturbatricem immenſum excederet: atque hinc cognita ratione maſſarum aliorum planetarum, e principiis ſuperius (§. 174 Art. XIV Append.) ſtabilitis ad calculum revocari poſſet tum quantitas, cum directio motus lineæ apſidum, variatio eccentricitatis, & temporis periodici.

At enim vis deturbatrix cum reliquis ſimul in planetam agens, in cauſa eſt, ut planum hujus ellipſeos variabilis conſtans non ſit.

Fin-

Fingamus in ſyſtemate planetario planum quoddam abſolute immotum, poſitione medium inter ea omnia, ad quæ trajectoria Telluris per vim deturbatricem tranſire poteſt, vocemusque illud *planum verum eclipticæ*: Evidens eſt, cum hoc planum ſit parum admodum ad planum alterius cujusvis planetæ inclinatum, poſſe tanquam parallelum cenſeri, ut propterea vis deturbatricis directio ſit ad ſenſum ſemper perpendicularis ad planum verum eclipticæ. Jam vero quisque facile intelligit, effectum hujus vis in eo conſiſtere, ut nitatur ea directione, qua agit, planetam vel a plano vero ecclipticæ removere, vel ad illud admovere, conſequenter inclinationem arcus exigui, quem tali tempuſculo planeta deſcribit, ad planum verum eclipticæ mutare. Poſitio itaque plani, in quo eſt planetæ trajectoria, variatur e proportione quantitatis vis deturbatricis, & quidem in eam partem, verſus quam vis illa exeritur. Exempli cauſa dum vis deturbatrix planetam admovet plano vero eclipticæ, planeta citius attingit ſuum nodum, quam citra eam vim, ſive, quod eodem redit, nodus verſus planetam promovetur celeritate exigua quidem, ſed quæ creſcit, minuitur, aut penitus evaneſcit, prout actio vis deturbatricis augetur, decreſcit, aut nulla eſt. Atqui hoc ſi fiat, nodus nequit verſus planetam moveri, niſi tendat in plagam oppoſitam illi, quam motus planetæ ſpectat: atque adeo ſi motus heliocentricus planetæ directus ſit, motus nodi ſemper erit aut retrogradus, aut nullus; & ex oppoſito quando motus heliocentricus ſideris eſt retrogradus, qualis in bene multis cometis deprehenditur, motus nodi erit directus. Contrarium eveniret, vi deturbatrice planetam a vero plano eclipticæ dimovente.

Atque ex hac virium compoſitione unice petendæ ſunt cauſæ omnium perturbationum motuum cœleſtium: ſingularum nempe prius efficacitas quærenda, tum omnes ſimul colligendæ ſunt, ſi quis non modo eas aberrationes explicare velit, quæ jamjam obſervatæ ſunt, verum etiam alias prædicere, quæ deinceps ſeſe prodent. At enim quis non vel e paucis hiſce, quæ diximus, videat, quantum laboris, ſagacitatis, & experientiæ verſandi in omnem partem Analyſin maxime ſublimem, id genus diſquiſitiones poſcant? Et nihilominus cum fieri vix poſſit, ut plurium, quam trium, corporum in planis diverſis ſitorum vires centrales accurate ſimul combinentur, inveſtigatio inæqualitatum planetæ, aut cometæ fructu caret, niſi ſingulæ perturbationes, aliæ poſt alias, quæ ab actione ſingulorum aliorum planetarum pendent, ad calculum revocentur, expendaturque, quantum quævis mutationis in vim centralem verſus focum, quem ſol occupat, inducere poſſit.

Illuſtrioribus tantummodo Geometris adhuc licuit id genus problemata, quorum argumentum ejusmodi ſit perveſtigatio, cum ſucceſſu aggredi. Scilicet Eulerus mutuas Jovis, & Saturni perturbationes explicatas dedit; Clairaut oſtendit, cometæ Annis 1531, 1607 & 1682 conſpicui periodos inæquales eſſe debuiſſe, quæque 913½ & 898½ menſium fuerint, poſtremam autem, qua labente Sæculo rurſus redderetur aſpectabilis, 919 menſes requirere; id, quod eventus comprobavit. Alembertus (& poſt hunc Eulerus, & Simpſon) exacte demonſtravit præceſſionem æquinoctiorum, quin ipſas etiam ejus variationes intra 18 annorum periodum motui nodorum Lunæ analogas, quas nempe obſervationibus detexerat Bradleyus. Iidem quatuor primi ſubſelii Geometræ veram omnium anomaliarum lunæ theoriam condiderunt. Eulerus oſtendit, cur obliquitas eclipticæ lentæ cuidam imminutioni ſit obnoxia, evicitque eam in præſens per centum annos ad 47″ pertingere, ſed inæqualem eſſe ſæculis a labente remotioribus. Mac-Laurinus, Eulerus, Bernoullius ex hujus theoriæ principiis phænomena, qualia obſervantur, æſtus maris reciproci deduxerunt. Omnia fere quidem hæc problemata jam antea a Newtono reſoluta ſunt, at methodo quadam vaga, nimiſque indirecta. Verum reſolutiones, de quibus modo diximus, legem generalem virium centralium adverſus omnes objectiones, quibus antea vexari ſolebat, in tuto collocarunt.

Pag. 235 §. 698. *Poſt hunc* §. *ſequentia adde.* Obſervatur 1mo generatim, lunæ celeritatem augeri aut minui, ut ejus diameter apparens augetur, vel minuitur, conſequenter etiam ut ejus diſtantia a terra decreſcit, vel creſcit. Et quoniam limites maximæ, minimæque celeritatis ſunt in punctis ſuperficiei ſphæræ cœleſtis ad ſenſum oppoſitis, hæc inæqualitas citra dubium oritur ex eccentricitate orbitæ lunaris: exhibetur vero in calculo *per æquationem centri.* 2do Quantitates abſolutæ celeritatum maximæ & minimæ in una revolutione obſervatæ non ſunt eædem in ſequente: & animadverſum eſt, quod quo ſol magis eſt elongatus a linea apſidum lunæ (in cujus nempe lineæ extremis ſunt termini maximæ illius & minimæ celeritatis) eo major ſit inæqualitas inter extremas haſce velocitates. Ex quo ſequitur, primam inæqualitatem lunæ eſſe obnoxiam alteri inæqualitati annuæ, pendenti a poſitione lineæ apſidum lunæ reſpectu ſolis. Appellant hanc ſecundam inæqualitatem *evectionem Lunæ*, quæ nequidem (uti nec prima) antiquos Aſtronomos Græcos latuit: verum ultra has illi progreſſi haud ſunt.

3^tia^. Etſi linea apſidum in elongatione 45° a ſole poſita, ſecundæ inæqualitati locus eſſe non videatur, ac prima deberet eandem æquationem dare, ideoque & eadem celeritas lunæ eſſe in ſyzygia & quadratura; nihilomi-

hilominus tamen notavit Tycho - Brahe, velocitatem in syzygia majorem. Quare recipienda fuit tertia inæqualitas in theoria lunæ, quæ ejus *variatio* dicitur. Ejus æquatio in quadraturis, & syzygiis nulla est; sed maxima in punctis intermediis, sive *octantibus* lunæ.

4to Cum Astronomi sub principium superioris sæculi intervalla temporum inter eclipses cum cura, & exacte observatas contulissent, deprehenderunt, revolutiones periodicas lunæ haud esse æque longas, nisi quæ iisdem anni tempestatibus fiunt. Longissimas eas repererunt, quæ fiunt mensibus Decembri & Januario; quæ vero contingunt Junio & Julio, brevissimas. Causam hujus inæqualitatis alii tribuebant revolutionibus diurnis Telluris, quam velocius circa axem converti existimabant in perihelio, quam dum versatur in aphelio. Verum præterquam quod hæc opinio pugnet cum theoria rotationis planetarum superius exposita, penitus eversa est experimentis horologiorum pendulis instructorum. Alii discriminis rationem inde petendam putarunt, quod luna facilius, difficiliusve circa terram revolvatur, prout hæc longius, propiusve a sole abest. Sed quidquid de hoc sit, observata inæqualitas tres exiguas æquationes annuas requirit, proportionales æquationi centri solis. Una harum pertinet ad motum lunæ in sua orbita; altera ad motum ejus apogæi; tertia ad motum ejus nodi.

§. 699. V. Planum orbitæ lunæ non semper eadem quantitate inclinatur ad planum elipticæ; & primus observavit Tycho, latitudines maximas lunæ, quæ in quadraturas incidunt, vix 5° æquare, cum tamen ad 5° 18′ ascendant, dum in syzygias incidunt.

700. VI. Distantia lunæ a terra ex ejus parallaxibus observatis deducta, mutatur a 55,72 usque ad 64, 74 semidiametros æquatoris terrestris. Distantia ejus media æquat 60, 23 ejusmodi semidiametros, quarum singulæ 19686078 ped. Reg. Paris. fere continent, uti ex mensuris in Peruvio captis deducitur; atque hinc distantiæ lunæ a terra media est circiter 1185692478 pedum, sive si numero rotundo uti velimus, 1185700000 pedum.

801. VII. Luna est fere 340 vicibus propior telluri, quam sol; quippe cum solis distantia media a terra sit plus quam 20000 semidiametrorum terrestrium.

702. VIII. Luna est saltem &c, *adde in fine*: imo multæ suppetunt rationes existimandi, massam lunæ esse fere $\frac{1}{70}$ massæ Telluris.

Pag. 236 §. 705. *de hoc articulo notet Lector, adhibendam esse distantiam mediam lunæ a terra, ut* §. 700 *est definita. Hinc aliquod exiguum discrimen in calculo oritur, sed quod ad summam rei nihil facit.*

Pag. 239 *Lin.* 15 & 16 *deleantur* ST, vel DL — ST : ST = 2 HL : ST; & hinc DL — ST = 2 HL, *ac horum loco inserantur sequentia*,

tia, ST — 2 HL, & hinc $DL - ST = \frac{ST \times 2HL}{ST - 2HL}$; & peracta divisione, $DL - ST = 2HL + \frac{4HL^2}{ST - 2HL} = 2HL$ tantum, propter terminum $\frac{4HL^2}{ST - 2HL}$ prope nullum.

Pag. 241 §. 728 *Lege*: cum distantia lunæ a sole circiter $\frac{1}{178}$ minor sit &c.

Pag. 243 §. 739 *Adde*: atque hæc est quarta inæqualitas lunæ.

Pag. 245 §. 744 *Adde*. Non licet nobis, omnes hasce variationes minutim expendere, tum quod ultra brevitatis præfixæ limites excurrere necesse foret, tum quod secundum theoriam recentius de luna constitutam haud amplius supponatur orbita lunæ manere elliptica, quemadmodum id sumpserunt Halleyus & Newtonus post Horroxium. Id tantummodo observamus, in hac hypothesi ex principiis alias stabilitis, neglecto effectu vis per LB expressæ, & habita solum ratione vis LE, ad Halley & Newtoni exemplum, *incrementum, & decrementum eccentricitatis orbitæ lunæ respectu primæ ejus conditionis, & magnitudinis reperiri; motum lineæ apsidum tam directum, quam retrogradum, celeritatisque illius augmentum ac decrementum, pendere a prolongatione, aut contractione axis majoris orbitæ respectu primi status, quem haberet seclusa perturbatione.*

Pag. 249 §. 758 *lege*: Interea tamen hæ inæqualitates in motu telluris annuo exiguæ sunt, quippe quæ alias in motu apparente solis perciperentur. Inæqualitates lunæ, quæ ex combinatione gravitatis mutuæ lunæ, solis, & telluris oriuntur (non habita ratione ejus, quæ ab eccentricitate provenit) & quarum summa ad duos & dimidium fere gradum exurgit, non essent nobis sensibiles, nisi tanta esset lunæ ac terræ vicinia; itaque eædem inæqualitates e sole spectatæ 340 vicibus minores videri debent, consequenter 26″ aut 27″ summum, Si igitur luna omnes suas inæqualitates in terram actione sua transferret, motus annuus apparens solis inde non posset plus turbari, quam 27″, quæ quantitas exigua prorsus est. Verum cum luna sit 70ies minor quam terra, manifestum est, actione lunæ in terram has inæqualitates multo minores effici.

§. 759 *Lin.* 6 *loco* 10 vel cum maxima est, 12 secundorum, *lege* 8″½ cum maxima est.

Pag. 256 §. 782 *Post hunc* § *adde*. Præter hanc deviationem alia adhuc est, cujus ratio habenda, quando longitudines stellarum reducendæ sunt ad annos ab epocha magis distantes. Notavimus enim, obliquitatem eclipticæ intra sæculum 46″ ferre minui; & theoria

mo-

motus, conſtansque poli ubivis altitudo ſuadent, polum eclipticæ ſemper paullum accedere ad polum æquatoris. Ex quo liquet, ea imminutione non affici aſcenſionem rectam, & declinationem fixarum, ſed tantum earum longitudinem, & latitudinem. Jam vero ope formularum differentialium (Trigon. 178 & 177), poſita aſcenſione recta, & declinatione conſtante, facile invenientur mutationes in longitudinem & latitudinem competentes variationi datæ obliquitatis eclipticæ.

Pag. 267 *poſt* §. 818 *adde*: Ut major habeatur accuratio, calculandæ ſunt parallaxes in ſphæroide ad polos depreſſo (434 Append.), quæ methodi rationem non mutant, ſed tantum calculi laborem aliquantum augent. Quomodo res hæc peragenda, hic non indicamus, cum id jam loc. cit. præſtiterimus. Obſervavimus etiam idem in *diſpoſitione calculi* mox ſubjungenda. Monemus tantummodo, ſi in ellipſi (Fig. 77. Append.) CQ & CP exprimantur numeris integris unitate differentibus, uti 215 & 214, haberi $OK = \frac{CQ + f \text{ latit.}}{CP}$, & $CK = \frac{2 f \text{ latit.}}{CP}$.

Pag. 276 §. 822 *adde*. Eadem methodus adhiberi poteſt, dum tranſitus planetarum inferiorum per diſcum ſolis calculandus eſt: & ſiquidem ratio eorum parallaxeos habenda ſit, accipienda erit pro parallaxi planetæ differentia parallaxeos horizontalis planetæ, & ſolis. Conſtructio Graphica eadem fieri poteſt, quæ pro eclipſibus ſolis. At ſi parallaxeos planetæ nulla ſit habenda ratio, & calculus & conſtructio graphica ab iis non differet, quæ pro eclipſibus lunæ adhibentur, modo loco umbræ ſubſtituatur diſcus ſolis.



Dispositio Calculi Eclipsis Solis pro die 25 Octob. An. 1753.

Temp. medium	20h. 20′	20h 50′	21h 20′	21h 50′	22h. 20′	22h. 50′
locus verus ⊙	213° 4′ 32″	213° 5′ 47″	213° 7′ 2″	213° 8′ 17″	213° 9′ 32″	213° 10′ 48″
locus verus ☾	211 47 0	212 4 42	212 22 25	212 40 8	212 57 51	213 15 35
Dist. ☾ a polo B	89 32 43	89 31 5	89 29 27	89 27 49	89 26 11	89 24 33
Parall. cor. ☾	58 31	58 31	58 30	58 30	58 29	58 29
Tem.med.in gr.	305 0	312 30	320 0	327 30	335 0	342 30
Longit. med. ⊙	214 50	214 51	214 52	214 53	214 54	214 56
Pun.æq.in mer.	159 50	167 21	174 52	182 23	189 54	197 26
Punct. culmin.	158 11	166 15	174 24	182 36	190 47	198 54
An.ecl.cum mer.	68 2	67 7	66 37	66 32	66 53	67 39
Decl.punct.cul.	8 32 B	5 26 B	2 14 B	1 2 A	4 17 A	7 25 A
alt.punct.culm.	49 41	46 35	43 23	40 7	36 52	33 34
altit. nonages.	53 7	50 43	48 9	45 27	42 38	39 43
Nonagesimus	140 34	146 3	151 38	157 18	163 9	169 14
Dist. ☾ a nonag.	71 13	66 2	60 44	55 22	49 49	44 2
Paral. in long.	44 50	41 54	38 32	34 48	30 42	26 23
Paral. in latit.	35 24	37 24	39 23	41 23	43 24	45 24
Longit.appar. ☾	212 31 50	212 46 36	213 0 57	213 14 56	213 28 33	213 41 58
Lat. appar. ☾ A	8 7	8 29	8 50	9 12	9 35	9 57
Correct. longit.	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8
Correct. latitud.	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23
Long.ap. ☾ red.	212 31 50	212 46 28	213 0 49	213 14 48	218 28 25	213 41 50
Lat. ap. ☾ red.	7 44	8 6	8 27	8 49	9 12	9 34
diff.long. ⊙ & ☾	+ 32 50	+ 19 19	+ 6 13	— 6 31	— 18 53	— 31 2
Dist. centrorum	33 44	20 57	10 29	10 58	21 1	32 28
Altit. ☾ circiter	14 10					26 38
Semid. horiz. ☾	16 8					16 8
Semid.appar. ☾	16 12		16 14			16 16
Semidiam. ⊙	16 11		16 11			16 11
Summa semidia.	32 23		32 25			32 27

	Temp. med.	Temp. vero & civili
Initium	20 h 23′ 1″	die 26 Octobr. 8 h. 38′ 51″ mane
Medium	21 33 26	9 49 16
Finis	22 49 58	11 5 49

Quantitas 8 dig. 31 minut. ex parte Australi Solis.

Pag. 280 § 852 *adde.* Fieri quoque potest, ut sol habeat motum translationis in spatio universi absoluto, id, quod motus particularis stellarum magis illustrium suadere videtur. Verum hoc conjecturæ meræ limites non excedit, quam dies cum longa observationum admodum subtilium serie, vel confirmabit, vel evertet.

Pag.

Pag. ead. §. 853 *adde*. Certiores de hac re essemus, si antiqui Astronomi observationes tam exactas nobis reliquissent, ut hodie fiunt. Itaque notitia certior de medii ætherei resistentia futuris reservata est sæculis.

Corrigenda in Lectionibus Astronomiæ.

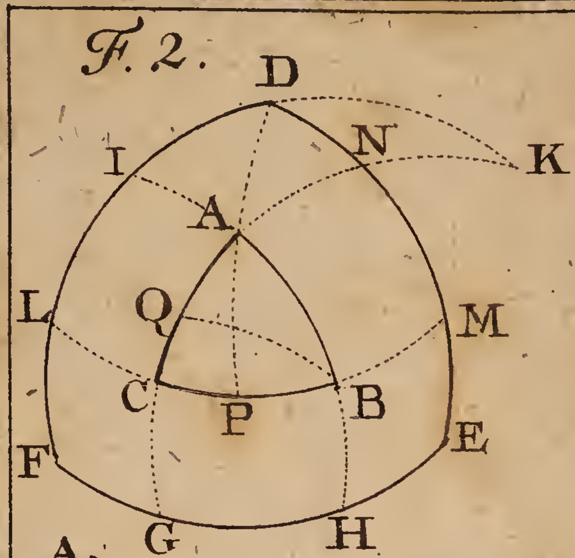
Pag. 6 lin. 37 *loco* DBC = ECB *legatur* BDC = CEB
Pag. 25 Num. 166 *in tangentis* BC *utriusque formulæ denominatore loco signi* — *fiat* +.
30 *Ad Notam addatur.* Verum fit hoc ob neglectas binas postremas notas logarithmorum.
48 Lin. 11 & sequentibus *loco* $\frac{\infty}{u}$ *legatur* $\frac{u}{\infty}$.
111 Lin. 27 *loco* borealem *lege* Australem
222 Lin. 35 *loco* dum primarius *lege* dum sol & primarius

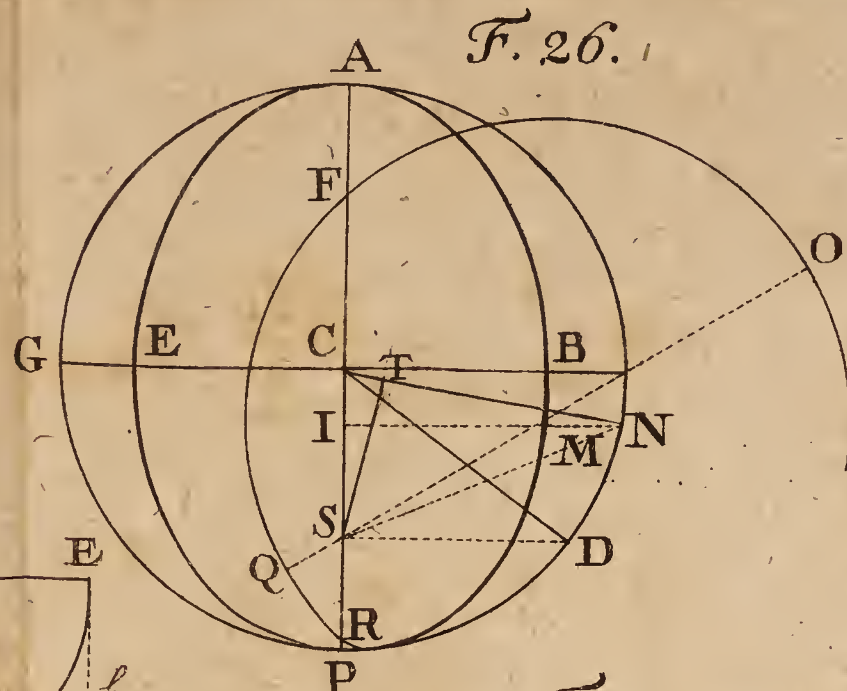
ERRATA IN APPENDICE.

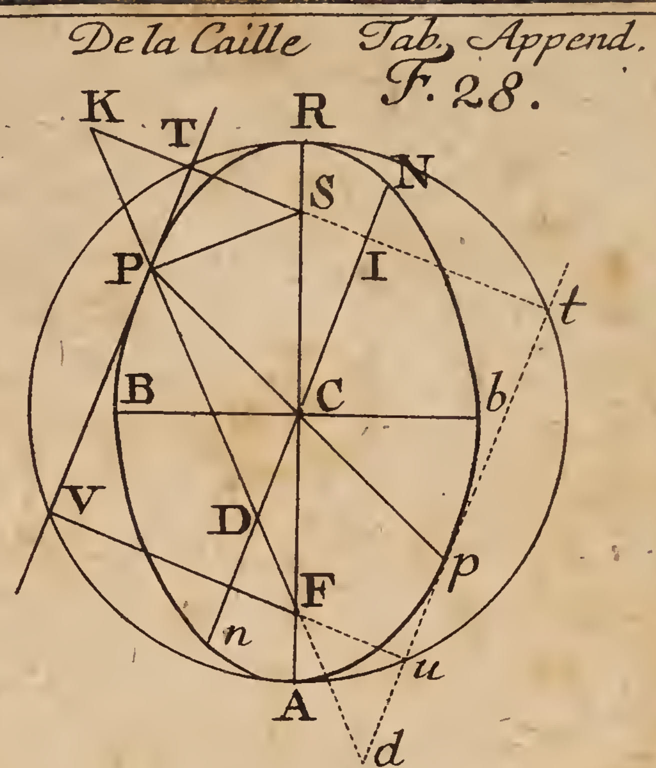
Pag. 8 *Distantia Mercurii a prima stella Arietis pro* Aug. die 19 *ponatur* $9^s\ 11^\circ\ 3'\ 46''$.

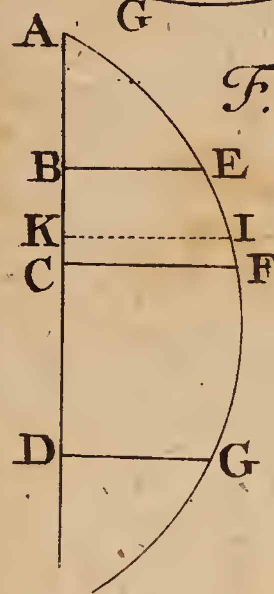
			ERRATA		CORRIGE
Pag.	27	Lin.	19 ratione	— —	rotatione
	29		2 rectum	— —	rectam
	35		24 tellulis	— —	telluris
	37		10 *oblig.* —	— —	*obliq.*
	38		2 fit fiat	— —	si fiat
	45		27 1° 55″	— —	1° 55′
	48		*ult.* logarithmum	—	logarithmus
	53		*antepenult.* Maii	— —	Martii
	54		12 *n*NL —	— —	LNS
	56		31 *harum* —	— —	*horum*

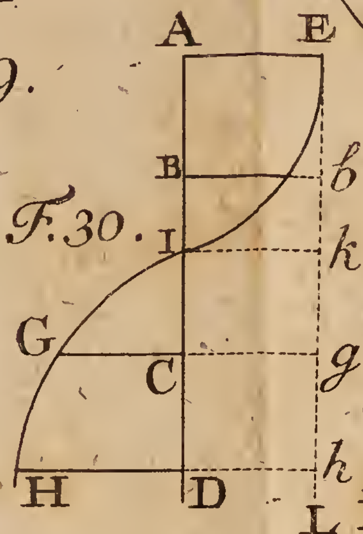
Pag. 64 *Cometæ An.* 1556 *transitus per perihel. ponatur* April. d. 21 20 h. 12′; *primi vero An.* 1618 *transitus contingit* Aug. d. 17 3 h. 12′.
Cometarum item An. 1593 & *primi* 1618 *orbitæ sunt minus certæ.*

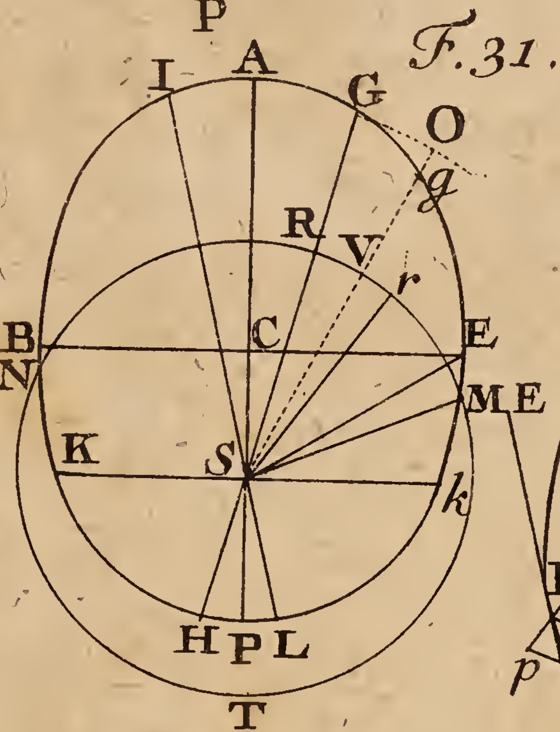

F. 2.
D
N
K
I
A
L
Q
M
C
P
B
F
E
G
H

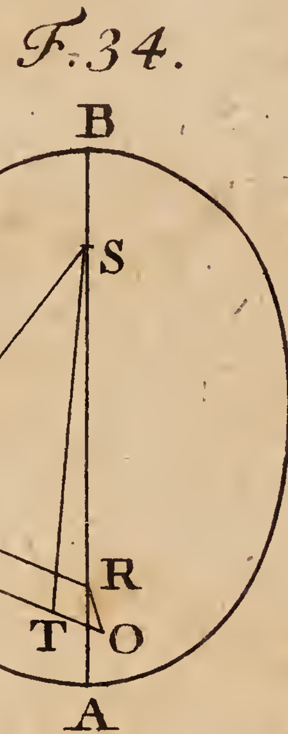

F. 26.
A
F
O
G
E
C
T
B
I
M
N
S
Q
D
R
P

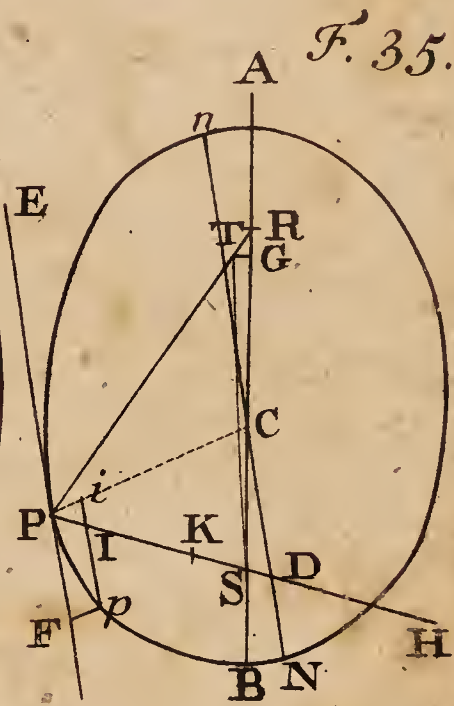

F. 28.
K
T
R
N
S
P
I
t
B
C
b
V
D
p
F
n
u
A
d

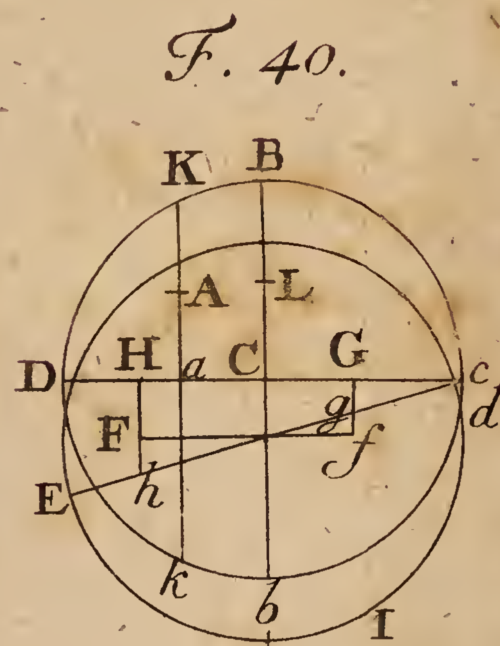

F. 29.
A
B
E
K
I
C
F
D
G

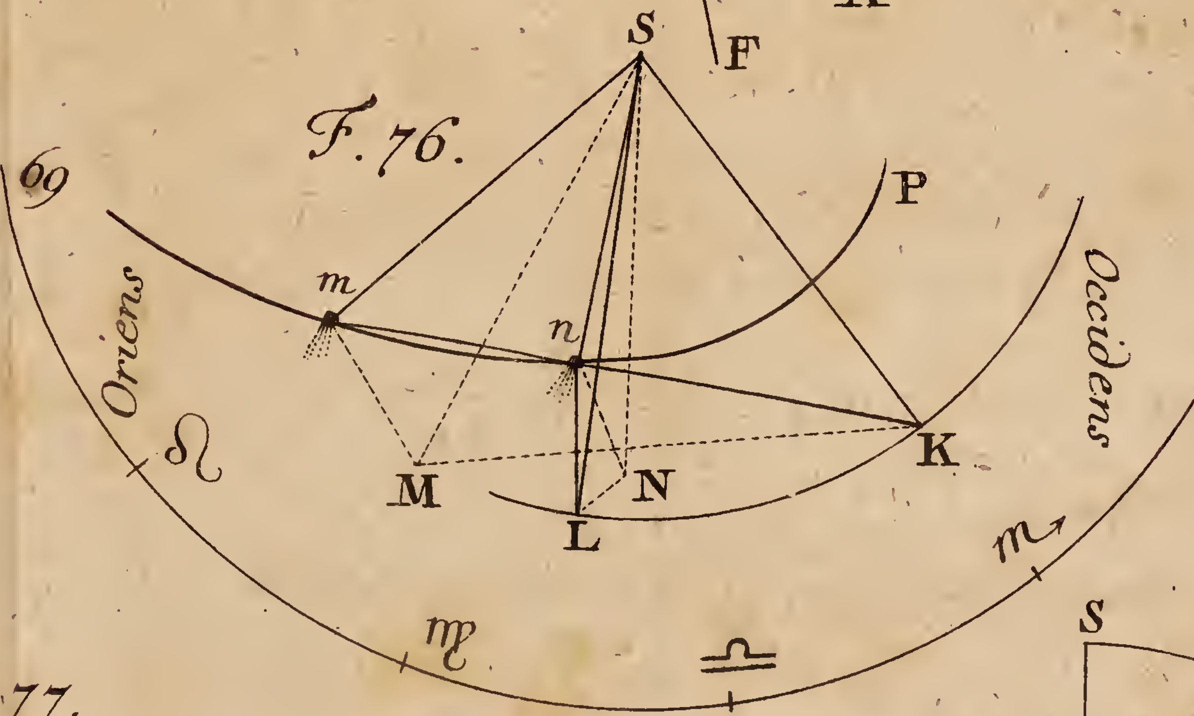

F. 30.
A
E
B
b
I
k
G
C
g
h
H
D
L

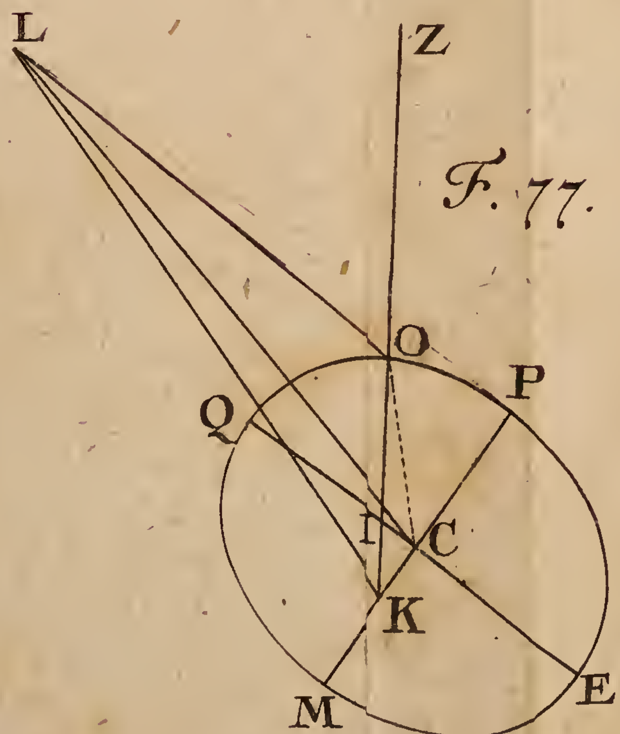

F. 31.
I
A
G
O
g
R
V
r
B
N
C
E
M
K
S
k
H
P
L
T

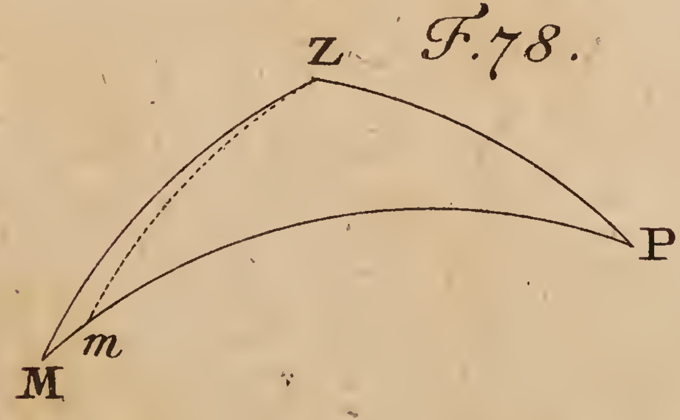

F. 34.
B
S
E
P
i
p
R
T
O
A
F

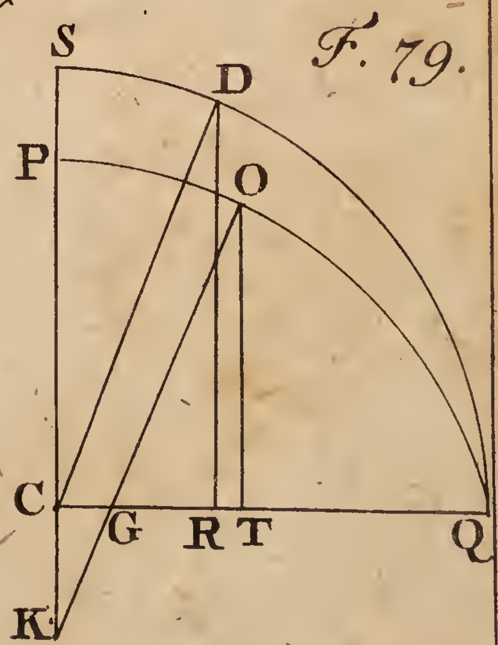

F. 35.
A
n
T
R
G
C
P
i
K
I
D
S
F
p
B
N
H


F. 40.
K
B
A
L
D
H
a
C
G
c
d
F
g
f
E
h
k
b
I


F. 76.
S
P
m
n
Oriens
Occidens
M
N
K
L


L
Z
F. 77.
O
Q
P
I
C
K
M
E


Z
F. 78.
P
m
M


S
D
F. 79.
P
O
C
G
R
T
Q
K